Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

Р. Г. Штеренберг

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДВУМЕРНОГО МАГНИТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ПРОИЗВОДНОЙ ОТ МЕРЫ

§0. Введение

1. В последнее время интенсивно исследуется вопрос об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов математической физики. Основное внимание уделяется оператору Шредингера

$$(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))+V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{D}=-i\nabla$; $V(\mathbf{x})$ – скалярный электрический потенциал, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – векторный магнитный потенциал, $g(\mathbf{x})=\{g^{jl}(\mathbf{x})\}$, $1\leqslant j,l\leqslant d$, – положительная матрица (метрика). Предполагается, что V, $\mathbf{A}$ и g периодичны относительно некоторой решетки Γ в $\mathbb{R}^d$. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ.

Первый результат получен в известной работе Л. Томаса [14] в 1973 г. для оператора Шредингера

$$-\Delta+V(\mathbf{x}) \tag{0.2}$$

в $L_2(\mathbb{R}^3)$ с периодическим потенциалом $V\in L_2(\Omega)$. Томас предложил метод доказательства абсолютной непрерывности спектра, который использовался во всех дальнейших исследованиях. Результат Томаса был обобщен в книге [9] на случай произвольной размерности $d\geqslant 2$.

Случай магнитного гамильтониана

$$(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2+V(\mathbf{x}) \tag{0.3}$$

Ключевые слова: оператор Шредингера, периодический оператор, обобщенный электрический потенциал, магнитный потенциал, переменная метрика, абсолютно непрерывный спектр.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 99-01-00681.

значительно сложнее. Основная трудность состоит в том, что магнитный оператор не удается исследовать как аддитивное возмущение “свободного” оператора $-\Delta$. Эта трудность была преодолена М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной [1] в двумерном случае. Рассмотрения [1] основаны на изучении двумерного оператора Паули $(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2+\partial_1 A_2(\mathbf{x})-\partial_2 A_1(\mathbf{x})$, допускающего удобную факторизацию (см. (5.5) ниже). Это позволяет учесть “магнитное” возмущение как *мультипликативное*. В [1] установлена абсолютная непрерывность спектра оператора (0.3) при $d=2$, $\mathbf{A}\in C(\mathbb{R}^2)$, $V\in L_2(\Omega)$. В дальнейшем, в [2] условия на потенциалы были ослаблены:

$$\mathbf{A}\in L_r(\Omega),\ r>2,\quad V\in L_\varrho(\Omega),\ \varrho>1. \tag{0.4}$$

Отметим, что при условиях (0.4) оператор (0.3) задается в терминах соответствующей квадратичной формы.

При $d\geqslant 3$ задача для оператора (0.3) оказалась значительно сложнее, чем при $d=2$. Она была решена А. Соболевым [11].

Значительные трудности связаны с включением переменной метрики $g(\mathbf{x})$. Исключение представляет случай скалярной метрики, рассмотренный в [3]. Именно, пусть

$$g(\mathbf{x})=\omega^2(\mathbf{x})a, \tag{0.5}$$

где a – постоянная положительная матрица, ω – положительная Γ-периодическая функция. При некоторых не слишком обременительных условиях гладкости на ω, в [3] отмечено, что задача об абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) с метрикой вида (0.5) в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d\geqslant 2$, сводится к аналогичному вопросу для оператора (0.3).

В работе А. Морама [8] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) *с метрикой общего вида* в случае

$$d=2,\ g\in C^\infty,\ \det g=1,\ \mathbf{A}\in C^\infty,\ V\in L_\infty. \tag{0.6}$$

Доказательство в [8] технически сложно и основано на оценках несколько иного типа, чем оценки Томаса. Однако, в двумерном случае существуют (см. [7]) *глобальные изотермические координаты, сохраняющие периодичность*. Используя эти координаты, можно при $d=2$ преобразовать (ср. [4, 7]) оператор (0.1) с метрикой общего вида к оператору с конформной (скалярной) метрикой. При этом решетка периодов и потенциалы изменятся. Этот прием позволяет получить результаты из [8] прямым сведением к случаю скалярной метрики. Условия на g, $\mathbf{A}$, V тогда оказываются заметно шире, чем (0.6). При $d \geqslant 3$ вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) с метрикой общего вида остается открытым.

Подробный обзор результатов по абсолютной непрерывности спектра периодических операторов приведен в [3, 13].

2. Настоящей работе непосредственно предшествовала статья [4], в которой изучался оператор

$$(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})\delta_\Sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \qquad (0.7)$$

Здесь Σ – Γ-периодическая система кусочно-гладких кривых, $\delta_\Sigma(\mathbf{x})$ – дельта-функция, сосредоточенная на Σ, $\sigma(\mathbf{x})$ – Γ-периодическая функция на Σ. Точное определение оператора (0.7) дается в терминах квадратичной формы. В [4] впервые доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера с *обобщенным* электрическим потенциалом вида $V+\sigma\delta_\Sigma$. Предполагалось, что $\mathbf{A}$ и V удовлетворяют (0.4), $\sigma \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Sigma)$, $p>1$; $g \in W_r^2(\Omega)$, $r>2$.

Отдельно отметим работу [10], в которой была доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.2) в $L_2(\mathbb{R}^2)$ для потенциалов V из класса Като K_2 (см. [5]). Это условие на V шире, чем (0.4), поскольку справедливо вложение $\bigcup\limits_{\varrho>1} L_\varrho(\Omega) \subset K_2$.

3. В настоящей работе усиливаются результаты из [4] и [10]. В $L_2(\mathbb{R}^2)$ рассматривается оператор

$$(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x})) + \mathcal{V}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad (0.8)$$

с электрическим потенциалом $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, представляющим собой *обобщенную функцию*. Условия на $\mathbf{A}$, g – те же, что и в [4]. Потенциал $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ задается с помощью Γ-периодического вещественного борелевского заряда $d\nu$; формально $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \frac{d\nu}{d\mathbf{x}}$. Предполагается, что заряд $d\nu$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int\limits_\Omega |u|^2 |d\nu| \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon, |d\nu|) \int\limits_\Omega |u|^2 d\mathbf{x},$$
$$u \in H^1(\Omega), \ \forall \varepsilon \in (0,1). \qquad (0.9)$$

Точное определение оператора (0.8) дается через замкнутую полуограниченную в $L_2(\mathbb{R}^2)$ форму

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle g(\mathbf{x})(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))u, (\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))u\rangle d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 d\nu, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{0.10}$$

Основной результат работы – теорема 1.1 об абсолютной непрерывности спектра оператора (0.8).

В случае, когда $d\nu = V d\mathbf{x}$, оператор (0.8) переходит в (0.1) при $d = 2$, а в случае, когда $d\nu = V d\mathbf{x} + \sigma ds_\Sigma(\mathbf{x})$, оператор (0.8) переходит в (0.7). Здесь $ds_\Sigma(\mathbf{x})$ – элемент длины дуги на Σ. В п. 1.5 приведен пример заряда $d\nu$ иного типа. Отметим, что в случаях, исследованных ранее (см. [2, 4, 10]), условие (0.9) заведомо выполнено. Усиление результатов достигается благодаря отказу от рассмотрения конкретных функциональных классов для $\mathcal{V}$. Легко понять, что *условие* (0.9) *равносильно компактности вложения* $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega, |d\nu|)$.

4. В основе доказательства, как обычно, лежит метод Томаса. Этот метод использует разложение периодического оператора в прямой интеграл. Затем операторы, действующие в слоях прямого интеграла, продолжаются на комплексные значения параметра слоя (квазиимпульса). Дальнейшее сводится к оценкам резольвенты этих операторов при больших мнимых значениях квазиимпульса. Именно получение таких оценок представляет конкретную трудность в каждой новой задаче. В нашем случае соответствующие оценки составляют содержание теоремы 2.1, из которой впоследствии выводится теорема 1.1. Часть нужных нам фактов заимствована из [2] и [4] в готовом виде. Мы опираемся также на абстрактную схему теории возмущений, предложенную в [2] (см. §3). Эту схему нам приходится применять дважды.

Исходно теорема 2.1 об оценках доказывается для случая, когда матрица g – единичная. Затем оценки переносятся на случай скалярной метрики (0.5). Наконец, использование глобальных изотермических координат позволяет доказать (ср. [4, 7]) теорему 1.1 в полном объеме.

5. В §1 приведены основные определения и результаты. В §2 собран необходимый материал относительно схемы Томаса, и сформулирована опорная теорема 2.1 об оценках. В §3 приведен результат по теории возмущений из [2]. В §4 устанавливаются оценки для свободного оператора, нужные для доказательства теоремы 2.1 при $g = \mathbf{1}$. В §5 проводится подготовка к доказательству теоремы 2.1; соответствующий материал относится к оператору (0.8) при $\mathcal{V} = 0$ и $g = \mathbf{1}$. В §6 теорема 2.1 доказывается при $g = \mathbf{1}$. Наконец, в §7 теорема 2.1, а затем и теорема 1.1, устанавливаются в полном объеме.

6. Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность М. Ш. Бирману за постановку задачи и большое внимание к работе, Т. А. Суслиной за многочисленные обсуждения, критику и помощь в подготовке текста настоящей статьи, а также М. М. Фаддееву за консультации по ряду вопросов.

§1. Определение оператора. Основной результат

1. Обозначения. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ образуют базис решетки Γ в $\mathbb{R}^2$ и пусть

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2, \ 0 \leqslant t_j < 1, \ j = 1, 2\}$$

– элементарная ячейка решетки Γ. Фиксируем ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы было $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|$. Используем обозначения $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2) = (\partial_1, \partial_2)$, $\mathbf{D} = (D_1, D_2) = -i\nabla$. Классы Соболева порядка s с показателем суммируемости p обозначаются через $W_p^s(\mathbb{R}^2)$, $W_p^s(\Omega)$; при $p = 2$ – через $H^s(\mathbb{R}^2)$, $H^s(\Omega)$, $s > 0$. Через $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $W_p^s(\Omega)$, для которых Γ-периодическое продолжение принадлежит классу $W_{p,\,\mathrm{loc}}^s(\mathbb{R}^2)$; при $p = 2$ обозначаем $\widetilde{H}^s(\Omega) := \widetilde{W}_2^s(\Omega)$. Далее, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $|\cdot|$ – стандартные скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^2$; $\mathbf{1}$ – единичная (2×2)-матрица. Норма в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначается через $\|\cdot\|_p$; при $p = 2$ индекс не пишется. Интегралы без указания области интегрирования считаются распространенными по $\mathbb{R}^2$. Через C, c обозначаются различные оценочные постоянные.

Через $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначаются скалярное произведение и норма в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если T – замкнутый оператор в $\mathfrak{H}$, то $\varrho(T)$ означает резольвентное множество. Если $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ – два сепарабельных гильбертовых пространства, то $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$ означает множество линейных ограниченных отображений из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$; $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) =: \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Для $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$ через

$\|T\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}}$ обозначается операторная норма; часто пишем просто $\|T\|$, если это не ведет к смешениям.

2. Векторный (магнитный) потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$ вещественен и периодичен:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{a}_j) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что при некотором r

$$\mathbf{A} \in L_r(\Omega), \quad r > 2. \tag{1.2}$$

Пусть $d\nu$ – вещественный борелевский заряд в $\mathbb{R}^2$ с локально конечной вариацией. Тем самым,

$$\nu_\Xi := \int\limits_\Xi |d\nu| < \infty \tag{1.3}$$

для любого борелевского ограниченного в $\mathbb{R}^2$ множества Ξ; будем считать, что заряд $d\nu$ периодичен относительно решетки Γ, то есть выполнено

$$\int\limits_{\Xi+n_1\mathbf{a}_1+n_2\mathbf{a}_2} d\nu(\mathbf{x}) = \int\limits_\Xi d\nu(\mathbf{x}), \ \mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1.4}$$

Наложим на заряд $d\nu$ следующее условие: *справедливо вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega, |d\nu|)$, и при любом $\varepsilon \in (0,1)$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_\Omega |u|^2 |d\nu| \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon, |d\nu|) \int\limits_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \ u \in H^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Метрика задается (2×2)-матрицей-функцией $g(\mathbf{x}) = \{g^{jl}(\mathbf{x})\}$, причем

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{a}_j) = g(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.6}$$

$$c_0\mathbf{1} \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c_1\mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty. \tag{1.7}$$

Предполагается, что при каком-либо r

$$g \in \widetilde{W}_r^2(\Omega), \quad r > 2. \tag{1.8}$$

Выделим случай “скалярной” метрики

$$g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x}) a, \tag{1.9}$$

где $a = \{a^{jl}\}$ – постоянная положительная матрица, а $\omega(\mathbf{x})$ – вещественная измеримая периодическая функция:

$$\omega(\mathbf{x}+\mathbf{a}_j) = \omega(\mathbf{x}), \quad j=1,2, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2, \tag{1.10}$$

причем

$$0<\omega_0 \leqslant \omega(\mathbf{x}) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{1.11}$$

Тогда (1.7) выполнено, а вместо (1.8) можно наложить менее ограничительное условие. Именно, пусть

$$V_\omega := -\omega^{-1}\operatorname{div} a\nabla\omega, \tag{1.12}$$

где дифференциальное выражение понимается в смысле теории распределений в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что при некотором ϱ

$$V_\omega \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho > 1. \tag{1.13}$$

3. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ на области определения $H^1(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим квадратичные формы

$$m_0[u,u] = m_0(g)[u,u] := \int \langle g(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u\rangle \, d\mathbf{x}, \tag{1.14}$$

$$m[u,u] = m(g,\mathbf{A})[u,u] := \int \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})u\rangle \, d\mathbf{x}, \tag{1.15}$$

$$\widehat{m}[u,u] = \widehat{m}(g,\mathbf{A},d\nu)[u,u] := m(g,\mathbf{A})[u,u] + \int |u|^2 \, d\nu(\mathbf{x}). \tag{1.16}$$

Форму (1.15) можно записать в виде

$$m[u,u] = m_0[u,u] + w_1[u,u],$$

$$w_1[u,u] := \int (-\langle g\mathbf{A}u, \mathbf{D}u\rangle - \langle g\mathbf{D}u, \mathbf{A}u\rangle + \langle g\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle |u|^2)\, d\mathbf{x}, \tag{1.17}$$

а форму (1.16) – в виде

$$\widehat{m}[u,u] = m_0[u,u] + w_1[u,u] + w_2[u,u], \tag{1.18}$$

$$w_2[u,u] := \int |u|^2 \, d\nu(\mathbf{x}), \quad u\in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.19}$$

Из (1.7) вытекает неравенство

$$m_0[u,u] \geqslant c_0 \int |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}, \quad u\in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.20}$$

Неравенство Гельдера вместе с известными (см., например, [12]) интерполяционными неравенствами приводит к оценке

$$\int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x})||u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \|f\|_s \left(\varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon, s, \Omega) \int\limits_{\Omega} |u|^2\,d\mathbf{x}\right),$$
$$f \in L_s(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega), \quad s > 1, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.21}$$

Если функция f – периодическая, то сложением по ячейкам решетки получается оценка

$$\int |f(\mathbf{x})||u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \|f\|_s \left(\varepsilon \int |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon, s, \Omega) \int |u|^2\,d\mathbf{x}\right),$$
$$f \in L_s(\Omega), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad s > 1, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Отсюда и из (1.20) следует, что при условиях (1.1), (1.2), (1.7) форма (1.17) сильно подчинена форме (1.14), т. е. справедлива оценка

$$|w_1[u,u]| \leqslant \varepsilon m_0[u,u] + C(\varepsilon, g, \mathbf{A}) \int |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.22}$$

Аналогично, из (1.4), (1.5), (1.19), (1.20) получаем

$$|w_2[u,u]| \leqslant \varepsilon m_0[u,u] + C(\varepsilon, g, |d\nu|) \int |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.23}$$

Теперь из (1.18), (1.20), (1.22), (1.23) видно, что форма (1.16) с областью определения $\operatorname{Dom}\widehat{m} = H^1(\mathbb{R}^2)$ полуограничена снизу и замкнута в $L_2(\mathbb{R}^2)$. То же верно для форм (1.14), (1.15). Форме (1.14) отвечает *самосопряженный в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *оператор* $M_0(g)$, формально заданный дифференциальным выражением $-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\,\nabla$. Отметим, что $M_0(\mathbf{1}) = -\Delta$, $\operatorname{Dom} M_0(\mathbf{1}) = H^2(\mathbb{R}^2)$. Форме (1.16) отвечает *самосопряженный в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *оператор*

$$\widehat{M} = \widehat{M}(g, \mathbf{A}, d\nu), \tag{1.24}$$

который по определению есть *оператор Шредингера* (0.8) *с метрикой* g, *магнитным потенциалом* $\mathbf{A}$ *и обобщенным электрическим потенциалом* $\mathcal{V}$.

4. Основной результат работы составляет

Теорема 1.1. *Пусть потенциал* $\mathbf{A}$ *и заряд* $d\nu$ *удовлетворяют соответственно условиям* (1.1), (1.2) *и* (1.4), (1.5), *а метрика* g *удовлетворяет условиям* (1.6)–(1.8) *либо* (1.9)–(1.11), (1.13). *Пусть оператор* (1.24) $\widehat{M}$ *порожден формой* $\widehat{m}$, *определяемой равенствами* (1.15), (1.16). *Тогда спектр оператора* $\widehat{M}$ *абсолютно непрерывен.*

5. Примеры. На протяжении данного пункта будем считать для простоты, что $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, и, следовательно, $\Omega = [0,1)^2$.

Пример 1. Пусть $d\nu = V(x_1, x_2)d\mathbf{x}$, где $V \in L_1([0,1), L_p(0,1))$, $p > 1$, т. е. выполнено

$$\|V\|_{1,p} := \int_0^1 \left(\int_0^1 |V(x_1,x_2)|^p dx_2 \right)^{1/p} dx_1 < \infty, \quad p > 1. \tag{1.25}$$

Покажем, что так определенный заряд $d\nu$ удовлетворяет условию (1.5). В самом деле, из неравенства Гельдера и известных интерполяционных неравенств (см., например, [12]) следует оценка

$$\int_0^1 |V(x_1,x_2)||u|^2 dx_2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 |V(x_1,x_2)|^p dx_2 \right)^{1/p} \left(\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x} \right),$$

для п. в. $x_1 \in [0,1)$, $u \in H^1(\Omega)$, $0 < \varepsilon < 1$. А тогда

$$\int_\Omega |V||u|^2 d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \|V\|_{1,p} \left(\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x} \right), \ u \in H^1(\Omega), \ 0 < \varepsilon < 1.$$

Отметим, что условие (1.25) для V менее ограничительно, чем условие (0.4), которое накладывалось в [2]. Вместе с тем, условие (1.25) более жестко, чем условие $V \in K_2$ из [10].

Пример 2. Пусть теперь

$$d\nu = d\nu_1(x_1) \times \sigma(x_2)dx_2, \tag{1.26}$$

где $\sigma \in L_p(0,1)$, $p > 1$, а $d\nu_1$ – вещественный борелевский заряд ограниченной вариации на $[0,1)$. Доказательство оценки (1.5) для заряда (1.26) вполне аналогично примеру 1.

Для абсолютно непрерывного (относительно меры Лебега) заряда $d\nu_1$ пример 2 является частным случаем примера 1. Если $d\nu_1$ – точечный заряд с конечным числом скачков, то мы приходим к дельта-функции на графе (в очень частном случае), что изучено в [4]. Если $d\nu_1$ – *сингулярный непрерывный заряд ограниченной вариации,* то (1.26) дает пример заряда $d\nu$ *иного типа, нежели рассмотренные в* [4].

§2. Разложение в прямой интеграл. Схема Томаса

1. Прямой интеграл. Через $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ обозначим базис двойственной к Γ решетки в $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_l \rangle = 2\pi\delta_{jl}, \quad j,l = 1,2.$$

Элементарную ячейку двойственной решетки обозначим через

$$\widetilde{\Omega} := \{\mathbf{k} = \tau_1\mathbf{b}_1 + \tau_2\mathbf{b}_2 : \quad 0 \leqslant \tau_j < 1, \quad j = 1,2\}. \tag{2.1}$$

Ячейка (2.1) двойственна к Ω.

В $L_2(\Omega)$ для каждого $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{k}$ – *квазиимпульс*) рассмотрим квадратичные формы

$$m_0(\mathbf{k})[u,u] = m_0(\mathbf{k};g)[u,u] := \int\limits_\Omega \langle g(\mathbf{D}+\mathbf{k})u, (\mathbf{D}+\mathbf{k})u\rangle\, d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} m(\mathbf{k})[u,u] = m(\mathbf{k};g,\mathbf{A})[u,u] := \\ \int\limits_\Omega \langle g(\mathbf{D}+\mathbf{k}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}+\mathbf{k}-\mathbf{A})u\rangle\, d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \widehat{m}(\mathbf{k})[u,u] = \widehat{m}(\mathbf{k};g,\mathbf{A},d\nu)[u,u] := \\ m(\mathbf{k})[u,u] + \int\limits_\Omega |u|^2\, d\nu(\mathbf{x}), \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Область определения этих форм не зависит от $\mathbf{k}$ (см. ниже (2.18), (2.19)):

$$\operatorname{Dom} m_0(\mathbf{k}) = \operatorname{Dom} m(\mathbf{k}) = \operatorname{Dom} \widehat{m}(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.5}$$

При условиях (1.2), (1.5), (1.7) формы (2.2)–(2.4) полуограничены снизу и замкнуты в $L_2(\Omega)$. Форма (2.2) порождает самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор

$$M_0(\mathbf{k}) = M_0(\mathbf{k}; g). \tag{2.6}$$

Очевидно,

$$M_0(\mathbf{k}; \mathbf{1}) = (\mathbf{D} + \mathbf{k})^2, \quad \operatorname{Dom} M_0(\mathbf{k}; \mathbf{1}) = \widetilde{H}^2(\Omega). \tag{2.7}$$

Форма (2.4) порождает самосопряженный оператор

$$\widehat{M}(\mathbf{k}) = \widehat{M}(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu). \tag{2.8}$$

Поскольку вложение $\widetilde{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ компактно, *резольвента каждого из операторов* (2.6), (2.8) *компактна.*

Разложение периодических операторов в прямой интеграл строится с помощью *преобразования Гельфанда* $\mathcal{U}$. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{K} := \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega)\, d\mathbf{k}. \tag{2.9}$$

Отображение $\mathcal{U}: \ L_2(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{K}$ первоначально определяется на функциях класса Шварца $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ формулой

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\operatorname{mes} \widetilde{\Omega})^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\langle \mathbf{k}, n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2\rangle} f(\mathbf{x} + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2).$$

Затем оно продолжается по непрерывности до *унитарного* отображения $L_2(\mathbb{R}^2)$ на $\mathcal{K}$. При этом оказывается, что для

$$f \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{2.10}$$

выполнено

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \text{п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.11}$$

$$\widehat{m}[f, f] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \widehat{m}(\mathbf{k})[(\mathcal{U}f)(\mathbf{k}, \cdot), (\mathcal{U}f)(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{2.12}$$

Обратно, если для $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет место (2.11) и конечен интеграл (2.12), то выполнено (2.10). Соотношения (2.11), (2.12) показывают, что действие оператора (1.24) в прямом интеграле (2.9) сводится к умножению на оператор-функцию $\widehat{M}(\mathbf{k})$:

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\cdot) \in \operatorname{Dom}\widehat{M}(\mathbf{k}), \quad \text{п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \quad \text{для } f \in \operatorname{Dom}\widehat{M}, \tag{2.13}$$

$$(\mathcal{U}\widehat{M}f)(\mathbf{k},\cdot) = \widehat{M}(\mathbf{k})(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\cdot), \quad \text{п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{2.14}$$

Соотношения (2.13), (2.14) можно записать в виде

$$\mathcal{U}\widehat{M}(g,\mathbf{A},d\nu)\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \widehat{M}(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu)\, d\mathbf{k}. \tag{2.15}$$

2. Комплексификация. Схема Томаса связана с распространением форм $\widehat{m}(\mathbf{k})$ и операторов $\widehat{M}(\mathbf{k})$ на комплексные значения $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ квазиимпульса. При таком аналитическом продолжении возникают *секториальные формы и m-секториальные операторы*, систематически исследованные в книге Т. Като [6].

Запишем форму (2.4) в виде

$$\widehat{m}(\mathbf{k})[u,u] = \int\limits_{\Omega} \langle g(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + \widetilde{w}_1(\mathbf{k})[u,u] + \widetilde{w}_2[u,u], \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{2.16}$$

$$\widetilde{w}_1(\mathbf{k})[u,u] := \int\limits_{\Omega} \left(\langle g\mathbf{D}u, (\overline{\mathbf{k}} - \mathbf{A})u\rangle + \langle g(\mathbf{k}-\mathbf{A})u, \mathbf{D}u\rangle + \langle g(\mathbf{k}-\mathbf{A}), (\overline{\mathbf{k}}-\mathbf{A})\rangle |u|^2\right) d\mathbf{x}, \tag{2.17}$$

$$\widetilde{w}_2[u,u] := \int\limits_{\Omega} |u|^2\, d\nu(\mathbf{x}).$$

Условия на $\mathbf{A}$, $d\nu$ вместе с неравенствами (1.20), (1.21) обеспечивают оценки

$$|\widetilde{w}_1(\mathbf{k})[u,u]| \leqslant \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon, \mathbf{k}, g, \mathbf{A}) \int\limits_{\Omega} |u|^2\, d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{2.18}$$

$$|\widetilde{w}_2[u,u]| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon, g, |d\nu|)\int\limits_\Omega |u|^2\, d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad 0<\varepsilon<1. \tag{2.19}$$

Формула (2.17) позволяет аналитически продолжить форму $\widetilde{w}_1(\mathbf{k})$ на любые $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Одновременно (2.16) дает аналитическое продолжение для $\widehat{m}(\mathbf{k})$. При этом оценка (2.18) сохраняет силу для всех $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Отсюда следует (см. [6, теорема VI.3.9]), что *форма $\widehat{m}(\mathbf{k})$ замкнута и секториальна* для $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Такая форма порождает (см. [6, теоремы VI.2.1, 2.5, 2.7]) m-секториальный оператор, который мы по-прежнему будем обозначать через $\widehat{M}(\mathbf{k}) = \widehat{M}(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Из (2.5) следует, что *резольвента оператора $\widehat{M}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, компактна.*

В дальнейшем значение $k_2 \in \mathbb{R}$ фиксируем, но считаем $k_1 \in \mathbb{C}$. Тогда операторы $\widehat{M}(k_1, k_2)$ образуют относительно параметра $k_1 \in \mathbb{C}$ *самосопряженное аналитическое семейство типа* (B) *с компактной резольвентой*. Напомним, что семейство типа (B) соответствует определению операторов через *секториальные формы с постоянной областью определения* (см. [6, §VII.4]). Самосопряженность семейства означает, что $(\widehat{M}(k_1,k_2))^* = \widehat{M}(\overline{k_1}, k_2)$, $k_1 \in \mathbb{C}$, $k_2 \in \mathbb{R}$.

3. Схема Томаса применительно к операторным семействам типа (B) подробно описана в [3]. Эти соображения применимы и к рассматриваемому нами случаю. Именно, доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора $\widehat{M}$ сводится к проверке соотношения

$$\|(\widehat{M}(\mu+iy, k_2))^{-1}\| \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty$$

для подходящего $\mu \in \mathbb{R}$ и всех $k_2 \in \mathbb{R}$. Положим

$$k_1 = \mu + iy, \quad \mu = \pi|\mathbf{a}_1|^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Условимся в этом случае писать $\widehat{M}(y)$ вместо $\widehat{M}(\mathbf{k})$, зависимость от k_2 в обозначениях не отражается; аналогичное соглашение принимается для обозначения других операторов и форм.

Основной технический результат работы – следующая теорема, в которой метрика предполагается скалярной.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $d\nu$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Пусть* g *удовлетворяет условиям* (1.9)–(1.11), (1.13). *Пусть* $\widehat{M}(y) = \widehat{M}(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu)$, *где* $\mathbf{k}$ *определено в* (2.20). *Тогда существуют такие постоянные*

$$y_0 = y_0(\Omega, g, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2), \quad C_0 = C_0(\Omega, g, \mathbf{A})$$

(зависящие также от r*), что оператор* $\widehat{M}(y)$ *обратим при* $|y| \geqslant y_0$, *и*

$$\|(\widehat{M}(y))^{-1}\| \leqslant C_0(\mu + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y_0. \tag{2.21}$$

Если k_2 *пробегает ограниченное подмножество в* $\mathbb{R}$, *то* y_0 *можно выбрать не зависящим от* k_2.

Утверждение теоремы 1.1 в случае скалярной метрики вида (1.9) получается из теоремы 2.1 стандартным путем (см. [3, §2]). Теорема 1.1 в полном объеме будет выведена из теоремы 2.1 в §7.

§3. Схема теории возмущений

В [2, §5] развита общая схема теории возмущений в случае, когда операторы определены через секториальные квадратичные формы. Нам понадобится небольшая модификация этой схемы, указанная в [4, §3]. Для удобства читателя приведем здесь нужные формулировки.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ – сепарабельные гильбертовы пространства; h и $\widetilde{h}$ – две замкнутые секториальные формы с общей плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения

$$\mathfrak{d} = \operatorname{Dom} h = \operatorname{Dom} \widetilde{h}.$$

Через $\mathcal{H}$, $\widetilde{\mathcal{H}}$ обозначим соответствующие этим формам m-секториальные операторы в $\mathfrak{H}$. Сделаем несколько предположений.

i. *Точка* 0 *регулярна для* $\widetilde{\mathcal{H}}$:

$$0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{H}}).$$

ii. *Оператор* $\widetilde{\mathcal{R}} := \widetilde{\mathcal{H}}^{-1}$ *допускает факторизацию:*

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_0 \mathcal{P}^*, \quad \mathcal{P}_0, \mathcal{P} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad \operatorname{Ran} \mathcal{P}_0 \subset \mathfrak{d}, \quad \operatorname{Ran} \mathcal{P} \subset \mathfrak{d}.$$

iii. *Существуют плотно определенные в $\mathfrak{H}$ линейные операторы $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ такие, что*

$$\mathfrak{d} \subset \operatorname{Dom} \mathcal{G}_0 \subset \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{d} \subset \operatorname{Dom} \mathcal{G} \subset \mathfrak{H},$$

$$\mathcal{G}_0 \mathcal{P}_0 \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}), \quad \mathcal{G}\mathcal{P} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}),$$

$$h[u, v] = \widetilde{h}[u, v] + (\mathcal{G}_0 u, \mathcal{G} v)_{\mathfrak{G}}, \quad u, v \in \mathfrak{d}. \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) можно толковать как равенство в смысле форм

$$\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}} + \mathcal{G}^* \mathcal{G}_0.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{G}_0 \mathcal{P}_0)(\mathcal{G}\mathcal{P})^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}).$$

Введем последнее наиболее содержательное предположение.
iv. *Оператор $I + \mathcal{Y}$ имеет в $\mathfrak{G}$ ограниченный обратный:*

$$\mathcal{Z} := (I + \mathcal{Y})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}).$$

Предложение 3.1. *Пусть выполнены предположения* i–iv. *Тогда $0 \in \varrho(\mathcal{H})$, и справедливо представление*

$$\mathcal{R} := \mathcal{H}^{-1} = \widetilde{\mathcal{R}} - (\mathcal{G}\widetilde{\mathcal{R}}^*)^* \mathcal{Z} (\mathcal{G}_0 \widetilde{\mathcal{R}}).$$

§4. Оценки

1. В этом параграфе мы доказываем оценки, которые позволят применить схему §3 к исследованию оператора $\widehat{M}(y)$.

Запишем ряд Фурье для $v \in L_2(\Omega)$:

$$v(\mathbf{x}) = (\operatorname{mes} \widetilde{\Omega})^{-1/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \widehat{v}_{\mathbf{n}} \exp\left(i \langle n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{x} \rangle\right). \tag{4.1}$$

Пусть $\mathcal{F}$ – дискретное (унитарное) преобразование Фурье, $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \to l_2(\mathbb{Z}^2)$, действующее в соответствии с (4.1) по формуле $\mathcal{F} v = \{\widehat{v}_{\mathbf{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$.

Оператор (2.7), в котором $\mathbf{k}$ определено в (2.20), представляется в виде

$$M_0(y; \mathbf{1}) = \mathcal{F}^* \mathbf{h}(y) \mathcal{F}, \tag{4.2}$$

где *символ* $\mathbf{h}(y) = \{h_{\mathbf{n}}(y)\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$, задан формулой (ср. [2, §3])

$$h_{\mathbf{n}}(y) = \mu^2(2n_1 + 1)^2 + (\alpha n_1 + \beta n_2 + k_2)^2 - y^2 + 2iy\mu(2n_1 + 1). \quad (4.3)$$

Здесь $\alpha = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\beta = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{e}_2 \rangle$; отметим, что $\mathbf{b}_1 = 2\mu \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \beta \mathbf{e}_2$. Символ (4.3) допускает факторизацию:

$$h_{\mathbf{n}}(y) = q_{\mathbf{n}}^{(+)}(y) q_{\mathbf{n}}^{(-)}(y), \quad q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y) := \mu(2n_1 + 1) \pm i(\alpha n_1 + \beta n_2 + k_2 \pm y). \quad (4.4)$$

Из (4.2)–(4.4) непосредственно следует оценка

$$\|(M_0(y; \mathbf{1}))^{-1}\| \leqslant \min\{(2\mu|y|)^{-1}, \ \mu^{-2}\} \leqslant 2\mu^{-1}(\mu + |y|)^{-1}. \quad (4.5)$$

2. Введем операторы

$$P_0(y) := \mathcal{F}^* \mathbf{p}_0(y) \mathcal{F}, \ \mathbf{p}_0(y) := \{|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2; \quad (4.6)$$

$$P(y) := \mathcal{F}^* \mathbf{p}(y) \mathcal{F}, \ \mathbf{p}(y) := \{(\overline{h_{\mathbf{n}}(y)})^{-1} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{1/2}\}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2. \quad (4.7)$$

Тогда

$$R_0(y) := (M_0(y; \mathbf{1}))^{-1} = P_0(y)(P(y))^*. \quad (4.8)$$

При $N \geqslant 1$ рассмотрим следующие характеристические функции переменной $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$:

$$\chi_1(\mathbf{n}; y, N) := \begin{cases} 1, & |2n_1 + 1| \leqslant N^{-1}|y| \\ 0, & |2n_1 + 1| > N^{-1}|y| \end{cases},$$

$$\chi_2(\mathbf{n}; y, k_2) := \begin{cases} 1, & |\alpha n_1 + \beta n_2| \leqslant 2(|y| + |k_2|) \\ 0, & |\alpha n_1 + \beta n_2| > 2(|y| + |k_2|) \end{cases},$$

$$\widetilde{\chi}_1(\mathbf{n}; y, N) := 1 - \chi_1(\mathbf{n}; y, N), \quad \widetilde{\chi}_2(\mathbf{n}; y, k_2) := 1 - \chi_2(\mathbf{n}; y, k_2).$$

Положим $\boldsymbol{\chi}_1(y, N) := \{\chi_1(\mathbf{n}; y, N)\}$, $\boldsymbol{\chi}_2(y, k_2) := \{\chi_2(\mathbf{n}; y, k_2)\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$. Введем следующие ортопроекторы в $L_2(\Omega)$:

$$\mathcal{X}_1(y, N) := \mathcal{F}^* \boldsymbol{\chi}_1(y, N) \mathcal{F}, \quad (4.9)$$

$$\widetilde{\mathcal{X}}_1(y, N) := I - \mathcal{X}_1(y, N), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{X}_2(y, k_2) := \mathcal{F}^* \boldsymbol{\chi}_2(y, k_2) \mathcal{F}, \quad (4.11)$$

$$\widetilde{\mathcal{X}}_2(y, k_2) := I - \mathcal{X}_2(y, k_2). \quad (4.12)$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1. *Справедливы оценки*

$$\|D_2\widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2)P_0(y)\| = \|D_2\widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2)P(y)\| \leqslant 2, \tag{4.13}$$

$$\|D_2\mathcal{X}_2(y,k_2)\| \leqslant 2(|y|+|k_2|), \tag{4.14}$$

$$\|P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| = \|P(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant C(\Omega)N^{1/2}(1+|y|)^{-1},\ \ N \geqslant 1, \tag{4.15}$$

$$\|D_1P_0(y)\| = \|D_1P(y)\| \leqslant 1+\sqrt{2}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Оценка (4.14) очевидна; оценка (4.16) доказана в [4, следствие 4.5]. Докажем (4.15). В силу (4.5), достаточно считать $|y| \geqslant 1$. При $N \geqslant 1$ из (4.3) вытекает оценка

$$|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\widetilde{\chi}_1(\mathbf{n};y,N) \leqslant$$

$$\leqslant |\operatorname{Im} h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\widetilde{\chi}_1(\mathbf{n};y,N) \leqslant (2\mu)^{-1/2}N^{1/2}|y|^{-1}, \quad |y| \geqslant 1,\ \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2,$$

что (с учетом (4.10)) и доказывает оценку (4.15). Чтобы доказать (4.13), воспользуемся факторизацией (4.4). Поскольку $|\alpha n_1+\beta n_2 \pm y| \geqslant \frac{1}{2}|\alpha n_1+\beta n_2|$ на $\operatorname{supp}\widetilde{\chi}_2(\cdot;y,k_2)$, то

$$|\alpha n_1+\beta n_2||h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\widetilde{\chi}_2(\mathbf{n};y,k_2) \leqslant$$

$$|\alpha n_1+\beta n_2||\alpha n_1+\beta n_2+k_2+y|^{-1/2}\times$$
$$\times\,|\alpha n_1+\beta n_2+k_2-y|^{-1/2}\widetilde{\chi}_2(\mathbf{n};y,k_2) \leqslant 2, \quad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2,$$

откуда вытекает (4.13). $\bullet$

Лемма 4.2. *Справедлива оценка*

$$\|D_2P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| = \|D_2P(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant$$
$$\leqslant C(\Omega,k_2)N^{1/2},\ \ N \geqslant 1. \tag{4.17}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|D_2P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|D_2\widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2)P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| +$$
$$+\|D_2\mathcal{X}_2(y,k_2)P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant$$
$$\|D_2\widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2)P_0(y)\| + \|D_2\mathcal{X}_2(y,k_2)\|\|P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\|.$$

Теперь (4.17) следует из (4.13)–(4.15). •

Прямым следствием оценки (4.16) и леммы 4.2 является оценка

$$\|\nabla P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| = \|\nabla P(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant C(\Omega,k_2)N^{1/2},\ \ N\geqslant 1. \tag{4.18}$$

Кроме того, из (4.8), (4.15), (4.18) вытекают неравенства

$$\|R_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant C(\Omega)N(1+|y|)^{-2},\ \ N\geqslant 1, \tag{4.19}$$

$$\|\nabla R_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)\| \leqslant C(\Omega,k_2)N(1+|y|)^{-1},\ \ N\geqslant 1. \tag{4.20}$$

Лемма 4.3. *При $N\geqslant 2\max\{1,\mu\}$ справедливы оценки*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma} \leqslant C(\Omega,\gamma)(1+|y|)^{-\gamma},\ \ \gamma>2, \tag{4.21}$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma} \leqslant C(\Omega,\gamma)N^{\gamma-2}(1+|y|)^{-2(\gamma-1)},\ \ 1<\gamma<2, \tag{4.22}$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-2} \leqslant C(\Omega)|y|^{-2}\max\{0,\ln\left(2|y|N^{-1}\right)\}, \tag{4.23}$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1} \leqslant C(\Omega)N^{-1}\ln N. \tag{4.24}$$

Доказательство. Утверждения леммы при $|y|<N$ очевидны. Поэтому в дальнейшем будем считать $|y|\geqslant N$. При фиксированных $n_1\in\mathbb{Z}$, $k_2,y\in\mathbb{R}$, очевидно, найдутся четыре интервала вида $\mathcal{I}_1=(-\infty,t_1)$, $\mathcal{I}_2=[t_1,t_2)$, $\mathcal{I}_3=[t_2,t_3)$, $\mathcal{I}_4=[t_3,\infty)$, на которых последовательность $\{|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma}\}$ монотонна по $n_2\in\mathbb{Z}\cap\mathcal{I}_j$, $j=1,2,3,4$. Используя интегральный признак сходимости для ряда по n_2 и представление (4.3), получаем оценку

$$\begin{aligned}\sum_{n_2\in\mathbb{Z}}|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma} &\leqslant \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|z_1^2+(\alpha n_1+\beta z_2+k_2)^2-y^2+2iyz_1\right|^{-\gamma}dz_2+4\max_{n_2\in\mathbb{Z}}|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma} \\ &\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|z_1^2+(\alpha n_1+\beta z_2+k_2)^2-y^2+2iyz_1\right|^{-\gamma}dz_2+4|2yz_1|^{-\gamma},\end{aligned} \tag{4.25}$$

где введено обозначение $z_1 := \mu(2n_1 + 1)$. Рассмотрим случай $2|z_1| \leqslant |y|$. После последовательных замен переменной $s = \alpha n_1 + \beta z_2 + k_2$, $w = s(y^2 - z_1^2)^{-1/2}$, получаем

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|z_1^2 + (\alpha n_1 + \beta z_2 + k_2)^2 - y^2 + 2iyz_1\right|^{-\gamma} dz_2 = \\
|\beta|^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left(s^2 - (y^2 - z_1^2)\right)^2 + 4y^2 z_1^2\right)^{-\gamma/2} ds = \\
|\beta|^{-1}(y^2 - z_1^2)^{1/2-\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left((w^2-1)^2 + 4y^2 z_1^2 (y^2 - z_1^2)^{-2}\right)^{-\gamma/2} dw \leqslant \\
(3/4)^{1/2-\gamma}|\beta|^{-1}|y|^{1-2\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left(w^2-1\right)^2 + z_1^2 y^{-2}\right)^{-\gamma/2} dw.
\end{gathered}
\tag{4.26}
$$

Здесь мы использовали оценку $y^2 - z_1^2 \geqslant (3/4)y^2$. Далее,

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left(w^2-1\right)^2 + z_1^2 y^{-2}\right)^{-\gamma/2} dw \leqslant 2^{1+\gamma/2} \int\limits_{2}^{\infty} w^{-2\gamma}\, dw + \\
2\int\limits_{0}^{2} \left(\left(w^2-1\right)^2 + z_1^2 y^{-2}\right)^{-\gamma/2} dw = \\
c_1(\gamma) + 2\int\limits_{0}^{2} \left((w-1)^2 + z_1^2 y^{-2}\right)^{-\gamma/2} dw = \\
c_1(\gamma) + 2|yz_1^{-1}|^{\gamma-1} \int\limits_{-|yz_1^{-1}|}^{|yz_1^{-1}|} \left(t^2+1\right)^{-\gamma/2} dt.
\end{gathered}
\tag{4.27}
$$

Здесь мы перешли к новой переменной $t = |yz_1^{-1}|(w-1)$. Наконец, при $\gamma > 1$,

$$\int\limits_{-|yz_1^{-1}|}^{|yz_1^{-1}|} \left(t^2+1\right)^{-\gamma/2} dt \leqslant 2\int\limits_0^1 \left(t^2+1\right)^{-\gamma/2} dt + \\ +2\int\limits_1^{|yz_1^{-1}|} t^{-\gamma}\,dt = c_2(\gamma) + 2(1-\gamma)^{-1}|yz_1^{-1}|^{1-\gamma}, \tag{4.28}$$

а при $\gamma = 1$

$$\int\limits_{-|yz_1^{-1}|}^{|yz_1^{-1}|} \left(t^2+1\right)^{-1/2} dt \leqslant c_3 + 2\ln|yz_1^{-1}|. \tag{4.29}$$

В итоге, из (4.25)–(4.29) при $2|z_1| \leqslant |y|$ получаем

$$\sum_{n_2\in\mathbb{Z}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma} \leqslant C(\Omega,\gamma)|y|^{-\gamma}|z_1|^{1-\gamma}, \quad \gamma > 1; \tag{4.30}$$

$$\sum_{n_2\in\mathbb{Z}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1} \leqslant C(\Omega)|y|^{-1}\ln|yz_1^{-1}|. \tag{4.31}$$

Поскольку по условию леммы $N \geqslant 2\mu$, то при $|2n_1+1| \leqslant |y|N^{-1}$ выполнено $2|z_1| \leqslant |y|$. Мажорируя сумму по n_1 соответствующим интегралом, из (4.30), (4.31) получаем

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-\gamma} \leqslant C(\Omega,\gamma)\mu^{1-\gamma}|y|^{-\gamma} \sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z}\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |2n_1+1|^{1-\gamma} \leqslant \\ C(\Omega,\gamma)\mu^{1-\gamma}|y|^{-\gamma}\left(2 + \int\limits_1^{|y|N^{-1}} s^{1-\gamma}\,ds\right), \quad \gamma > 1,$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1} \leqslant \\ \leqslant C(\Omega)|y|^{-1}\left(2\ln|y\mu^{-1}| + \int\limits_1^{|y|N^{-1}} \ln|y(\mu s)^{-1}|\,ds\right).$$

Отсюда уже легко следуют оценки (4.21)–(4.24). •

3. Следующая лемма является основной для доказательства теоремы 2.1.

Лемма 4.4. *Справедливы оценки*

$$\int_\Omega |P_0(y)u|^2|d\nu| = \int_\Omega |P(y)u|^2|d\nu| \leqslant C(\Omega, |d\nu|, k_2)\|u\|^2,$$
$$u \in L_2(\Omega),\ \ y \in \mathbb{R}, \quad (4.32)$$

$$\lim_{|y|\to\infty}\left(\sup_{0\neq u\in L_2(\Omega)} \|u\|^{-2}\int_\Omega |P_0(y)u|^2|d\nu|\right) = $$
$$= \lim_{|y|\to\infty}\left(\sup_{0\neq u\in L_2(\Omega)} \|u\|^{-2}\int_\Omega |P(y)u|^2|d\nu|\right) = 0, \quad (4.33)$$

$$\int_\Omega |R_0(y)u|^2|d\nu| \leqslant C(\Omega, |d\nu|, k_2)(1+|y|)^{-2}\ln(2+|y|)\|u\|^2,$$
$$u \in L_2(\Omega),\ \ y \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Доказательство. Установим оценку (4.32). Имеем

$$\int_\Omega |P_0(y)u|^2|d\nu| \leqslant 2\int_\Omega |P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)u|^2|d\nu| +$$
$$+ 2\int_\Omega |P_0(y)\mathcal{X}_1(y,N)u|^2|d\nu| := 2(I_1+I_2). \quad (4.35)$$

Для оценки первого интеграла воспользуемся (1.5), (4.15) и (4.18):

$$\begin{gathered} I_1 \leqslant \varepsilon\|\nabla P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)u\|^2 + C(\varepsilon,|d\nu|)\|P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}_1(y,N)u\|^2 \leqslant \\ C(\Omega,k_2)\left(\varepsilon N + C(\varepsilon,|d\nu|)N(1+|y|)^{-2}\right)\|u\|^2, \quad N \geqslant 1. \end{gathered} \quad (4.36)$$

Второй интеграл перепишем в виде

$$I_2 = (\operatorname{mes}\widetilde{\Omega})^{-1}\int_\Omega \Big|\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2\\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\widehat{u}_{\mathbf{n}}\exp(i\langle n_1\mathbf{b}_1+n_2\mathbf{b}_2,\mathbf{x}\rangle)\Big|^2|d\nu| \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}\,\widetilde{\Omega})^{-1}\nu_\Omega \left(\sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2 \\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}|\widehat{u}_{\mathbf{n}}| \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}\,\widetilde{\Omega})^{-1}\nu_\Omega \|u\|^2 \sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2 \\ N|2n_1+1|\leqslant|y|}} |h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались определениями (4.6), (4.9) и обозначением (1.3). Теперь оценка для I_2 следует из (4.24):

$$I_2 \leqslant C(\Omega, |d\nu|) N^{-1} \ln N \, \|u\|^2, \ \ N \geqslant 2\max\{1,\mu\}. \tag{4.37}$$

Подставляя (4.36), (4.37) в (4.35), получаем, при $N \geqslant 2\max\{1,\mu\}$,

$$\int\limits_\Omega |P_0(y)u|^2 |d\nu| \leqslant$$

$$\leqslant C(\Omega, |d\nu|, k_2)\|u\|^2 \left(\varepsilon N + C(\varepsilon, |d\nu|) N (1+|y|)^{-2} + N^{-1}\ln N\right). \tag{4.38}$$

Последняя оценка при фиксированных N и ε доказывает (4.32). Аналогично доказывается оценка (4.34). Нужно лишь вместо (4.15), (4.18) и (4.24) воспользоваться соответственно (4.19), (4.20) и (4.23) при некоторых фиксированных $N \geqslant 2\max\{1,\mu\}$ и $\varepsilon > 0$.

Чтобы доказать (4.33), зададимся произвольным $\delta > 0$. Выберем N настолько большим, чтобы было выполнено

$$N \geqslant 2\max\{1,\mu\}, \quad C(\Omega, |d\nu|, k_2) N^{-1} \ln N < \delta/3,$$

и зафиксируем такое N. Затем выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы было

$$C(\Omega, |d\nu|, k_2) N \varepsilon < \delta/3,$$

и зафиксируем такое ε. Тогда для любого достаточно большого $|y|$ выполнено

$$C(\Omega, |d\nu|, k_2) C(\varepsilon, |d\nu|) N (1+|y|)^{-2} < \delta/3.$$

Отсюда и из (4.38) следует, что существует $y_* = y_*(\delta, \Omega, |d\nu|, k_2)$ такое, что выполнено

$$\int\limits_\Omega |P_0(y)u|^2 |d\nu| \leqslant \delta \|u\|^2$$

при $|y| \geqslant y_*$. Это и доказывает (4.33). $\bullet$

§5. Подготовительный материал к доказательству теоремы 2.1 при $g = \mathbf{1}$

1. В основе доказательства теоремы лежит схема §3. При этом приходится применять две итерации. Первая из них связана с включением потенциала $\mathbf{A}$ при $d\nu = \widetilde{B}d\mathbf{x}$, где $\widetilde{B}$ – некоторая непрерывная Γ-периодическая функция (см. ниже). Этот случай изучен в [2], и в этом параграфе мы воспроизведем соответствующий материал.

В случае $g = \mathbf{1}$ можно, не уменьшая общности, подчинить векторный потенциал $\mathbf{A}$ *условиям калибровки*

$$\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 = 0, \tag{5.1}$$

$$\int_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \tag{5.2}$$

Условие (5.1) понимается в смысле распределений. В [2, §1] пояснено, что условиям (5.1), (5.2) можно удовлетворить, не нарушая условия (1.2).

2. Оператор Паули. Как и в [1, 2, 4], за основу возьмем оператор Паули, причем потенциал $\mathbf{A}$ приблизим подходящим потенциалом $\widetilde{\mathbf{A}}$ класса C^1. Именно, пусть $\widetilde{\mathbf{A}} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ – Γ-периодический потенциал, удовлетворяющий условиям калибровки вида (5.1), (5.2). Фиксируем достаточно малое число $\epsilon > 0$ и выберем $\widetilde{\mathbf{A}}$ так, что

$$\|\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}\|_r \leqslant \epsilon, \quad \|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r \leqslant 2\|\mathbf{A}\|_r. \tag{5.3}$$

Положим $\widetilde{B} = \partial_1 \widetilde{A}_2 - \partial_2 \widetilde{A}_1$. В качестве исходного рассмотрим оператор Паули

$$\widetilde{M} := \widehat{M}(\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}d\mathbf{x}) = (\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{A}})^2 + \widetilde{B}.$$

Соответствующий оператор $\widehat{M}(\mathbf{k}; \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}d\mathbf{x})$, в котором $\mathbf{k}$ задано формулой (2.20), обозначим через $\widetilde{M}(y)$. В силу условий калибровки для $\widetilde{\mathbf{A}}$, *существует вещественная* Γ*-периодическая функция* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$\nabla\varphi = \{\widetilde{A}_2, -\widetilde{A}_1\}, \quad \int_\Omega \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \tag{5.4}$$

В соответствии с обозначениями из (4.4) положим

$$Q_{\pm}(y) := \mathcal{F}^* \mathbf{q}^{(\pm)}(y)\mathcal{F}, \quad \mathbf{q}^{(\pm)}(y) = \{q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)\}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2.$$

Оператор $\widetilde{M}(y)$ допускает факторизацию (см. [2, (3.6)])

$$\widetilde{M}(y) = e^{-\varphi} Q_+(y) e^{2\varphi} Q_-(y) e^{-\varphi}. \tag{5.5}$$

Отметим, что из теоремы вложения и (5.4) вытекает оценка

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant c(r,\Omega)\|\nabla\varphi\|_r = c(r,\Omega)\|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r, \ r > 2. \tag{5.6}$$

Предложение 5.1. *Справедливы представления*

$$\widetilde{R}(y) := \widetilde{M}(y)^{-1} = e^{\varphi} P_0(y) S_0(y) P_0(y) e^{\varphi}, \ y \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

$$\widetilde{R}(y) = e^{\varphi} R_0(y) S_1(y) e^{\varphi}, \ y \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

$$\widetilde{R}(y) = e^{\varphi} S_2(y) R_0(y) e^{\varphi}, \ y \in \mathbb{R}, \tag{5.9}$$

где $R_0(y)$ определен в (4.8), а $P_0(y)$ – в (4.6). Операторы $S_0(y)$, $S_1(y)$, $S_2(y)$ равномерно ограничены

$$\|S_0(y)\| \leqslant C, \ \|S_1(y)\| \leqslant C, \ \|S_2(y)\| \leqslant C, \ C = C(\Omega, \widetilde{\mathbf{A}}, r). \tag{5.10}$$

Доказательство сводится к ссылке на [4, предложение 6.1]. •

Из (5.7)–(5.10) непосредственно вытекают равенства

$$R_0(y) S_1(y) = S_2(y) R_0(y) = P_0(y) S_0(y) P_0(y). \tag{5.11}$$

3. Применим схему §3 к паре операторов $\widetilde{M}(y) = \widehat{M}(y; \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}d\mathbf{x})$ (в роли $\widetilde{\mathcal{H}}$) и $M(y) := \widehat{M}(y; \mathbf{1}, \mathbf{A}, \widetilde{B}d\mathbf{x})$ (в роли $\mathcal{H}$). Соответствующие рассмотрения проведены в [2, §6] и основаны на факторизации (5.5). При этом $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{G} = (L_2(\Omega))^4$; в качестве $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}$ выступают операторы G_0, G, заданные формулами

$$G_0 = \mathrm{col}(D_1 + \mu, D_2 + k_2, iy, \Phi), \tag{5.12}$$

где функция Φ допускает оценку

$$2|\Phi(\mathbf{x})| \leqslant |\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})|; \tag{5.13}$$

$$G = 2\,\mathrm{col}\,(\widetilde{A}_1 - A_1, \widetilde{A}_2 - A_2, \widetilde{A}_1 - A_1, |\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}|). \tag{5.14}$$

Как показано в [2, §6], при достаточно малом ϵ (см. (5.3)) выполнены условия предложения 3.1, и справедливо представление

$$R(y) := M(y)^{-1} = \widetilde{R}(y) - (G\widetilde{R}(y)^*)^*\widetilde{Z}(y)(G_0\widetilde{R}(y)), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

причем

$$\|\widetilde{Z}(y)\| \leqslant 2, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{5.16}$$

а также выполнена оценка

$$\|R(y)\| \leqslant C(\mu + |y|)^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \ C = C(\Omega, \mathbf{A}, r). \tag{5.17}$$

Подчеркнем, что *число* ϵ *и потенциал* $\widetilde{\mathbf{A}}$, *удовлетворяющий* (5.3), *выбраны по* $\mathbf{A}$ *и во всем дальнейшем фиксированы.* Поэтому оценочные постоянные, зависящие от $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{B}$, в конечном счете зависят от $\mathbf{A}$.

Нам потребуются также следующие оценки, полученные в [2, 4].

Предложение 5.2. *Пусть* $F \in L_r(\Omega)$, $r > 2$. *Пусть* $P_0(y)$, $P(y)$ – *операторы* (4.6), (4.7); G – *оператор* (5.14), *а* φ *определено в* (5.4). *Тогда справедливы оценки*

$$\|F\widetilde{R}(y)\| \leqslant C(\mu + |y|)^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \ C = C(\Omega, \mathbf{A}, F, r), \tag{5.18}$$

$$\|Ge^{\varphi}P_0(y)\| = \|Ge^{\varphi}P(y)\| \leqslant C(\mu + |y|)^{-\kappa}, \ y \in \mathbb{R}, \ C = C(\Omega, \mathbf{A}, r), \tag{5.19}$$

$$\|Fe^{\varphi}P_0(y)\| = \|Fe^{\varphi}P(y)\| \leqslant C(\mu + |y|)^{-\kappa}, \ y \in \mathbb{R}, \ C = C(\Omega, \mathbf{A}, F, r), \tag{5.20}$$

$$\kappa = 1 - 2r^{-1} \ \ \text{\textit{при}} \ \ 2 < r < 4, \quad \kappa = 1/2 \ \ \text{\textit{при}} \ \ r \geqslant 4. \tag{5.21}$$

Доказательство сводится к ссылкам на формулы (6.25) из [2] и (6.41), (6.42) из [4]. •

§6. Доказательство теоремы 2.1 при $g = \mathbf{1}$

1. Теперь мы применим схему §3 к паре операторов

$$M(y) = \widehat{M}(y; \mathbf{1}, \mathbf{A}, \widetilde{B}d\mathbf{x}), \quad \widehat{M}(y) = \widehat{M}(y; \mathbf{1}, \mathbf{A}, d\nu). \tag{6.1}$$

Из (5.7) и (5.15) следует факторизация

$$R(y) = e^{\varphi}P_0(y)\widetilde{P}(y)^*, \tag{6.2}$$

$$\widetilde{P}(y) := \Big(e^{\varphi} P_0(y) - (G_0 \widetilde{R}(y))^* \widetilde{Z}(y)^* (G e^{\varphi} P_0(y))\Big)\, S_0(y)^*, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Обозначим

$$d\widetilde{\nu} := d\nu - \widetilde{B} d\mathbf{x}. \quad (6.4)$$

Заряд (6.4), очевидно, удовлетворяет условиям вида (1.4), (1.5) одновременно с $d\nu$. Имеет место равенство

$$\widehat{m}(y; \mathbf{1}, \mathbf{A}, d\nu)[u,u] = \widehat{m}(y; \mathbf{1}, \mathbf{A}, \widetilde{B} d\mathbf{x})[u,u] + \int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu}(\mathbf{x}), \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \quad (6.5)$$

Представим заряд $d\widetilde{\nu}$ как разность двух неотрицательных зарядов (мер)

$$d\widetilde{\nu} = d\widetilde{\nu}_+ - d\widetilde{\nu}_-.$$

Здесь

$$2d\widetilde{\nu}_+ := |d\widetilde{\nu}| + d\widetilde{\nu}, \quad 2d\widetilde{\nu}_- := |d\widetilde{\nu}| - d\widetilde{\nu}.$$

Тогда,

$$\int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu} = \int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu}_+ - \int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu}_-, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (6.6)$$

В силу (1.5) неотрицательные формы $\int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu}_\pm$, заданные на $H^1(\Omega)$, ограничены. Следовательно, в $H^1(\Omega)$ существуют единственные неотрицательные операторы $X_\pm$ такие, что

$$X_\pm \in \mathcal{B}(H^1(\Omega)); \quad \int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu}_\pm = \|X_\pm u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (6.7)$$

Операторы $X_\pm$ могут быть рассмотрены как плотно определенные операторы из $L_2(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$ с областью определения $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Перепишем форму (6.6) в виде

$$\int_\Omega |u|^2 d\widetilde{\nu} = \left(\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} u, \begin{pmatrix} X_+ \\ -X_- \end{pmatrix} u \right)_{H^1(\Omega)\oplus H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (6.8)$$

Для пары операторов (6.1) в качестве основного и вспомогательного пространства выбираем $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$ и $\mathfrak{G} = \big(H^1(\Omega)\big)^2$; роль операторов $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}$ играют операторы $e^{\varphi} P_0(y)$, $\widetilde{P}(y)$ (см. (6.2), (6.3));

роль операторов $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}$ играют операторы

$$\widehat{G}_0 := \begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix}, \ \widehat{G} := \begin{pmatrix} X_+ \\ -X_- \end{pmatrix} : \ L_2(\Omega) \to \left(H^1(\Omega)\right)^2, \qquad \operatorname{Dom} \widehat{G}_0 = \operatorname{Dom} \widehat{G} = H^1(\Omega), \tag{6.9}$$

где операторы $X_\pm$ определены в (6.7). Заметим, что

$$\|\widehat{G}_0 v\|^2_{(H^1(\Omega))^2} = \|\widehat{G} v\|^2_{(H^1(\Omega))^2} = \int\limits_\Omega |v|^2 |d\widetilde{\nu}|, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{6.10}$$

Соотношение (3.1) соответствует равенству (6.5) (с учетом (6.8), (6.9)). Из (4.6), (6.3) и гладкости функции φ вытекает, что $\operatorname{Ran} e^\varphi P_0(y) \subset H^1(\Omega)$, $\operatorname{Ran} \widetilde{P}(y) \subset H^1(\Omega)$, и, следовательно, операторы $\widehat{G}_0 e^\varphi P_0(y)$, $\widehat{G}\widetilde{P}(y)$ корректно определены. Кроме того, как показано ниже (см. (6.11), (6.21)), имеют место включения

$$\widehat{G}_0 e^\varphi P_0(y) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}), \quad \widehat{G}\widetilde{P}(y) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}).$$

Тем самым, для пары операторов (6.1) выполнены условия i–iii предложения 3.1. Для проверки условия iv нам понадобятся следующие леммы 6.1–6.3, в которых оцениваются операторные нормы в $\mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$.

Лемма 6.1. *Пусть* $P_0(y)$, $R_0(y)$ – *операторы* (4.6), (4.8)*;* $\widehat{G}_0$, $\widehat{G}$ – *операторы* (6.9)*, а* φ *определено в* (5.4)*. Тогда справедливы оценки*

$$\|\widehat{G}_0 e^\varphi P_0(y)\| = \|\widehat{G} e^\varphi P_0(y)\| \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{6.11}$$

$$\lim_{|y|\to\infty} \|\widehat{G}_0 e^\varphi P_0(y)\| = \lim_{|y|\to\infty} \|\widehat{G} e^\varphi P_0(y)\| = 0, \tag{6.12}$$

$$\|\widehat{G}_0 e^\varphi R_0(y)\| = \|\widehat{G} e^\varphi R_0(y)\| \leqslant \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r)(1+|y|)^{-1}(\ln(2+|y|))^{1/2}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Доказательство сводится к ссылке на лемму 4.4, примененную к $d\widetilde{\nu}$, и формулы (5.6), (6.10). •

Лемма 6.2. *Пусть* $F \in L_r(\Omega)$, $r > 2$. *Тогда справедливы оценки*

$$\|\widehat{G}_0 \widetilde{R}(y)\| = \|\widehat{G}\widetilde{R}(y)\| \leqslant \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r)(1+|y|)^{-1}(\ln(2+|y|))^{1/2}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{6.14}$$

$$\|\widehat{G}_0(F\widetilde{R}(y))^*\| = \|\widehat{G}(F\widetilde{R}(y))^*\| \leqslant \\ \leqslant C(\Omega, F, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r)(1+|y|)^{-\kappa}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (6.15)$$

$$\|\widehat{G}_0(D_1\widetilde{R}(y))^*\| = \|\widehat{G}(D_1\widetilde{R}(y))^*\| \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

$$\|\widehat{G}_0(D_2\widetilde{R}(y))^*\| = \|\widehat{G}(D_2\widetilde{R}(y))^*\| \leqslant \\ \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r)(\ln(2+|y|))^{1/2}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (6.17)$$

где κ *– показатель* (5.21).

Доказательство. Оценка (6.14) следует из (5.6), (5.8), (5.10) и (6.13). Оценка (6.15) – из (5.7), (5.10), (5.20) и (6.11). Чтобы доказать (6.16), (6.17), заметим, что, в силу (5.4), имеют место равенства

$$D_1 e^{\varphi} = e^{\varphi}(D_1 - i\widetilde{A}_2), \quad D_2 e^{\varphi} = e^{\varphi}(D_2 + i\widetilde{A}_1). \qquad (6.18)$$

Отсюда и из (5.7) имеем

$$\|\widehat{G}_0(D_1\widetilde{R}(y))^*\| = \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* (D_1(y) e^{\varphi} P_0(y))^*\| \leqslant$$

$$\|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y)\| \|S_0(y)\| \left(\|e^{\varphi} D_1(y) P_0(y)\| + \|e^{\varphi} \widetilde{A}_2 P_0(y)\| \right).$$

Множители перед скобкой оцениваются на основании (5.10), (6.11). Оценка для первого слагаемого в скобках следует из (4.16) и (5.6). Наконец, второе слагаемое оценено в (5.20). Тем самым, доказана оценка (6.16). Для доказательства (6.17) запишем (см. (5.7), (6.18))

$$\|\widehat{G}_0(D_2\widetilde{R}(y))^*\| \leqslant \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* (e^{\varphi} D_2 P_0(y))^*\| + \\ + \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* (e^{\varphi} \widetilde{A}_1 P_0(y))^*\|.$$

Второе слагаемое оценивается так же, как и выше, с убыванием по y. Для оценки первого слагаемого используем операторы

(4.11), (4.12). Имеем

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* (e^{\varphi} D_2 P_0(y))^*\| \leqslant \\
&\|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* (e^{\varphi} D_2 \widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2) P_0(y))^*\| + \\
&\|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* (e^{\varphi} D_2 \mathcal{X}_2(y,k_2) P_0(y))^*\| \leqslant \\
&\exp(\|\varphi\|_\infty) \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y)\| \|S_0(y)\| \|D_2 \widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2) P_0(y)\| + \\
&\exp(\|\varphi\|_\infty) \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y) S_0(y)^* P_0(y)\| \|D_2 \mathcal{X}_2(y,k_2)\| \leqslant \\
&\exp(\|\varphi\|_\infty) \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y)\| \|S_0(y)\| \|D_2 \widetilde{\mathcal{X}}_2(y,k_2) P_0(y)\| + \\
&\exp(\|\varphi\|_\infty) \|\widehat{G}_0 e^{\varphi} R_0(y)^*\| \|S_2(y)^*\| \|D_2 \mathcal{X}_2(y,k_2)\|,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

где в последнем переходе мы воспользовались равенством (5.11). Оценка для первого слагаемого в правой части (6.19) следует из (4.13), (5.6), (5.10) и (6.11); для второго – из (4.14), (5.6), (5.10), (6.13) и равенства $R_0(y)^* = R_0(-y)$. Это приводит к (6.17). •

Следствием леммы 6.2 и определения (5.12) (см. также (5.13)) является следующая оценка

$$\begin{aligned}
\|\widehat{G}_0 (G_0 \widetilde{R}(y))^*\| = \|\widehat{G} (G_0 \widetilde{R}(y))^*\| \leqslant \\
\leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r) (\ln(2+|y|))^{1/2}, \quad y \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Лемма 6.3. *Пусть* $\widetilde{P}(y)$ *– оператор* (6.3), *а* $\widehat{G}_0$, $\widehat{G}$ *– операторы* (6.9). *Тогда справедливы соотношения*

$$\|\widehat{G}_0 \widetilde{P}(y)\| = \|\widehat{G} \widetilde{P}(y)\| \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{6.21}$$

$$\lim_{|y|\to\infty} \|\widehat{G}_0 \widetilde{P}(y)\| = \lim_{|y|\to\infty} \|\widehat{G} \widetilde{P}(y)\| = 0. \tag{6.22}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (6.3). Имеем

$$\widehat{G}_0 \widetilde{P}(y) = (\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y)) S_0(y)^* - \widehat{G}_0 (G_0 \widetilde{R}(y))^* \widetilde{Z}(y)^* (G e^{\varphi} P_0(y)) S_0(y)^*. \tag{6.23}$$

Первое слагаемое в (6.23) оценивается с помощью (5.10) и (6.11), (6.12); второе – с помощью (5.10), (5.16), (5.19) и (6.20). •

Проверим теперь условие iv предложения 3.1 применительно к паре операторов (6.1). Для этого нам требуется оценить оператор

$$\widehat{Y}(y) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}, \qquad \widehat{Y}(y) := (\widehat{G}_0 e^{\varphi} P_0(y)) (\widehat{G} \widetilde{P}(y))^*.$$

Из (6.11), (6.12) и (6.21), (6.22) получаем

$$\|\widehat{Y}(y)\| \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r), \; y \in \mathbb{R}; \qquad \lim_{|y|\to\infty} \|\widehat{Y}(y)\| = 0. \tag{6.24}$$

Из (6.24) видно, что при достаточно большом y_1 справедливо неравенство

$$2\|\widehat{Y}(y)\| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad |y| \geqslant y_1 = y_1(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r).$$

Тогда при $|y| \geqslant y_1$ выполнено условие iv для пары операторов (6.1):

$$\widehat{Z}(y) := (I + \widehat{Y}(y))^{-1}, \quad \|\widehat{Z}(y)\| \leqslant 2 \quad \text{при} \quad |y| \geqslant y_1(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r). \tag{6.25}$$

Легко понять, что y_1 можно считать не зависящим от k_2 на всяком ограниченном подмножестве в $\mathbb{R}$. В силу предложения 3.1 справедливо представление

$$\widehat{R}(y) := \widehat{M}(y)^{-1} = R(y) - (\widehat{G}R(y)^*)^* \widehat{Z}(y)(\widehat{G}_0 R(y)), \quad |y| \geqslant y_1. \tag{6.26}$$

2. Остается доказать оценку вида (2.21) для оператора (6.26). Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 6.4. *Справедлива оценка*

$$\|\widehat{G}_0 R(y)^*\| = \|\widehat{G}R(y)^*\| \leqslant$$
$$\leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r)(1 + |y|)^{-1}(\ln(2 + |y|))^{1/2}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.27}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (5.15) для $R(y)$. Тогда

$$\widehat{G}_0 R(y)^* = \widehat{G}_0 \widetilde{R}(y)^* - \widehat{G}_0(G_0 \widetilde{R}(y))^* \widetilde{Z}(y)^*(G\widetilde{R}(y)^*). \tag{6.28}$$

Отметим равенство $\widetilde{R}(y)^* = \widetilde{R}(-y)$. Оценка для первого слагаемого в (6.28) вытекает из (6.14), для второго – из (5.14), (5.16), (5.18) и (6.20). $\bullet$

Теперь все готово для оценки оператора (6.26). Напомним, что $R(y)^* = R(-y)$. В силу (5.17), (6.25) и (6.27) получаем

$$\|\widehat{R}(y)\| \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, r)(\mu + |y|)^{-1} +$$
$$+ C(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r)(1 + |y|)^{-2} \ln(2 + |y|), \quad |y| \geqslant y_1.$$

Таким образом, при достаточно большом y_0 выполнено неравенство

$$\|\widehat{R}(y)\| \leqslant C(\Omega, \mathbf{A}, r)(\mu + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y_0 = y_0(\Omega, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2, r).$$

Если k_2 пробегает ограниченное подмножество в $\mathbb{R}$, то y_0 можно выбрать не зависящим от k_2. Это завершает доказательство теоремы 2.1 в случае $g = \mathbf{1}$.

§7. Доказательство теоремы 1.1

В настоящем параграфе мы завершим доказательство теоремы 2.1 и выведем из нее теорему 1.1. При этом в существенном мы будем следовать изложению [4, §8].

1. Завершение доказательства теоремы 2.1. Остается включить скалярную метрику. Прежде всего рассмотрим случай $g = a$, где a – постоянная положительная матрица. Тогда линейной заменой переменных можно привести дело к случаю $g = \mathbf{1}$; решетка периодов при этом, вообще говоря, изменится. Оценка вида (2.21) переносится со случая $g = \mathbf{1}$ на оператор с постоянной метрикой:

$$\left\| \left(\widehat{M}(y; a, \mathbf{A}, d\nu)\right)^{-1} \right\| \leqslant C'(\mu + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y', \qquad y' = y'(\Omega, a, \mathbf{A}, |d\nu|, k_2), \quad C' = C'(\Omega, a, \mathbf{A}); \tag{7.1}$$

здесь постоянные C', y' зависят также от r, что опущено в обозначениях.

Пусть теперь метрика имеет вид (1.9) и выполнены условия (1.10), (1.11) и (1.13). Тогда функции ω, ω^{-1} – мультипликаторы в $H^1(\mathbb{R}^2)$ и в $\widetilde{H}^1(\Omega)$:

$$\omega H^1(\mathbb{R}^2) = H^1(\mathbb{R}^2), \quad \omega^{-1} H^1(\mathbb{R}^2) = H^1(\mathbb{R}^2),$$
$$\omega \widetilde{H}^1(\Omega) = \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \omega^{-1} \widetilde{H}^1(\Omega) = \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Справедливы соотношения (ср. [3, (6.11)])

$$\widehat{m}(\omega^2 a, \mathbf{A}, d\nu)[\omega^{-1}u, \omega^{-1}u] = \widehat{m}(a, \mathbf{A}, \omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x})[u, u], \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2); \tag{7.2}$$

здесь V_ω определен в (1.12). Для порожденных этими формами самосопряженных в $L_2(\mathbb{R}^2)$ операторов соотношение (7.2) означает, что

$$\omega^{-1}\widehat{M}(\omega^2 a, \mathbf{A}, d\nu)\omega^{-1} = \widehat{M}(a, \mathbf{A}, \omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x}).$$

Для соответствующих m-секториальных операторов вида (2.8) также справедливо равенство

$$\omega^{-1}\widehat{M}(\mathbf{k}; \omega^2 a, \mathbf{A}, d\nu)\omega^{-1} = \widehat{M}(\mathbf{k}; a, \mathbf{A}, \omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x}). \qquad (7.3)$$

Отметим, что, в силу (1.11) и (1.13), для заряда $\omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x}$ выполнено условие аналогичное (1.5). Если для $\mathbf{k}$ выполнено (2.20), то в силу (7.1) оператор в правой части (7.3) обратим при $|y| \geqslant y'$. Тогда и оператор в левой части (7.3) обратим и

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\widehat{M}(y; \omega^2 a, \mathbf{A}, d\nu)\right)^{-1} \right\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|\omega^{-1}\|_\infty^2 \left\| \left(\widehat{M}(y; a, \mathbf{A}, \omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x})\right)^{-1} \right\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \omega_0^{-2} C'(\mu + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y', \\
&y' = y'(\Omega, a, \mathbf{A}, |\omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x}|, k_2), \quad C' = C'(\Omega, a, \mathbf{A}). \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Из (7.4) вытекает (2.21) при

$$y_0 = y'(\Omega, a, \mathbf{A}, |\omega^{-2}d\nu + V_\omega d\mathbf{x}|, k_2), \quad C_0 = \omega_0^{-2} C'(\Omega, a, \mathbf{A}). \quad \bullet$$

2. *Утверждение теоремы* 1.1 *в случае скалярной метрики вида* (1.9) *выводится из теоремы* 2.1 *стандартным путем* (см. [3, §2]). В общем случае доказательство теоремы 1.1 получается преобразованием оператора к оператору со скалярной метрикой, но при этом преобразованный оператор действует в весовом L_2. Поэтому приходится опираться на несколько более общее утверждение, нежели теорема 1.1 в случае метрики (1.9). Обсудим нужное обобщение (ср. [3, §2, п. 8]).

Пусть ψ – Γ-периодическая измеримая функция и

$$0 < \psi_0 \leqslant \psi(\mathbf{x}) \leqslant \psi_1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \qquad (7.5)$$

Наряду с формой $\widehat{m} = \widehat{m}(\omega^2 a, \mathbf{A}, d\nu)$, определенной в (1.16), рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^2)$ форму $\widehat{m}(\psi) = \widehat{m}(\omega^2 a, \mathbf{A}, d\nu, \psi)$, определенную равенством

$$\widehat{m}(\psi)[u, u] = \widehat{m}[\psi^{-1}u, \psi^{-1}u], \quad u \in \psi H^1(\mathbb{R}^2). \qquad (7.6)$$

Форма (7.6) полуограничена снизу и замкнута. Она порождает самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор

$$\begin{gathered}\widehat{M}(\psi)=\widehat{M}(\omega^2 a,\mathbf{A},d\nu,\psi):=\psi^{-1}\widehat{M}(\omega^2 a,\mathbf{A},d\nu)\psi^{-1},\\ \operatorname{Dom}\widehat{M}(\psi)=\psi\operatorname{Dom}\widehat{M}(\omega^2 a,\mathbf{A},d\nu).\end{gathered} \tag{7.7}$$

Далее, с помощью формы (2.16) определим в $L_2(\Omega)$ форму $\widehat{m}(\mathbf{k};\psi)=\widehat{m}(\mathbf{k};\omega^2 a,\mathbf{A},d\nu,\psi)$ по аналогии с (7.6):

$$\widehat{m}(\mathbf{k};\psi)[u,u]:=\widehat{m}(\mathbf{k})[\psi^{-1}u,\psi^{-1}u],\quad u\in\psi\widetilde{H}^1(\Omega),\quad \mathbf{k}\in\mathbb{C}^2. \tag{7.8}$$

Через $\widehat{M}(\mathbf{k};\psi)=\widehat{M}(\mathbf{k};\omega^2 a,\mathbf{A},d\nu,\psi)$ обозначим m-секториальный оператор, порожденный формой (7.8). Очевидно,

$$\widehat{M}(\mathbf{k};\psi)=\psi^{-1}\widehat{M}(\mathbf{k})\psi^{-1},\quad \operatorname{Dom}\widehat{M}(\mathbf{k};\psi)=\psi\operatorname{Dom}\widehat{M}(\mathbf{k}),\quad \mathbf{k}\in\mathbb{C}^2. \tag{7.9}$$

Семейство (7.9) самосопряженное.

Ясно, что справедливо разложение оператора (7.7) в прямой интеграл, аналогичное представлению (2.15). Теорема 1.1 в случае скалярной метрики допускает следующее обобщение.

Теорема 7.1. *Пусть потенциал* $\mathbf{A}$ *и заряд* $d\nu$ *удовлетворяют условиям* (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), *а метрика* g – *условиям* (1.9)–(1.11), (1.13). *Пусть* ψ – *измеримая* Γ*-периодическая функция, удовлетворяющая* (7.5). *Тогда спектр оператора* (7.7), *порожденного формой* (7.6), *абсолютно непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{k}$ определено в (2.20); тогда будем писать $\widehat{M}(\mathbf{k};\psi)=:\widehat{M}(y;\psi)$. Общая часть схемы Томаса остается в силе (см. [3, §2, п. 8]) для операторов $\widehat{M}(\psi)$, $\widehat{M}(\mathbf{k};\psi)$. В частности, абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{M}(\psi)$ вытекает из оценки

$$\begin{gathered}\|\widehat{M}(y;\psi)^{-1}\|\leqslant\psi_1^2 C_0(\mu+|y|)^{-1},\quad |y|\geqslant y_0,\\ y_0=y_0(\Omega,\omega^2 a,\mathbf{A},|d\nu|,k_2),\quad C_0=C_0(\Omega,\omega^2 a,\mathbf{A}).\end{gathered} \tag{7.10}$$

В свою очередь, (7.10) сразу следует из (2.21) и (7.5), (7.9). •

3. Преобразование оператора (1.24) **к случаю скалярной метрики.** Мы опишем теперь преобразование координат в $\mathbb{R}^2$, которое приведет оператор $\widehat{M}$, определенный в (1.24), к оператору вида (7.7), но для другой решетки периодов и при измененных $\mathbf{A}$,

$d\nu$. Хорошо известно (см., например, [15, теоремы 2.2–2.5]), что существуют *локальные* преобразования координат, приводящие подынтегральное выражение в (1.15) к случаю *скалярной* метрики вида $\omega^2(\mathbf{x})\mathbf{1}$. При этом гладкость замены координат и множителя ω определяются гладкостью исходной метрики g. Функции, определяющие новые координаты, являются решениями уравнений Бельтрами. В *периодическом случае* локальные преобразования координат могут быть "склеены" в *глобальное преобразование, сохраняющее периодичность*, но меняющее решетку Γ. Соображения, позволяющие провести такую "склейку", имеют топологический характер. Они изложены в [7], и мы сейчас опишем результат в нужном нам виде. При этом соответствующие характеристики гладкости определяются *локальными* свойствами решений уравнений Бельтрами в зависимости от гладкости g; локальные результаты мы заимствуем из [15]. Справедлива

Теорема 7.2. *Пусть Γ-периодическая (2×2)-матрица-функция $g(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (1.7) и при каком-либо η*

$$g \in C^\eta(\mathbb{R}^2), \quad 0 < \eta < 1.$$

Тогда существует взаимно-однозначное отображение $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ со следующими свойствами.

1° . $\Psi \in C^{1+\eta}(\mathbb{R}^2)$, $\det \Psi'(\mathbf{x}) \neq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, *где* $\Psi'(\mathbf{x})$ – *матрица Якоби отображения* Ψ.

2° . *Для некоторого базиса* $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$ *в* $\mathbb{R}^2$ *выполнено*

$$\Psi(0) = 0; \quad \Psi(\mathbf{x} + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2) = \Psi(\mathbf{x}) + n_1\mathbf{a}_1^* + n_2\mathbf{a}_2^*,$$
$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, преобразование координат $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$ переводит решетку Γ в решетку

$$\Gamma_* := \{\boldsymbol{\xi} = n_1\mathbf{a}_1^* + n_2\mathbf{a}_2^*, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}. \tag{7.11}$$

3°. *Выполнено соотношение*

$$|\det \Psi'(\mathbf{x})|^{-1}\Psi'(\mathbf{x})g(\mathbf{x})(\Psi'(\mathbf{x}))^t = \omega_*^2(\boldsymbol{\xi})\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}), \tag{7.12}$$

где $\omega_*(\boldsymbol{\xi})$ – вещественная Γ_*-периодическая функция, такая что $\omega_* \in C^\eta(\mathbb{R}^2)$,

$$0 < \omega_0^* \leqslant \omega_*(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \omega_1^* < \infty.$$

4°. *Если для матрицы g выполнено условие*

$$g \in C^{m+\eta}(\mathbb{R}^2), \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < \eta < 1,$$

то $\Psi \in C^{m+1+\eta}(\mathbb{R}^2)$, $\omega_* \in C^{m+\eta}(\mathbb{R}^2)$.

5°. *Если выполнено условие*

$$g \in \widetilde{W}_r^m(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}, \quad r > 2, \tag{7.13}$$

то

$$\Psi \in W_{r,\,\mathrm{loc}}^{m+1}(\mathbb{R}^2), \quad \omega_* \in \widetilde{W}_r^m(\Omega_*), \tag{7.14}$$

где Ω_* *– элементарная ячейка решетки* (7.11).

В соответствии с (1.8), мы будем считать выполненным условие (7.13) при $m = 2$. Тогда для определенной в (7.12) функции ω_* выполнено (7.14) при $m = 2$. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что ω_* удовлетворяет условию (1.13) при $a = \mathbf{1}$.

Введем обозначения

$$\psi_*(\boldsymbol{\xi}) := |\det \Psi'(\mathbf{x})|^{-1/2}, \quad \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\xi}) := (\Psi'(\mathbf{x})^t)^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad d\nu_*(\boldsymbol{\xi}) := d\nu(\mathbf{x}),$$

где $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$. В силу (1.2), (1.5) и свойств отображения Ψ для $\mathbf{A}_*$, $d\nu_*$ также выполнены условия (1.2), (1.5) (относительно решетки Γ_*), а для ψ_* выполнено (7.5). При этом $\mathbf{A}_*$, $d\nu_*$, ψ_* оказываются Γ_*-периодическими. В силу (7.12), под действием преобразования Ψ квадратичная форма (1.16) преобразуется к виду

$$\widehat{m}[u,u] = \int \omega_*^2(\boldsymbol{\xi})|(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\xi}))\psi_*^{-1}v|^2 d\boldsymbol{\xi} + \int |\psi_*^{-1}v|^2 d\nu_*(\boldsymbol{\xi}),$$
$$u(\mathbf{x}) = \psi_*(\boldsymbol{\xi})^{-1}v(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}).$$

Одновременно

$$\int |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \int |v(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}.$$

Это показывает, что оператор $\widehat{M} = \widehat{M}(g, \mathbf{A}, d\nu)$ унитарно эквивалентен оператору

$$\widehat{M}_*(\psi_*) = \psi_*^{-1}\widehat{M}_*(\omega_*^2\mathbf{1}, \mathbf{A}_*, d\nu_*)\psi_*^{-1}. \tag{7.15}$$

В силу теоремы 7.1 спектр оператора (7.15) абсолютно непрерывен. Вместе с ним абсолютно непрерывен и спектр оператора $\widehat{M}$. Этим завершено доказательство теоремы 1.1.

Литература

1. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен.* Алгебра и Анализ, **9** (1997), вып. 1, 32–48.
2. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом.* Алгебра и Анализ, **10** (1998), вып. 4, 1–36.
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности.* Алгебра и Анализ, **11** (1999), вып. 2, 1–40.
4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых.* Алгебра и Анализ, **12** (2000), вып. 6. Preprint ESI nu. 934 (2000).
5. Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии.* М., Мир, 1990.
6. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М., Мир, 1972.
7. P. Kuchment, S. Levendorskii, *On the spectra of periodic elliptic operators.* Preprint mp_arc 00–388 (2000), http://www.ma.utexas.edu/mp_arc.
8. A. Morame, *Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electromagnetic potential.* J. Phys. A: Math. Gen., **31** (1998), 7593–7601.
9. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
10. Z. Shen, *Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class.* Preprint (2000).
11. A. V. Sobolev, *Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator.* Invent. Math., **137(1)** (1999), 85–112.
12. В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Пространства Соболева.* — В кн.: “Избранные главы анализа и высшей алгебры”. Изд-во Ленингр. университета, 1981, 129–197.
13. T. Suslina, *Absolute continuity of the spectrum of periodic operators of mathematical physics.* Journées Équations aux dérivées partielles, Nantes, 5-9 Juin 2000.
14. L. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal.* Comm. Math. Phys., **33** (1973), 335–343.
15. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции.* Гос. изд-во физико-матем. литературы, Москва, 1959.

Shterenberg R. G. Absolute continuity of a two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with measure derivative like potential.

A two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with variable metric is considered. Electric potential is suggested to be a distribution formally given by the expression $\frac{d\nu}{d\mathbf{x}}$, where $d\nu$ is a periodic measure with locally finite variation. We assume that the perturbation generated by electric potential is strongly subordinate (in the sense of forms) to the free operator. Under this natural assumption, we prove the absolute continuity of the spectrum of the Schrödinger operator.

Санкт-Петербургский
государственный университет
e-mail: roman@RS3759.spb.edu

Поступило 23 октября 2000 г.