Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

**В. Г. Осмоловский**

# ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРА СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВУХФАЗОВОЙ СРЕДЫ ОТ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ

**Посвящается памяти**
**Александра Васильевича Иванова**

## §1. Постановка задачи и формулировка результатов

Упругая среда, занимающая область $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$ с липшицевой границей, характеризуется полем смещений – вектор-функцией $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$, $x \in \Omega$, и плотностью энергии деформации $F(M, u, x)$, где $M \in R^{m\times m}$ – $(m \times m)$-матрица, $u \in R^m$, $x \in \Omega$. Предположим, что граница области $\Omega$ подвержена силовому воздействию потенциального силового поля с плотностью потенциала $f(u, x)$, $u \in R^m$, $x \in \partial\Omega$. Пусть $\dot{u} = \dot{u}(x)$ – матрица с компонентами $\dot{u}_{ij} = u^i_{x_j}$, $i, j = 1, \dots, m$. Энергию деформации, соответствующую полю смещений $u(x)$, определим равенством

$$I[u] = \int\limits_{\Omega} F(\dot{u}(x), u(x), x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(u(x), x)\, dS. \qquad (1.1)$$

Состоянием равновесия упругой среды назовем поле смещений $\hat{u}(x)$, доставляющее глобальный минимум функционалу (1.1) среди всех допустимых векторных полей $u(x)$. В дальнейшем будем рассматривать лишь поля смещений, равные фиксированному значению на части $\Gamma$ границы области $\Omega$:

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad \Gamma \subset \partial\Omega.$$

Для описания допустимых полей смещений фиксируем число $p \in (1, \infty)$ и определим функции $\beta(t)$, $\beta_0(t)$, $t \geqslant 0$ и $\alpha(x)$, $x \in \Omega$,

$\alpha_0(x)$, $x \in \partial\Omega$ по следующему правилу:

при $\quad m \geqslant p \qquad \beta(t) = t^r, \quad \beta_0(t) = t^s,$

$r \in [1, mp/(m-p)) \quad s \in [1, (m-1)p/(m-p))$ при $\quad m > p,$

$r, s \in [1, \infty)$ при $\quad m = p,$

при $\quad m < p \qquad \beta(t) \geqslant 0, \quad \beta_0(t) \geqslant 0$

– непрерывные, монотонно растущие функции,

$0 \leqslant \alpha(x) \in L_1(\Omega), \quad 0 \leqslant \alpha_0 \in L_1(\partial\Omega).$

Знаком $|\cdot|$ будем обозначать как модуль векторной или скалярной величины, так и норму матрицы. Напомним, что для функций $u \in W_p^1(\Omega, R^m)$, $u(x) = 0$ при $x \in \Gamma$, где измеримое множество $\Gamma \subset \partial\Omega$ имеет пложительную $(m-1)$-меру, выполняется неравенство Корна

$$\int\limits_\Omega (|\dot u|^p + |u|^p)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} |u|^p\, dS \leqslant \lambda(\Omega, \Gamma) \int\limits_\Omega |\xi[u]|^p\, dx,$$

$$\xi[u] = \frac{1}{2}(\dot u + \dot u^*).$$

Предположим, что функции $F(M, u, x)$ и $f(u, x)$ удовлетворяют следующим требованиям

(1) функция $F(M, u, x)$ непрерывна по совокупности переменных $M \in R^{m\times m}$, $u \in R^m$ при почти всех $x \in \Omega$, измерима по $x$ при всех $M$, $u$ и удовлетворяет неравенству

$$|F(M, u, x)| \leqslant C[\,|M|^p + \beta(|u|)\,] + \alpha(x);$$

(2) производные $F_M(M, u, x)$ существуют при всех $M \in R^{m\times m}$, $u \in R^m$ и почти всех $x \in \Omega$, непрерывны по совокупности переменных $M$, $u$ при почти всех $x$, измеримы по $x$ при всех $M$, $u$ и удовлетворяют оценке

$$|\,F_M(M, u, x)\,| \leqslant C[\,|M|^{p-1} + \beta(|u|)^{1/p'}\,] + \alpha(x)^{1/p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1;$$

(3) справедливо неравенство

$$F(M, u, x) \geqslant C^{-1}(\,|M + M^*|^p - \lambda|u|^p\,) - \alpha(x), \quad 0 \leqslant \lambda < 2^p\lambda^{-1}(\Omega, \Gamma);$$

(4) функция $F(M, u, x)$ выпукла по компонентам матрицы $M$ при всех $u \in R^m$ и почти всех $x \in \Omega$.

(5) функция $f(u,x)$ непрерывна по $u \in R^m$ при почти всех $x \in \partial\Omega$, измерима по $x$ при всех $u$ и удовлетворяет неравенству
$$|f(u,x)| \leqslant C\beta_0(|u|) + \alpha_0(x);$$

(6) для всех $u$ и почти всех $x$ выполняется оценка
$$f(u,x) \geqslant -C^{-1}\lambda|u|^p - \alpha_0(x), \quad 0 \leqslant \lambda < 2^p\lambda^{-1}(\Omega,\Gamma).$$

Фиксируем функцию $u_0 \in W_p^1(\Omega, R^m)$ и измеримое подмножество $\Gamma \subset \partial\Omega$ положительной $(m-1)$-мерной меры. Тогда функциона (1.1) корректно определен на множестве
$$X_0 = \{u : u \in W_p^1(\Omega, R^m), \quad u(x) - u_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma\}. \qquad (1.2)$$

Стандартные рассуждения (см., например, [1]) приводят к теореме о достижении функционалом (1.1) глобального минимума на множестве (1.2).

Двухфазовая упругая среда характеризуется уже двумя плотностями энергии деформации $F^{\pm}(M,u,x)$ и расположением каждой из фаз. Предположим, что каждая из функций $F^{\pm}$ и функция $f$ удовлетворяют требованиям (1) – (6). Обозначим через $\chi$ характеристическую функцию множества, занимаемого первой фазой. Тогда функционал энергии деформации двухфазовой среды определяется равенством
$$I[u,\chi,\sigma] = \\ = \int\limits_{\Omega} [\chi(x)F^{+}(\dot u(x), u(x), x) + (1-\chi(x))F^{-}(\dot u(x), u(x), x)]\,dx + \\ + \int\limits_{\partial\Omega} f(u(x),x)\,dS + \sigma\int\limits_{\Omega}|D\chi|. \qquad (1.3)$$

В качестве допустимых полей смещения и функций $\chi$ возьмем множество
$$X = \{u \in X_0, \quad \chi \in BV(\Omega), \quad \chi - \text{характеристическая функция}\}. \qquad (1.4)$$

В равенстве (1.3) величина
$$\int\limits_{\Omega}|D\chi| = \sup_{h \in C_0^1(\Omega, R^m), |h(x)| \leqslant 1} \int\limits_{\Omega} \chi \operatorname{div} h\,dx < \infty$$

является обобщением площади границы носителя функции $\chi$, попавшей в $\Omega$, коэффициент $\sigma$ считается положительным.

Известно [1], что функционал (1.3) достигает на множестве (1.4) наименьшего значения. Пара $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ из множества (1.4), минимизирующая функционал (1.3) при фиксированном $\sigma$ называется состоянием равновесия двухфазовой среды. Состояние равновесия назовем однофазовым, если $\hat{\chi} \equiv 0$ или $\hat{\chi} \equiv 1$ и двухфазовым в противном случае.

В конкретных задачах плотности энергии $F^{\pm}$ и потенциала $f$ зависят от дополнительного параметра $\lambda \in R^k$. Будем считать, что функции $F^{\pm}(M,u,x,\lambda)$, $f(u,x,\lambda)$ при $|\lambda| \leqslant R$ для каждого $R \geqslant 1$ удовлетворяют требованиям (1) – (6) неравенства в которых содержат константу $C = C(R) > 0$ и функции $0 \leqslant \alpha(x,R) \in L_1(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha_0(x,R) \in L_1(\partial\Omega)$. В этом случае функционалы

$$I^{\pm}[u,\lambda] = \int\limits_{\Omega} F^{\pm}(\dot{u}(x), u(x), x, \lambda)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(u(x), x, \lambda)\, dS \tag{1.5}$$

достигают наименьшего значения на множестве (1.2) и существует такая константа $B(R) > 0$, что для всех состояний равновесия $\hat{u}_\lambda$ каждого из функционалов (1.5) при $|\lambda| \leqslant R$ выполняется оценка

$$\|\hat{u}_\lambda\|_{W_p^1(\Omega,R^m)} \leqslant B(R). \tag{1.6}$$

Аналогично, функционал

$$\begin{gathered} I[u,\chi,\lambda,\sigma] = \\ = \int\limits_{\Omega} [\chi(x) F^{+}(\dot{u}(x), u(x), x, \lambda) + (1-\chi(x)) F^{-}(\dot{u}(x), u(x), x, \lambda)]\, dx + \\ + \int\limits_{\partial\Omega} f(u(x), x, \lambda)\, dS + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\chi| \end{gathered} \tag{1.7}$$

достигает на множестве (1.4) наименьшего значения и существует такая константа $B(R)$, что для всех состояний равновесия $\hat{u}_{\lambda,\sigma}$, $\hat{\chi}_{\lambda,\sigma}$ функционала (1.7) при $|\lambda| \leqslant R$, $\sigma \in [R^{-1}, R]$ выполняется неравенство

$$\|\hat{u}_{\lambda,\sigma}\|_{W_p^1(\Omega,R^m)} + \frac{1}{R} \int\limits_{\Omega} |D\hat{\chi}_\lambda| \leqslant B(R). \tag{1.8}$$

Константы в неравенствах (1.6) и (1.8) выберем одинаковыми.

Будем предполагать непрерыную зависимость функций $F^{\pm}$ и $f$ от параметра $\lambda$ в следующем смысле: для каждого $R > 1$ существует такая положительная константа $K(R)$, что при $|\lambda_i| \leqslant R$, $i = 1, 2$ выполняются условия

$$\begin{gathered}|F^{\pm}(M.u, x, \lambda_1) - F^{\pm}(M, u, x, \lambda_2)| \leqslant \\ \leqslant K(R)[|M|^p + \beta(|u|) + \alpha(x)]|\lambda_1 - \lambda_2|, \\ |f(u, x, \lambda_1) - f(u, x, \lambda_2)| \leqslant K(R)[\beta_0(|u|) + \alpha_0(x)]|\lambda_1 - \lambda_2|.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Введем обозначения

$$I^{\pm}(\lambda) = \min_{u \in X_0} I^{\pm}[u, \lambda], \quad I(\lambda) = \min\{I^+(\lambda), I^-(\lambda)\},$$
$$I(\lambda, \sigma) = \min_{u, \chi \in X} I[u, \chi, \lambda, \sigma].$$

Функция $I(\lambda, \sigma)$ определяет значение энергии двухфазовой среды на состоянии равновесия. Функция $I(\lambda)$ определяет значение энергии двухфазовой среды в том случае, если допустимыми являются лишь однофазовые состояния равновесия. Поскольку определения функций $I(\lambda)$ и $I(\lambda, \sigma)$ отличаются лишь множествами, по которым берется инфимум (для функции $I(\lambda)$ оно уже), справедливо неравенство

$$I(\lambda, \sigma) \leqslant I(\lambda), \quad \lambda \in R^k, \quad \sigma > 0. \tag{1.10}$$

Пусть

$$M = \{\lambda \in R^k, \quad \sigma > 0 : \quad I(\lambda, \sigma) < I(\lambda)\}.$$

Не исключено, что $M = \emptyset$.

Целью работы является доказательство справедливости следующего утверждения.

**Теорема.** (A). *Функции $I(\lambda)$, $I(\lambda, \sigma)$ непрерывны по $\lambda \in R^k$, $\sigma > 0$.*

(B). *Существует такая неотрицательная функция $\sigma_0(\lambda)$, возможно принимающая и бесконечные значения, что*

$$M = \{\lambda \in R^k, \quad \sigma > 0 : \quad \sigma \in (0, \sigma_0(\lambda)\}.$$

(C). *При $\lambda, \sigma \in M$ у функционала (1.7) существуют только двухфазовые состояния равновесия, а при $\lambda, \sigma \in N$*

$$N = \{\lambda \in R^k, \quad \sigma > 0 : \quad \sigma > \sigma_0(\lambda)\}$$

*– только однофазовые.*

(D). *Предположим, что для всех состояний равновесия* $\hat{u}_{\lambda,\sigma}$, $\hat{\chi}_{\lambda,\sigma}$ *функционала* (1.7), *для любого* $R > 1$ *существует такая положительная константа* $L(R)$, *что для всех* $\lambda \in R^k$, $|\lambda| \leqslant R$ *выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} F^{+}(\dot{\hat{u}}_{\lambda,\sigma}, \hat{u}_{\lambda,\sigma}, x, \lambda) - F^{-}(\dot{\hat{u}}_{\lambda,\sigma}, \hat{u}_{\lambda,\sigma}, x, \lambda) \in L_q(\Omega),\ q > m, \\ \|F^{+}(\dot{\hat{u}}_{\lambda,\sigma}, \hat{u}_{\lambda,\sigma}, x, \lambda) - F^{-}(\dot{\hat{u}}_{\lambda,\sigma}, \hat{u}_{\lambda,\sigma}, x, \lambda)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant L(R). \end{gathered} \tag{1.11}$$

*Тогда функция* $\sigma_0(\lambda)$ *локально ограничена и при* $\lambda, \sigma \in \Sigma$

$$\Sigma = \{\lambda \in R^k, \quad 0 < \sigma < \infty : \quad \sigma = \sigma_0(\lambda)\}$$

*у функционала* (1.7) *существует как однофазовое, так и двухфазовое состояния равновесия.*

(E). *При выполнении условий* (1.11) *функция* $\sigma_0(\lambda)$ *непрерывна по* $\lambda \in R^k$ *и локально удовлетворяет условию Липшица: если* $\sigma_0(\lambda_0) \in [R^{-1}, R]$, $|\lambda_0| \leqslant R$ *для некоторого* $R > 1$, *то существуют такие числа* $\rho(R) > 0$, $\gamma(R) > 0$, *что при всех* $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \rho$ *выполняется неравенство* $|\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda_0)| \leqslant \gamma|\lambda - \lambda_0|$.

Утверждение данной теоремы просматривалось в [1] на конкретных примерах плотностей энергии $F^{\pm}$ при нулевых граничных условиях на поле смещений.

Работа поддержана Федеральной целевой программой "Интеграция" (грант № 326.002) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-00684).

## §2. Доказательство утверждения (A)

Начнем с непрерывности функции $I(\lambda)$. Пусть $\lambda_i \in R^k$, $|\lambda_i| \leqslant R$, $\hat{u}_i$ – состояния равновесия функционала $I^{+}[u,\lambda]$. Тогда в силу (1.6), (1.9)

$$\begin{gathered} I^{+}(\lambda_1) - I^{+}(\lambda_2) = I^{+}[\hat{u}_1, \lambda_1] - I^{+}[\hat{u}_2, \lambda_2] \leqslant \\ \leqslant I^{+}[\hat{u}_2, \lambda_1] - I^{+}[\hat{u}_2, \lambda_2] \leqslant C|\lambda_1 - \lambda_2|, \\ I^{+}(\lambda_2) - I^{+}(\lambda_1) = I^{+}[\hat{u}_2, \lambda_2] - I^{+}[\hat{u}_1, \lambda_1] \leqslant \\ \leqslant I^{+}[\hat{u}_1, \lambda_2] - I^{+}[\hat{u}_1, \lambda_1] \leqslant C|\lambda_1 - \lambda_2| \end{gathered}$$

с некоторой константой $C = C(R) > 0$. Поэтому $|I^{+}(\lambda_2) - I^{+}(\lambda_1)| \leqslant C|\lambda_2 - \lambda_1|$. Аналогично, $|I^{-}(\lambda_2) - I^{-}(\lambda_1)| \leqslant C|\lambda_2 - \lambda_1|$. Из непрерывности функций $I^{\pm}(\lambda)$ следует непрерывность функции $I(\lambda)$.

Перейдем к доказательству непрерывности $I(\lambda,\sigma)$. Пусть $\lambda_i \in R^k$, $|\lambda_i| \leqslant R$, $\sigma_i \in [R^{-1}, R]$ для некоторого $R>1$, $\hat{u}_i$, $\hat{\chi}_i$ – состояния равновесия функционала (1.7) с $\lambda=\lambda_i$, $\sigma=\sigma_i$, $i=1,2$. Тогда в силу (1.8), (1.9)

$$
\begin{gathered}
I(\lambda_1,\sigma_1)-I(\lambda_2,\sigma_2)=I[\hat{u}_1,\hat{\chi}_1,\lambda_1,\sigma_1]-I[\hat{u}_2,\hat{\chi}_2,\lambda_2,\sigma_2]\leqslant\\
\leqslant I[\hat{u}_2,\hat{\chi}_2,\lambda_1,\sigma_1]-I[\hat{u}_2,\hat{\chi}_2,\lambda_2,\sigma_2]\leqslant C[|\lambda_1-\lambda_2|+|\sigma_1-\sigma_2|],\\
I(\lambda_2,\sigma_2)-I(\lambda_1,\sigma_1)=I[\hat{u}_2\hat{\chi}_2,\lambda_2,\sigma_2]-I[\hat{u}_1,\hat{\chi}_1,\lambda_1,\sigma_1]\leqslant\\
\leqslant I[\hat{u}_1,\hat{\chi}_1,\lambda_2,\sigma_2]-I[\hat{u}_1,\hat{\chi}_1,\lambda_1,\sigma_1]\leqslant C[|\lambda_1-\lambda_2|+|\sigma_1-\sigma_2|]
\end{gathered}
$$

с некоторой константой $C=C(R)>0$. Поэтому $|I(\lambda_2,\sigma_2)-I(\lambda_1,\sigma_1)|\leqslant C[|\lambda_2-\lambda_1|+|\sigma_2-\sigma_1|]$.

## §3. Доказательство утверждений (B), (C)

Определить структуру множества (1.10) поможет следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Пусть функционал $I[u,\chi,\lambda_0,\sigma_0]$ имеет однофазовое состояние равновесия. Тогда у функционала $I[u,\chi,\lambda_0,\sigma]$ при $\sigma>\sigma_0$ существуют только однофазовые состояния равновесия.*

**Доказательство.** Пусть $\hat{u}_0^{\pm}$ – какое-либо состояние равновесия функционала $I^{\pm}[u,\lambda_0]$, $\hat{\chi}^{+}\equiv 1$, $\hat{\chi}^{-}\equiv 0$. Из условий леммы следует, что для всех функций $u$, $\chi$ из множества $X$ хотя бы для одного из знаков $\pm$ выполняется неравенство

$$I[u,\chi,\lambda_0,\sigma_0]\geqslant I[\hat{u}_0^{\pm},\hat{\chi}^{\pm},\lambda_0,\sigma_0].$$

Если $0\not\equiv\chi\not\equiv 1$, то при $\sigma>\sigma_0$

$$I[u,\chi,\lambda_0,\sigma]>I[u,\chi,\lambda_0,\sigma_0]\geqslant I[\hat{u}_0^{\pm},\hat{\chi}^{\pm},\lambda_0,\sigma_0]=I[\hat{u}_0^{\pm},\hat{\chi}^{\pm},\lambda_0,\sigma]$$

для того же знака $+$ или $-$. Полученное неравенство приводит к отсутствию двухфазовых состояний равновесия у функционала (1.7) при $\lambda=\lambda_0$, $\sigma>\sigma_0$.●

Из непрерывности функций $I(\lambda)$ и $I(\lambda,\sigma)$ следует открытость множества (1.10). Пусть $l(\lambda_0)=\{\lambda=\lambda_0\in R^k, \quad \sigma>0\}$. Тогда пересечение множеств $M$ и $l(\lambda_0)$ – открытое множество на полупрямой $l(\lambda_0)$. Поэтому множество $l(\lambda_0)\cap M$ либо пусто, либо состоит из конечного или счетного числа непересекающихся открытых интервалов $(\alpha_j,\beta_j)$. В этом наборе интервалов возможен как интервал $(\alpha_{j_0},\beta_{j_0})$ с $\alpha_{j_0}=0$, так и интервал $(\alpha_{j_1}\beta_{j_1})$ с $\beta_{j_1}=\infty$ (не сключено, что $j_0=j_1$).

**Лемма 3.2.** *Если множество* $l(\lambda_0) \cap M \neq \emptyset$, *то* $l(\lambda_0) = (0, \beta)$, $0 < \beta \leqslant \infty$.

**Доказательство.** Пусть $l(\lambda_0) \cap M \neq \emptyset$. Пусть $(\alpha, \beta)$ – один из интервалов, образующих это множество, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. Очевидны соотношения

$$\begin{gathered} I(\lambda_0, \sigma) < I(\lambda_0) \quad \text{при } \sigma \in (\alpha, \beta), \\ I(\lambda_0, \sigma) = I(\lambda_0) \quad \text{при } \sigma = \alpha \neq 0, \quad \sigma = \beta \neq \infty. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Если $\alpha \neq 0$, то из равенства (3.1) следует, что у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \alpha]$ существует однофазовое состояние равновесия. Тогда (лемма 3.1) у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \sigma]$, $\sigma > \alpha$ существуют только однофазовые состояния равновесия, что противоречит неравенству (3.1). Поэтому $\alpha = 0$. Если $\beta \neq \infty$, то из равенства (3.1) следует, что у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \beta]$ существует однофазовое состояние равновесия. Тогла (лемма 3.1) у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \sigma]$, $\sigma > \beta$ существуют только однофазовые состояния равновесия. Из этого утверждения следует, что интервал $(\alpha, \beta)$ – единственная компонента связности множества $l(\lambda_0) \cap M$. При $\beta = \infty$ единственность компоненты $(\alpha, \beta)$ очевидна.●

Положим $\sigma_0(\lambda_0) = \beta = \beta(\lambda_0)$ при $(\alpha, \beta) \neq \emptyset$ и $\sigma_0(\lambda_0) = 0$ в противном случае. Из леммы 3.2 следует требуемое в (B) представление для множества $M$.

Из определения множества $M$ следует, что у функционала (1.7) при $\lambda, \sigma \in M$ существуют только двухфазовые состояния равновесия, а при $\lambda, \sigma$ из дополнения к множеству $M$ у функционала (1.7) есть и однофазовые состояния равновесия. Дополнение к множеству $M$ совпадает с множеством $N \cup \Sigma$. Поэтому наличие в множестве $N$ только двухфазовых состояний равновесия следует из леммы 3.1.

## §4. Доказательство утверждения D

Пусть функционал $I[u, \chi, \lambda, \sigma]$ имеет состояние равновесия $\hat{u}_{\lambda,\sigma}$, $\hat{\chi}_{\lambda\sigma}$. Обозначим через $\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}$ ту из функций $\hat{\chi}_{\lambda,\sigma}$ или $1 - \hat{\chi}_{\lambda,\sigma}$, для которой $|\Omega|^{-1} \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|_{L_1(\Omega)} \leqslant 1/2$. Тогда для $\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}$ справедливо изопериметрическое неравенство (см., например, [1])

$$\Big(\int\limits_\Omega \tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\, dx\Big)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \kappa \int\limits_\Omega |D\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}|, \quad \kappa = \kappa(\Omega) > 0.$$

Пользуясь изопериметрическим неравенством, установим справедливость следующего утверждения.

**Лемма 4.1.** *Для всех состояний равновесия* $\hat{u}_{\lambda,\sigma}$, $\hat{\chi}_{\lambda,\sigma}$ *с* $|\lambda| \leqslant R$, $\sigma > 0$ *справедлива оценка*

$$\sigma \int\limits_{\Omega} |D\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}| \leqslant \kappa L(R) \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|_{L_1(\Omega)}^{\frac{q-m}{qm}} \int\limits_{\Omega} |D\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}|. \tag{4.1}$$

**Доказательство.** Для данного $|\lambda|$, $|\lambda| \leqslant R$ обозначим через $\hat{u}_\lambda^\pm$ какое-либо состояние равновесия функционала $I^\pm[u,\lambda]$. Пусть $\hat{\chi}^+ \equiv 1$, $\hat{\chi}^- \equiv 0$. Тогда для каждого из знаков $\pm$

$$I[\hat{u}_{\lambda,\sigma}, \hat{\chi}_{\lambda,\sigma}, \lambda, \sigma] \leqslant I[\hat{u}_\lambda^\pm, \hat{\chi}^\pm, \lambda, \sigma].$$

Раскрывая данные неравенства для знаков $+$ и $-$, получаем

$$I^-[\hat{u}_{\lambda,\sigma}, \lambda] + \int\limits_{\Omega} \hat{\chi}_{\lambda,\sigma}(F^+ - F^-)\,dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\hat{\chi}_{\lambda,\sigma}| \leqslant I^-[\hat{u}_\lambda^-, \lambda],$$

$$I^+[\hat{u}_{\lambda,\sigma}, \lambda] + \int\limits_{\Omega} (1 - \hat{\chi}_{\lambda,\sigma})(F^- - F^+)\,dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D(1 - \hat{\chi}_{\lambda,\sigma})| \leqslant$$

$$\leqslant I^+[\hat{u}_\lambda^+, \lambda], \quad F^\pm = F^\pm(\dot{\hat{u}}_{\lambda,\sigma}, \hat{u}_{\lambda,\sigma}, x, \lambda).$$

Поскольку $I^\pm[\hat{u}_\lambda^\pm, \lambda] - I^\pm[\hat{u}_{\lambda,\sigma}, \lambda] \leqslant 0$, последнее неравенство и предположение (1.11) приводят к соотношениям

$$\sigma \int\limits_{\Omega} |D\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}| \leqslant \int\limits_{\Omega} \tilde{\chi}_{\lambda,\sigma} |F^+ - F^-|\,dx \leqslant L(R) \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|_{L_1(\Omega)}^{q'} =$$

$$= L(R) \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|_{L_1(\Omega)}^{\frac{q-m}{qm}} \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \kappa L(R) \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|_{L_1(\Omega)}^{\frac{q-m}{qm}} \int\limits_{\Omega} |D\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}|. \bullet$$

Из оценки (4.1) следует, что при $\kappa L(R)(\frac{|\Omega|}{2})^{\frac{q-m}{qm}} \sigma^{-1} < 1$ возможны только однофазовые состояния равновесия. Поэтому при $|\lambda| \leqslant R$ для $\sigma_0(\lambda)$ справедливо неравенство $\sigma_0(\lambda) \leqslant \kappa L(R)(\frac{|\Omega|}{2})^{\frac{q-m}{qm}}$.

Из неравенства (4.1) вытекает еще одно важное следствие.

**Лемма 4.2.** *Пусть $\hat{u}_{\lambda,\sigma}$, $\hat{\chi}_{\lambda,\sigma}$ – двухфазовые состояния равновесия функционала (1.7) с $|\lambda| \leqslant R$, $\sigma \in [R^{-1}, R]$ при некотором $R > 1$. Тогда существует такая константа $\delta(R) \in (0, 1/2)$, что*

$$\delta(R) \leqslant \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \hat{\chi}_{\lambda,\sigma}\, dx \leqslant 1 - \delta(R).$$

**Доказательство.** Если состояние равновесия двухфазовое, то $\int_\Omega |D\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}| \neq 0$. Поэтому из (4.1) получаем

$$\left(\frac{\sigma}{\kappa L(R)}\right)^{\frac{qm}{q-m}} \leqslant \|\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}\|_{L_1(\Omega)}.$$

Из этого нераенства и определения $\tilde{\chi}_{\lambda,\sigma}$ следует требуемая в лемме оценка. •

Для завершения локазательства утверждения D нам потребуется еще одна лемма.

**Лемма 4.3.** *Пусть последовательность функций $u_n, \chi_n \in X$, векторов $\lambda_n \in R^k$ и чисел $\sigma_n > 0$ удовлетворяет условиям*

$$u_n \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{в } W_p^1(\Omega), \quad \chi_n \to \tilde{\chi} \quad \text{почти всюду},$$
$$\lambda_n \to \lambda, \quad \sigma_n \to \sigma,$$

*причем величины $\int_\Omega |D\chi_n|$ равномерно ограничены. Тогда пара $\tilde{u}, \tilde{\chi} \in X$ и*

$$I[\tilde{u}, \tilde{\chi}, \lambda, \sigma] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} I[u_n, \chi_n, \lambda_n, \sigma_n].$$

**Доказательство.** Включение $\tilde{\chi} \in BV(\Omega)$ следует из свойств пространства $BV(\Omega)$ (см., например, [1]). Так же как в [1] устанавливается справедливость неравенства

$$I[\tilde{u}, \tilde{\chi}, \lambda, \sigma] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} I[u_n, \chi_n, \lambda, \sigma].$$

Последнее неравенство вместе с предположением (1.9) приводит к требуемой в лемме оценке.•

Пусть $\hat{u}_n$, $\hat{\chi}_n$ – состояния равновесия функционала $I[u, \chi, \lambda_n, \sigma_n]$ и $\lambda_n \to \lambda$, $\sigma_n \to \sigma > 0$. Тогда из леммы 4.3 и оценки (1.8) следует, что из последовательности $\hat{u}_n$, $\hat{\chi}_n$ можно выбрать подпоследовательность

$$\hat{u}_{n'} \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{в } W^1_p(\Omega, R^m), \quad \hat{\chi}_{n'} \to \hat{\chi} \quad \text{почти всюду}$$

причем пара $\hat{u}, \hat{\chi} \in X$ и является состоянием равновесия функционала $I[u, \chi, \lambda, \sigma]$. Поэтому, если среди состояний равновесия $\hat{u}_n$, $\hat{\chi}_n$ есть бесконечно много однофазовых, то у функционала $I[u, \chi, \lambda, \sigma]$ также есть однофазовое состояние равновесия. Если среди состояний равновесия есть бесконечно много двухфазовых, то из леммы 4.2 следует, что у функционала $I[u, \chi, \lambda, \sigma]$ также есть двухфазовое состояние равновесия.

Из последнего утверждения следует наличие у функционала (1.7) при $\lambda, \sigma \in \Sigma$ двухфазовых состояний равновесия ($\sigma_n \to \sigma_0$, $\sigma_n < \sigma_0(\lambda)$, $\lambda_n = \lambda$). Наличие однофазовых состояний равновесия следует из определения $\sigma_0(\lambda)$.

## §5. Доказательство утверждения Е

Непрерывность функции $\sigma_0(\lambda)$ докажем от противного. Пусть $\lambda_n \to \hat{\lambda}$. Если $\sigma_0(\lambda_n)$ не стремится к $\sigma_0(\hat{\lambda})$, то существует такая подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), что $\sigma_0(\lambda_n) \to \hat{\sigma} \neq \sigma_0(\hat{\lambda})$, $\hat{\sigma} \in [0, \infty)$. Если $\hat{\sigma} > \sigma_0(\hat{\lambda})$, то у функционала $I[u, \chi, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}]$ существует двухфазовое состояние равновесия, что противоречит определению $\sigma_0(\hat{\lambda})$. Если $\hat{\sigma} < \sigma_0(\hat{\lambda})$, то у функционала $I[u, \chi, \hat{\lambda}, \sigma]$ для некоторого $\sigma \in (\hat{\sigma}, \sigma_0(\hat{\lambda})$ (мы исключаем равенство $\sigma = \hat{\sigma}$ из опасения совпадения $\hat{\sigma}$ с нулем) существует однофазовое состояние равновесия, что также противоречит определению числа $\sigma_0(\hat{\lambda})$.

Приступим к доказательству справедливости локального условия Липшица. Пусть у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \sigma_0]$, $\lambda_0 \in R^k$, $\sigma_0 > 0$ существует двухфазовое состояние равновесия $\hat{u}_0$, $\hat{\chi}_0$, пусть $\hat{u}_0^{\pm}$ – какие-либо состояния равновесия функционалов $I^{\pm}[u, \lambda_0]$, $\hat{\chi}^+ \equiv 1$, $\hat{\chi}^- \equiv 0$. Тогда для обоих знаков

$$I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_0, \sigma_0] \leqslant I[\hat{u}_0^{\pm}, \hat{\chi}_0^{\pm}, \lambda_0, \sigma_0]. \tag{5.1}$$

Для произвольных чисел $\sigma_1 > 0$, $\lambda_1 \in R^k$ при условии $|\lambda_i| \leqslant R$,

$i = 1, 2$ в силу неравенств (1.8), (1.9) справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
I[\hat{u}_0^{\pm}, \hat{\chi}_0^{\pm}, \lambda_0, \sigma_0] = I[\hat{u}_1^{\pm}, \hat{\chi}^{\pm}, \lambda_1, \sigma_1] + \\
+ I[\hat{u}_0^{\pm}, \hat{\chi}_0^{\pm}, \lambda_0, \sigma_1] - I[\hat{u}_1^{\pm}, \hat{\chi}^{\pm}, \lambda_0, \sigma_1] + \\
+ I[\hat{u}_1^{\pm}, \hat{\chi}^{\pm}, \lambda_0, \sigma_1] - I[\hat{u}_1^{\pm}, \hat{\chi}^{\pm}, \lambda_1, \sigma_1] \leqslant \\
\leqslant I[\hat{u}_1^{\pm}, \hat{\chi}^{\pm}, \lambda_1, \sigma_1] + D(R)|\lambda_1 - \lambda_2|,
\end{aligned}
$$

где $D(R)$ – положительная константа, $\hat{u}_1^{\pm}$ – какие-либо состояния равновесия функционала $I^{\pm}[u, \lambda_1]$.

Аналогично

$$
\begin{aligned}
I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_0, \sigma_0] = I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_1, \sigma_1] + \\
+ I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_0, 0] - I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_1, 0] + (\sigma_0 - \sigma_1) \int\limits_\Omega |D\hat{\chi}_0| \geqslant \\
\geqslant I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_1, \sigma_1] - D(R)|\lambda_1 - \lambda_0| + (\sigma_0 - \sigma_1) \int\limits_\Omega |D\hat{\chi}_0|.
\end{aligned}
$$

Подставляя найденные соотношения в (5.1), получаем

$$
\begin{aligned}
I[\hat{u}_0, \hat{\chi}_0, \lambda_1, \sigma_1] \leqslant \\
\leqslant I[\hat{u}_1^{\pm}, \hat{\chi}^{\pm}, \lambda_1, \sigma_1] + 2D(R)|\lambda_1 - \lambda_0| + (\sigma_1 - \sigma_0) \int\limits_\Omega |D\hat{\chi}_0|.
\end{aligned}
$$

Пусть $\lambda_1$, $\sigma_1$ таковы, что

$$
2D(R)|\lambda_1 - \lambda_0| < (\sigma_0 - \sigma_1) \int\limits_\Omega |D\hat{\chi}_0| \equiv (\sigma_0 - \sigma_1) \int\limits_\Omega |D(1 - \hat{\chi}_0)|. \quad (5.2)
$$

Тогда для таких $\lambda_1$, $\sigma_1$ существуют только двухфазовые состояния равновесия.

Неравенство (5.2) возможно лишь при условии $\sigma_1 < \sigma_0$. Из изопериметрического неравенства и леммы 4.2 получаем

$$
\kappa^{-1}(|\Omega|\delta(R))^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \kappa^{-1}\Big(\int\limits_\Omega \tilde{\chi}_0 \, dx\Big)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \int\limits_\Omega |D\tilde{\chi}_0|.
$$

Поэтому (5.2) заведомо выполнено, если

$$
2D(R)|\lambda_1 - \lambda_0| < \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\kappa}(|\Omega|\delta(R))^{\frac{m-1}{m}}.
$$

Итак, часть конуса

$$|\lambda - \lambda_0| < \gamma(R)(\sigma_0 - \sigma), \quad \gamma(R) = \frac{(|\Omega|\delta(R))^{\frac{m-1}{m}}}{2\kappa D(R)},$$
$$|\lambda| \leqslant R, \quad |\lambda_0| \leqslant R, \quad \sigma_0 \in [R^{-1}, R], \quad \sigma \in [R^{-1}, R]$$

лежит в множестве $M$, если у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \sigma_0]$ есть двухфазовое состояние равновесия.

Аналогично устанавливается, что часть конуса

$$|\lambda - \lambda_0| < \gamma(R)(\sigma - \sigma_0),$$
$$|\lambda| \leqslant R, \quad |\lambda_0| \leqslant R, \quad \sigma_0 \in [R^{-1}, R], \quad \sigma \in [R^{-1}, R]$$

лежит в множестве $N$, если у функционала $I[u, \chi, \lambda_0, \sigma_0]$ есть однофазовое состояние равновесия.

Возьмем в качестве $\lambda_0$, $\sigma_0$ точку $\lambda_0$, $\sigma_0(\lambda_0)$ при условии $\sigma_0(\lambda_0) > 0$. Пользуясь непрерывностью функции $\sigma_0(\lambda)$ и информацией о полученных конусах, придем к доказательству условия Липшица.

## Литература

1. В. Г. Осмоловский, *Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды*. С.-Пб., 2000.

Osmolovskii V. G. Association of character of states of an equilibrium of a two-phase elastic medium on parameters of a problem.

At the common suppositions about densenesses of an energy of a strain, depending from parameters, the bands of values of parameters are determined, at which the one-phase or two-phase states equilibrium are implemented. Is proved Lipshitzian of boundary between these bands. The character of an equilibrium of a two-phase medium for parameters laying on a demarcation is explored.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 27 октября 2000 г.