Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

О. А. Ладыженская

ТЕОРЕМА О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Посвящается памяти
Александра Васильевича Иванова**

§1. Введение

Мне известна одна теорема о мультипликаторах в пространствах Гёльдера, достаточные условия которой выражены в простой форме, доступной для применений к дифференциальным уравнениям. Она доказана Л. Хермандером (см. [1], теорема 7.9.6) и касается случая пространств Гёльдера с однородными метриками типа $\rho(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Эта теорема полезна при доказательстве Гёльдеровости производных от решений уравнений (и систем) эллиптического типа. В таких уравнениях все координаты $x_1, \dots, x_n$ точки $x \in R^n$ равноправны. Но для уравнений параболического типа это не так. Например, однородное уравнение теплопроводности неинвариантно относительно обычных растяжений $(x,t) \to (\lambda x, \lambda t)$, но оно не меняется при преобразованиях $(x,t) \to (\lambda x, \lambda^2 t)$. Это отражается и на свойствах мультипликаторов, возникающих при решении алгебраических систем, являющихся Фурье-образами исследуемых дифференциальных уравнений. Мультипликаторы, возникающие для уравнений (и систем) параболического типа, не удовлетворяют критерию теоремы 7.9.6 из [1].

Ввиду этого встал вопрос нахождения условий, которые были бы достаточными для того, чтобы мультипликаторы, возникающие для уравнений (и систем) параболического типа, порожда-

---

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ, грант No. 99-01-00108, Федеральной целевой программой “Интеграция”, грант No. 326.53, “Научные школы” (грант No. 00-15-96-017).

ли операторы, ограниченные в пространствах Гёльдера с какой-либо метрикой.

Один такой критерий был предложен мною в конце 1999 года. Он прост по форме и применим не только к уравнениям и системам параболического типа, но и к более сложным системам гидродинамического типа. Его доказательство и некоторые приложения я опубликовала в виде Препринта [2] в начале этого года и послала также в Доклады РАН соответствующую заметку. Однако, как выяснилось сейчас, спустя много месяцев, заметка эта не дошла до редакции ДАН, затерявшись, видимо, при пересылке по почте из Петербурга в Москву. Ввиду этого, я изложу здесь содержание работы [2] с некоторыми пояснениями и добавлю в конце ее некоторые приложения.

§2. Теорема о мультипликаторах

Введем в пространстве $x = (x', x_n) \in E^n$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, неоднородную метрику

$$\rho(x-y) = \sum_{k=1}^{n-1} \left|x_k - y_k\right| + \left|x_n - y_n\right|^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1], \tag{2.1}$$

и рассмотрим соответствующее ей пространство Гёльдера $H^{\gamma,\alpha\gamma}(E^n)$, $\gamma \in (0,1)$. Элементами этого пространства являются непрерывные функции $u : E^n \to E^1$, имеющие конечную норму

$$\left|u\right|_{H^{\gamma,\alpha\gamma}(E^n)} \equiv \langle u\rangle_{E^n}^{(\gamma,\alpha\gamma)} + \sup_{x\in E^n} |u(x)|. \tag{2.2$_1$}$$

Первое слагаемое в ней называется константой Гёльдера для u и определяется равенством

$$\langle u\rangle_{E^n}^{(\gamma,\alpha\gamma)} = \sup_{\substack{x,y\in E^n\\ \rho(x-y)\leqslant 1}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\rho^{\alpha}(x-y)}, \tag{2.2$_2$}$$

где $\rho(x-y)$ взято из (1).

Символ $\|\cdot\|_{p\cdot E^n}$ будет означать норму в пространстве Лебега $L_p(E^n)$.

Мы будем исследовать операторы свертки

$$(m * u)(x) = \int\limits_{E^n} m(x-y)u(y)dy \tag{2.3$_1$}$$

для $u : E^n \to E^1$ в пространствах $H^{\gamma,\alpha\gamma}(E^n)$. Как известно, каждый такой оператор определяется Фурье-образом $\widetilde{m} : E^n \to \mathbb{C}$ функции m, т.е.

$$\widetilde{m}(\xi) = F(m)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E^n} e^{-ix\xi} m(x) d\xi. \tag{2.4}$$

Функция m восстанавливается по её Фурье-образу $\widetilde{m}$ по формуле

$$m(x) = F^{-1}(\widetilde{m})(x) = \int\limits_{E^n} e^{ix\xi} \widetilde{m}(\xi) d\xi, \tag{2.5}$$

а

$$m * u = F^{-1}(\widetilde{m}\, \widetilde{u}) = F^{-1}(\widetilde{m} F(u)). \tag{2.3$_2$}$$

Функция $\widetilde{m}$ входит в (2.3_2) в виде множителя и потому называется мультипликатором.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $\widetilde{m} : E^n \to \mathbb{C}$ есть измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая условиям*

$$\left\| F^{-1} \widetilde{\mathcal{M}}_j \right\|_{1,E^n} \leqslant \mu < \infty \quad \textit{для} \quad \forall\, j = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}, \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{M}}_j(\xi) = \widetilde{m}\left(2^j \xi', 2^{j/\alpha} \xi_n\right) \chi(\xi), \quad \xi = (\xi', \xi_n),$$

а $\chi(\xi) = \theta(\rho(\xi))$, где $\theta : E^1_+ = [0, \infty) \to [0, 1]$ есть какая-нибудь бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ и нулю на множествах $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ и $[4, \infty)$, а $\rho(\,\cdot\,)$ определено в (2.1).

Тогда для $m = F^{-1}(\widetilde{m})$ и любой функции $u \in \dot{C}^\infty(E^n)$ справедливо неравенство

$$\langle m * u \rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)}_{E^n} \leqslant c(n, \gamma, \alpha) \mu \langle u \rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)}_{E^n} \tag{2.7}$$

с постоянной c, зависящей только от n, γ, α. $\square$

Здесь $\dot{C}^\infty(E^n)$ есть совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в E^n. Доказательство теоремы 2.1 содержится в доказательстве теоремы 2 из [2]. Однако формулировка теоремы 2 из [2] немного отличается от формулировки теоремы 2.1. А именно, в ней вместо условий (2.6) взяты условия

$$\left\| \check{m}_j \right\|_{W_2^s(\omega)} \leqslant \mu, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

в которых

$$\check{m}_j(\xi) = \widetilde{m}(2^j \xi', 2^{j/\alpha}\xi_n), \quad s > \frac{n}{2},$$

а $\omega = \{\xi \in E^n \,||\, \frac{1}{4} \leqslant \rho(\xi) \leqslant 4\}$.[1] Они проверяются элементарно и не содержат функции χ. Но они ограничительнее условий (2.6): из них следуют (2.6), ибо имеет место следующее известное предложение (см., например, [1]):

Лемма 2.1. *Для любой функции* $\widetilde{\mathcal{M}} : F^n \to \mathbb{C}$ *верно неравенство*

$$\left\| F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}}) \right\|_{1,E^n} \leqslant c(n,s) \left\| \widetilde{\mathcal{M}} \right\|_{W_2^s(E^n)}. \tag{2.9}$$

□

Доказывается она на основании равенства Парсеваля. А именно

$$\left\| \widetilde{\mathcal{M}} \right\|^2_{W_2^s(E^n)} = \sum_{|k| \leqslant s} \left\| D^{(k)} \widetilde{\mathcal{M}} \right\|^2_{2,E} =$$

$$= \sum_{|k| \leqslant s} \int\limits_{E^n} \left| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \right|^2 \left| \mathcal{M}(x) \right|^2 dx,$$

где $\mathcal{M} = F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$, а при $s > \frac{n}{2}$

$$\left\| F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}}) \right\|_{1,E^n} = \int\limits_{E^n} |\mathcal{M}(x)| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{E^n} \left|\mathcal{M}(x)\right|^2 \left(1 + |x|^2\right)^s dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{E^n} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^s} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\int\limits_{E^n} |\mathcal{M}(x)|^2 \left(1 + |x|^2\right)^s dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

[1] В [2] вместо символов $\widetilde{u}$ использованы символы $\widehat{u}$.

$$\leqslant c_1\Big(\sum_{|k|\leqslant s}\int\limits_{E^n}\big|\mathcal{M}(x)\big|^2\,\Big|x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = c_1\Big\|\widetilde{\mathcal{M}}\Big\|_{W_2^s(E^n)}.$$

Итак, (2.6) следует из (2.8). Обратное, вообще говоря, неверно.

В связи с условиями (2.6) я предложила молодым участникам собеседований в моей лаборатории ПОМИ, найти какие-либо другие мажоранты для $\|F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})\|_{1,E^n}$, отличные от (2.9). Один из них, Н. Филонов, предложил следующие мажоранты:

Лемма 2.2. *Для любой функции $\widetilde{\mathcal{M}} : E^n \to \mathbb{C}$ и любого $p \in (1,2]$ справедливо неравенство*

$$\Big\|F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})\Big\|_{1,E^n} \leqslant c(n,p)\sum_{\alpha}\Big\|D^{\alpha}\widetilde{\mathcal{M}})\Big\|_{p,E^n}, \tag{2.10}$$

в котором $D^{\alpha}u = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1},\dots\partial_{\xi_n}^{\alpha_n}$, причем каждое α_k равно нулю или единице (так что $\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leqslant n$). $\square$

Неравенство (2.10) доказывается просто, на основании теоремы Хаусдорфа о том, что для любой $v \in L_p(E^n)$, $p \in (1,2]$, справедливо неравенство

$$\Big\|F^{-1}(v)\Big\|_{p',E^n} \leqslant c(p,n)\|v\|_{p,E^n}, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{2.11}$$

А именно, для $\mathcal{M} = F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$ имеем

$$\Big\|\mathcal{M}\Big\|_{1,E^n} = \int\limits_{E^n}\Big|\mathcal{M}(x)\prod_{k=1}^{n}(1+ix_k)\Big|\,\Big|\prod_{k=1}^{n}(1+ix_k)\Big|^{-1}dx \leqslant$$

$$\leqslant\Big(\int\limits_{E^n}\Big|\mathcal{M}(x)\prod(1+ix_k)\Big|^{p'}dx\Big)^{1/p'}\Big(\int\limits_{E^n}\Big|\prod_{k=1}^{n}(1+ix_k)\Big|^{-p}dx\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_1(p,n)\Big\|\prod_{k=1}^{n}(1+\partial_{\xi_k})\widetilde{\mathcal{M}}\Big\|_{p,E^n}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Воспроизведем здесь доказательство теоремы 2.1, данное в [2], но при этом введем несколько более хорошие обозначения. Как указано в [2], план нашего доказательства такой же, как план доказательства теоремы 7.9.6 в [1], но функции, которые возникают по ходу дела, отличаются от функций из [1].

Итак, как и в [1], возьмем какую-либо бесконечно дифференцируемую функцию $\psi : E^1_+ \to [0,1]$, равную 1 на отрезке $[0,1]$ и нулю на $[2,\infty)$ и по ней построим функцию $\varphi : E^1_+ \to [0,1]$, определяемую равенством $\varphi(\rho) = \psi(\rho) - \psi(2\rho)$, $\rho \in E^1_+$. Она равна нулю на множествах $[0,\frac{1}{2}]$ и $[2,\infty]$. Введем также функции $\varphi_j : E^1_+ \to [0,1]$ с помощью равенств $\varphi_j(\rho) = \varphi(\frac{\rho}{2^j})$. Ясно, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(\rho) = 1, \quad \rho \in (0,\infty). \tag{2.12$_1$}$$

По функциям φ и φ_j определим функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Phi}_j : E^n \to [0,1]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Phi} = \varphi \circ \rho, \quad \text{т. е.} \quad \widetilde{\Phi}(\xi) = \varphi(\rho(\xi)), \quad \text{и} \\ &\widetilde{\Phi}_j = \varphi_j \circ \rho, \quad \text{т. е.} \end{aligned} \tag{2.12$_2$}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_j(\xi) = \varphi_j(\rho(\xi)) = \varphi\left(\frac{\rho(\xi)}{2^j}\right) = \\ = \varphi\left(\rho\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right)\right) = \widetilde{\Phi}\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right). \end{aligned} \tag{2.12$_3$}$$

Раевнтсво (2.12$_1$) порождает разбиение функции от $\xi \in E^n$, равной единице всюду. А именно,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\Phi}_j(\xi) = 1, \quad \xi \in E^n \setminus \{0\}. \tag{2.12$_4$}$$

В соответствии с (2.12$_4$), представим функцию $\widetilde{u} \equiv F(u)$ в виде

$$\widetilde{u}(\xi) = \sum_t u_j(\xi), \quad \widetilde{u}_j(\xi) = \widetilde{u}(\xi)\widetilde{\Phi}_j(\xi), \quad \xi \neq 0 \tag{2.12$_5$}$$

Пусть $\Phi = F^{-1}(\widetilde{\Phi})$ и $\Phi_j = F^{-1}(\widetilde{\Phi}_j)$. Благодаря (2.12$_3$)

$$\Phi_j(x) = F^{-1}(\widetilde{\Phi}_j)(x) = \int e^{ix\xi}\widetilde{\Phi}\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right)d\xi.$$

Отсюда в результате замены переменных интегрирования $\xi' = 2^j\eta'$, $\xi_n = 2^{j/\alpha}\eta_n$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_j(x) = 2^{(n-1)j+j/\alpha} \int e^{i2^jx'\eta' + i2^{j/\alpha}x_n\eta_n}\widetilde{\Phi}(\eta',\eta_n)d\eta = \\ = 2^{(n-1)j+j/\alpha}\Phi\Big(2^jx', 2^{j/\alpha}x_n\Big). \end{aligned} \tag{2.13$_1$}$$

Введем еще бесконечно дифференцируемую функцию $\omega : E^1_+ \to [0,1]$, равную 1 на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$ и нулю на множествах $[0, \frac{1}{4}]$, $[4, \infty)$, и функцию $\chi : E^n \to [0,1]$, определяемую равенствами

$$\chi(\xi) = \omega(\rho(\xi)), \quad \xi \in E^n.$$

Легко видеть, что для всех $\xi \in E^n$

$$\widetilde{\Phi}(\xi) = \widetilde{\Phi}(\xi)\chi(\xi) \quad \text{и} \quad \widetilde{\Phi}_j(\xi) = \widetilde{\Phi}_j(\xi)\chi\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right).$$

Поэтому

$$\widetilde{u}_j(\xi) = \widetilde{u}(\xi)\widetilde{\Phi}_j(\xi) = \widetilde{u}_j(\xi)\chi\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right). \tag{2.13$_2$}$$

Пусть

$$v \equiv m * u. \tag{2.14$_1$}$$

Для её Фурье-образа справедливы представления

$$\widetilde{v}(\xi) = F(v)(\xi) = \widetilde{m}(\xi)\widetilde{u}(\xi) = \sum_j \widetilde{m}(\xi)\widetilde{u}_j(\xi) =$$

$$= \sum_j \widetilde{m}(\xi)\chi\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right)\widetilde{u}_j(\xi) = \sum_j \widetilde{v}_j(\xi), \tag{2.14$_2$}$$

в которых

$$\widetilde{v}_j(\xi) = \widetilde{m}_j(\xi)\widetilde{u}_j(\xi), \quad \widetilde{m}_j(\xi) \equiv \widetilde{m}(\xi)\chi\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right). \tag{2.14$_3$}$$

Для $F^{-1}(\widetilde{m}_j)$ имеет место равенство

$$\left\|F^{-1}(\widetilde{m}_j)\right\|_{1,E^n} \equiv \int\limits_{E^n} dx \left| \int\limits_{E^n} e^{ix\xi}\widetilde{m}(\xi)\chi\left(\frac{\xi'}{2^j}, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha}}\right)dx \right| =$$

$$= \int\limits_{E^n} dy \left| \int e^{i\eta y}\,\widetilde{m}\Big(2^j\eta', 2^{j/\alpha}\eta_n\Big)\chi(\eta)d\eta \right| \equiv \left\|F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_j)\right\|_{1,E^n}, \tag{2.15$_1$}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{M}}_j(\eta) = \widetilde{m}\Big(2^j\eta', 2^{j/\alpha}\eta_n\Big)\chi(\eta).$$

Именно эти функции $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ фигурируют в условии (2.6) доказываемой теоремы 2.1. Из (2.6) и (2.15$_1$) следуют неравенства

$$\left\|F^{-1}(\widetilde{m}_j)\right\|_{1,E^n} \leqslant \mu, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Их мы используем для оценивания сверток $m_j * u_j \equiv v_j$ с $m_j \equiv F^{-1}(\widetilde{m}_j)$ и $u_j = F^{-1}(\widetilde{u}_j)$. Сначала получим оценки для супремумов u_j и их первых производных, представив эти функции в следующем виде:

$$u_j(x) = F^{-1}(\widetilde{u}_j) = F^{-1}(\widetilde{u}\,\widetilde{\Phi}_j) = u * \Phi_j =$$
$$= 2^{(n-1)j+j/\alpha} \int u(x-y)\Phi\big(2^j y', 2^{j/\alpha} y_n\big)\,dy = \qquad (2.17_1)$$
$$= \int \Big[u\Big(x' - \frac{z'}{2^j}, x_n - \frac{z_n}{2^{j/\alpha}}\Big) - u(x)\Big]\Phi(z)\,dz.$$

При этом мы использовали (2.13_1) и

$$\int\limits_{E^n} \Phi(z)\,dz = F(\Phi)\Big|_{\xi=0} = \widetilde{\Phi}(0) = 0.$$

Аналогично убедимся, что

$$\partial_{x_k} u_j(x) =$$
$$= 2^j \int \Big[u\Big(x' - \frac{z'}{2^j}, x_n - \frac{z_n}{2^{j/\alpha}}\Big) - u(x)\Big]\partial_{z_k}\Phi(z)\,dz, \quad k < n \quad (2.17_2)$$

и

$$\partial_{x_n} u_j(x) = 2^{j/\alpha} \int \Big[u\Big(x' - \frac{z'}{2^j}, x_n - \frac{z_n}{2^{j/\alpha}}\Big) - u(x)\Big]\partial_{z_k}\Phi(z)\,dz. \quad (2.17_3)$$

Из (2.17_k), $k = 1, 2, 3$ сделаем следующие закючения

$$\sup_{x \in E^n} \big|u_j(x)\big| \leqslant \big\langle u \big\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} 2^{j-j\gamma} \int \Big(\frac{|z'|}{2^j} + \frac{|z_n|^\alpha}{2^j}\Big)^\gamma \Phi(z)\,dz \equiv$$
$$\equiv c_1(\gamma,\alpha) 2^{-j\gamma} \big\langle u \big\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)}, \qquad (2.18_1)$$

$$\sup_{x \in E^n} \big|\partial_{x_k} u_j(x)\big| \leqslant \big\langle u \big\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} \int \Big(|z'| + |z_n|^\alpha\Big)^\gamma \Big|\partial_{z_k}\Phi(z)|\,dz \equiv$$
$$\equiv c_2(\gamma,\alpha) 2^{j-j\gamma} \big\langle u \big\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} \qquad (2.18_2)$$

для $k < n$, и

$$\sup_{x \in E^n} \big|\partial_{x_n} u_j(x)\big| \leqslant \big\langle u \big\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} 2^{j/\alpha - j\gamma} \int \Big(|z'| + |z_n|^\alpha\Big)^\gamma \Big|\partial_{z_k}\Phi(z)|\,dz \equiv$$

$$\equiv c_3(\gamma,\alpha) 2^{j/\alpha - j\gamma} \langle u\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)}. \tag{2.18$_3$}$$

Переходим теперь к сверткам

$$v_j(x) \equiv F^{-1}(\widetilde{v}_j) = F^{-1}(\widetilde{m}_j\, \widetilde{u}_j) =$$
$$= m_j * u_j = \int u_j(x-y) m_j(y) dy, \tag{2.19}$$

где $m_j = F^{-1}(\widetilde{m}_j)$, а $\widetilde{m}_j$ определено в (2.14_3). Для них верны неравенства

$$\sup_{x\in E^n} |v_j(x)| \leqslant \left\| m_j \right\|_{1,E^n} \sup_{x\in E^n} |u_j(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu \sup_{x\in E^n} |u_j(x)| \leqslant \mu c_1 \langle u\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} 2^{-j\gamma} \equiv d_1 2^{-j\gamma}, \tag{2.20$_1$}$$

$$\sup_{x\in E^n} |\partial_{x_k} v_j(x)| \leqslant \left\| m_j \right\|_{1,E^n} \sup_{x\in E^n} |\partial_{x_k} u_j(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu c_2 \langle u\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} 2^{j-j\gamma} \equiv d_2\, 2^{j-j\gamma}, \quad k<n, \tag{2.20$_2$}$$

$$\sup_{x\in E^n} |\partial_{x_n} v_j(x)| \leqslant \left\| m_j \right\|_{1,E^n} \sup_{x\in E^n} |\partial_{x_n} u_j(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu c_3 \langle u\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)} 2^{j/\alpha - j\gamma} \equiv d_3 2^{j/\alpha - j\gamma}. \tag{2.20$_3$}$$

Теперь для функции

$$v \equiv F^{-1}(\widetilde{v}) = \sum_j v_j,$$

равной $F^{-1}(\widetilde{m}\,\widetilde{u}) = m*u$, оценим разности $|v(x)-v(y)|$ при любых x, $y\in F^n$ с $\rho(x-y) = |x'-y'| + |x_n - y_n|^\alpha \leqslant 1$. Сделаем это так:

$$|v(x)-v(y)| \leqslant \sum_j |v_j(x) - v_j(y)| \leqslant \sum_{j\geqslant n_0} \ldots + \sum_{j\leqslant n_0} \ldots \equiv S_1 + S_2,$$

где $n_0 = -\log_2 \rho(x-y)$. Для мажорирования S_1 мы используем (2.20_1):

$$S_1 \leqslant \sum_{j\geqslant n_0} 2 \sup_{x\in E^n} |v_j| \leqslant 2d_1 \sum_{j\geqslant n_0} 2^{-j\gamma} = 2d_1 2^{-n_0\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\gamma k}} \equiv$$
$$\equiv e_1(\gamma,\alpha) 2^{-n_0\gamma} = e_1 \rho^\gamma(x-y).$$

Для оценки же S_2 используем (2.20_2) и (2.20_3)

$$S_2 \leqslant \sum_{j\leqslant n_0}\left(\sum_{k=1}^{n-1}|x_k-y_k|\sup_{x\in E^n}|\partial_{x_k}v_j(x)|+|x_n-y_n|\sup_{x\in E^n}|\partial_{x_n}v_j(x)|\right)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\leqslant n_0}\left(d_2|x'-y'|2^{j-j\gamma}+d_3|x_n-y_n|2^{j/\alpha-j\gamma}\right)\leqslant$$

$$\leqslant d_2|x'-y'|2^{(1-\gamma)n_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k(1-\gamma)}}+d_3|x_n-y_n|2^{n_0(1/\alpha-\gamma)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(1/\alpha-\gamma)}}=$$

$$=e_2|x'-y'|\rho^{\gamma-1}(x-y)+e_3|x_n-y_n|\rho^{\gamma-1/\alpha}(x-y)\leqslant$$

$$\leqslant (e_2+e_3)\rho^{\gamma}(x-y).$$

Таким образом, мы показал, что

$$|v(x)-v(y)|\leqslant (e_1+e_2+e_3)\rho^{\gamma}(x-y),$$

т.е. теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь банахово пространство $\mathcal{B}\equiv\mathcal{H}_0^{(\gamma,\alpha\gamma)}(E^n)$ функций $u: E^n\to E^1$ с нормой

$$\Big\|u\Big\|_{\mathcal{B}}=\Big\|u\Big\|_{2,E^n}+\big\langle u\big\rangle_{E^n}^{(\gamma,\alpha\gamma)}. \tag{2.21}$$

Пусть $\mathcal{B}$ есть замыкание множества $\dot{C}^{\infty}(E^n)$ в норме (2.21). Легко подсчитать, что

$$\sup_{x\in E^n}|u(x)|\leqslant \mu_1\Big\|u\Big\|_{\mathcal{B}} \tag{2.22}$$

с некоторой константой μ_1, определяемой только n, γ и α. Действительно, для $\forall x\in E^n$

$$|u(x)|=\left|u(y)+\frac{u(x)-u(y)}{\rho^{\gamma}(x-y)}\rho^{\gamma}(x-y)\right|\leqslant |u(y)|+\big\langle u\big\rangle^{(\gamma,\alpha\gamma)}\rho^{\gamma}(x-y).$$

Интегрируя это неравенство по $y\in\mathcal{B}_1(x)=\{y||\,|x-y|<1\}$ и деля результат на $\operatorname{mes}\mathcal{B}_1(x)$, придем к (2.22). Ввиду этого $\mathcal{H}_0^{(\alpha,\alpha\gamma)}(E^n)$ есть пересечения обычного пространства Гельдера $\mathcal{H}^{(\alpha,\alpha\gamma)}(E^n)$ с пространством $L_2(E^n)$.

Пусть $\widetilde{m}$ есть функция из теоремы 2.1 и

$$\sup_{\xi\in E^n}|\widetilde{m}(\xi)|\leqslant \mu_2<\infty. \tag{2.23}$$

В силу (2.23), как хорошо известно, для функции $\widetilde{m}$ оператор свертки с m является ограниченным оператором в пространстве $L^2(E^n)$, причем

$$\left\|m * u\right\|_{2,E^n} \leqslant \mu_2 \left\|u\right\|_{2,E^n}. \tag{2.24}$$

Из всего сказанного и теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. *Оператор свертки* (2.3_2), *порождаемый функцией* $\widetilde{m}$, *удовлетворяющий условиям теоремы* 2.1 *и* (2.23), *является ограниченным оператором в пространстве* $\mathcal{H}_0^{(\alpha,\alpha\gamma)}(E^n)$. *Его норма мажорируется числом, определяемым числами* n, γ, α *и мажорантами* μ *и* μ_2.

Аналогично теоремам 2.1 и 2.2 доказывается

Теорема 2.3. *Теоремы* 2.1 *и* 2.2 *справедливы при любых метриках вида*

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_k \in (0,1], \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Доказывается теорема 2.3 ровно так же, как теоремы 2.1 и 2.2, только возникающие при этом области $\omega = \left\{\xi \in E^n \,|\, |\rho(\xi) \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]\right\}$ и функции $\widetilde{m}_j$, χ и др. разные при разных метриках ρ; например,

$$\widetilde{\mathcal{M}}_j(\xi) = \widetilde{m}\left(\frac{\xi_2}{2^{j/\alpha_1}}, \dots, \frac{\xi_n}{2^{j/\alpha_n}}\right)\chi(\xi).$$

§3. Приложения

Главным объектом приложения теорем 2.1 и 2.2, ради которого и были они доказаны, являются следующие линейные системы гидродинамического типа:

$$\partial_t u_j - D_{jk,lm}\, \partial^2_{x_k x_m} u_l + \partial_{x_j} q = f_j, \quad j = 1,2,3, \tag{3.1_1}$$

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{3.1_2}$$

В них $u = (u_1, u_2, u_3) : E^4_+ = E^3 \times E^1_+ \to E^3$ и $q : E^4 : E^3 \times E^1_+ \to E^1$ являются искомыми функциями, а $f = (f_1, f_2, f_3) : E^4_+ \to E^3$ является заданным внешним полем. К системе (3.1_k), $k = 1, 2$, добавляется начальное условие Коши. Это условие удобно свести к однородному, т.е. к начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = 0. \tag{3.1_3}$$

Системы (3.1_1) появились как линеаризации нелинейных систем, предложенных мною для детерминалистического описания динамики жидкостей при любых градиентах скоростей. Эти системы имеют вид:

$$\partial_t v + v\cdot\nabla v - \operatorname{div}\frac{\partial D(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon(v)} + \nabla p = g, \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{3.2}$$

где v и p поля скоростей и давления, а g – внешние силы. Через $\varepsilon(v)$ обозначен симметризованный тензор ∇v, т.е. $\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\nabla v + \frac{1}{2}(\nabla v)^T$. Потенциал $D : M^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \to E^1_+$ определен на множестве вещественных симметрических матриц $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$. Он является гладкой выпуклой функцией, равной нулю при $\varepsilon = 0$, и имеющей определенный рост при $|\varepsilon| \equiv \big(\sum\limits_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}^2\big)^{1/2} \to \infty$. Если этот рост не менее, например, $2\frac{1}{2}$, то для (3.2) глобально однозначно разрешима задача Коши и основные начально-краевые задачи в классе обобщенных решений с конечной энергетической нормой (см. [3–5] и др.). Для более детального анализа свойств гладкости обобщенных решений этих задач важно иметь, по-возможности, наиболее точные оценки в разных пространствах для решений соответствующих линеаризованных задач. Задача (3.1_k), $k = 1, 2, 3$, является одним из основных представителей этих задач. Наиболее важной частью ее анализа является эта же задача, но с замороженными (т.е. постоянными) коэффициентами $D_{jk,lm}$. Именно ее разрешимость в пространствах Гельдера мы и докажем здесь, используя метод Фурье и результаты §2 о мультипликаторах. В пространствах L_q это было сделано в заметке [6] с привлечением критерия Лизоркина–Стейна о мультипликаторах в L_q. В [6] доказано и наличие оценки

$$\langle u_{xx}\rangle^{(\gamma,\gamma/2)}_{E^4_+} \leqslant c\langle f\rangle^{(\gamma,\gamma/2)}_{E^4_+}.$$

Но сделано это с помощью некоторого нестандартного рассуждения ad absurdum, не дающего значения константы c. Ниже я покажу, что эта оценка и такие же оценки для u_t и ∇q получаются просто с помощью результатов §2, причем постоянные в них определяются лишь численными параметрами, фигурирующими в наших условиях.

Итак, займемся задачей (3.1_k), $k = 1, 2, 3$. Коэффициенты $D_{jk,lm}$ в (3.1) являются значениями производных $\frac{\partial^2 D(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{jk}\partial\varepsilon_{lm}}$, вычисленными при каком-либо значении аргумента $\varepsilon \in M^{3\times 3}_{\text{sym}}$. Благодаря этому и симметричности тензора ε эти коэффициенты инварианты относительно перестановок пар $(\varepsilon_{jk}, \varepsilon_{lm}) \to (\varepsilon_{lm}, \varepsilon_{jk})$ и перестановок $j \leftrightarrow k$, $l \leftrightarrow m$ в ε_{jk} и ε_{lm}. Для нас существенным будет лишь то, что матрицы $A(\xi)$ с компонентами

$$A_{jl}(\xi) = D_{jk,lm}\,\xi_k\xi_m \quad \text{симметричны при любых} \quad \xi \in E^3. \tag{3.3}$$

Кроме этого для нас будет возможно и то, что набор $\{D_{jk,lm}\}$ удовлетворяет неравенствам

$$\beta_0|\varkappa|^2 \leqslant D_{jk,lm}\,\varkappa_{jk}\,\varkappa_{lm} \leqslant \beta_1|\varkappa|^2 \tag{3.4}$$

с какими-либо положительными постоянными β_0 и β_1 при любых $\varkappa \in M^{3\times 3}_{\text{sym}}$. Эти неравенства возникают из свойства выпуклости потенциала D.

Итак, мы будем предполагать далее, что коэффициенты $D_{jk,lm}$ вещественны, постоянны и обладают свойствами (3.3) и (3.4).

Для решения задачи (3.1_k), $k = 1, 2, 3$, воспользуемся преобразованием Фурье по $x \in E^3$ и $t \in E^1$. Пусть $\xi \in E^3$ и $\lambda \in E^1$ являются двойственными переменными, так что

$$\widetilde{u}_j(\xi,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{E^4} u_j(x,t)e^{-ix\xi - it\lambda}\,dxdt, \quad j = 1,2,3,$$

$$\widetilde{q}_j(\xi,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{E^4} q_j(x,t)e^{-ix\xi - it\lambda}\,dxdt,$$

и

$$\widetilde{f}_j(\xi,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{E^4} f_j(x,t)e^{-ix\xi - it\lambda}\,dxdt, \quad j = 1,2,3,$$

При этом мы считаем $u(x,t)$, $q(x,t)$ и $f(x,t)$ продолженными нулем для $x \in E^3$, $t < 0$, и

$$f_j(x,0) = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{3.5}$$

Благодаря (3.1_k), $k = 1, 2, 3$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{q}$ являются решениями следующей алгебраической системы

$$\begin{cases} i\lambda\widetilde{u}_j + A_{jl}(\xi)\widetilde{u}_l + i\xi_j\widetilde{q} = \widetilde{f}_j, \quad j = 1,2,3 \\ \xi_k\widetilde{u}_k = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $A_{jl}(\xi)$, определенные в (3.3), являются однородными полиномами от ξ второго порядка. Обозначим через $\nu_k(\xi)$, $k = 1,2,3$, собственные числа матрицы $A(\xi)$. Из (3.4) следуют неравенства

$$A_{jl}(\xi)\eta_j\eta_l \geqslant \beta_0|\xi|^2|\eta|^2 \tag{3.7}$$

при любых ξ, $\eta \in E^3$. Благодаря этому

$$\nu_k(\xi) \geqslant \beta_0|\xi|^2, \quad k = 1,2,3. \tag{3.8}$$

Главная матрица системы (3.6) имеет вид

$$B(\xi,\lambda) = \begin{pmatrix} i\lambda + a_{11}(\xi) & A_{12}(\xi) & A_{13}(\xi) & \xi_1 \\ A_{21}(\xi) & i\lambda + A_{22}(\xi) & A_{23}(\xi) & \xi_2 \\ A_{31}(\xi) & A_{32}(\xi) & i\lambda + A_{33}(\xi) & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа $\mu_k(\lambda,\xi) = i\lambda + \nu_k(\xi)$. Они являются 2-однородными функциями (ξ,λ) в следующем смысле

$$\mu_k(a^2\lambda, a\xi) = a^2\mu_k(\lambda,\xi), \quad \forall\, a > 0. \tag{3.9}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det B(\xi,\lambda) = -\mu_1\mu_2\eta_3^2 - \mu_2\mu_3\eta_1^2 - \mu_3\mu_1\eta_2^2, \tag{3.10$_1$}$$

где вектор $\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ связан с вектором ξ ортогональной матрицы $O(\xi)$, приводящей $A(\xi)$ к диагональному виду. Из (3.10$_1$) нетрудно заключить, что

$$|\det B(\xi,\lambda)| \geqslant m_0|\xi|^2(|\xi|^4 + \lambda^2) \tag{3.11}$$

с некоторой постоянной $m_0 > 0$. Значит при $|\xi| \neq 0$ система (3.6) однозначно разрешима. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_j(\xi,\lambda) &= \det{}^{-1}B(\xi,\lambda)\sum_{k=1}^{3} c_{jk}(\xi,\lambda)\widetilde{f}_k(\xi,\lambda), \\ \widetilde{q}_j(\xi,\lambda) &= \det{}^{-1}B(\xi,\lambda)\sum_{k=1}^{3} c_{4k}(\xi,\lambda)\widetilde{f}_k(\xi,\lambda), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $c_{jk}(\xi,\lambda)$ при $j < 4$ имеют структуру

$$c_{jk}(\xi,\lambda) = c_{jk,lm}(\xi,\lambda)\xi_l\xi_m, \quad j < 4, \tag{3.13$_1$}$$

причем $c_{jk,lm}(\xi,\lambda)$ суть 2-однородные полиномы $\xi,\lambda)$ в смысле (3.9). Функции c_{4k} являются 5-однородными полиномами (ξ,λ), т.е.

$$c_{4k}(a\xi,a^2\lambda)=a^5c_{4k}(\xi,\lambda). \qquad (3.13_2)$$

Для f, удовлетоврюящих условию

$$\operatorname{div} f=0, \qquad (3.14_1)$$

функции $\widetilde{f}$ удовлетворяют соотношениям

$$\xi_k\widetilde{f}_k(\xi,\lambda)=0, \qquad (3.14_2)$$

а функции c_{4k} обретают вид

$$c_{4k}(\xi,\lambda)=c_{4k,lmn}(\xi,\lambda)\xi_l\xi_m\xi_n \qquad (3.13_3)$$

с 2-однородными полиномами $c_{4k,lmn}$ в смысле (3.9).

Определитель матрицы $B(\xi,\lambda)$ имеет структуру

$$\det B(\xi,\lambda)=b_{kl}(\xi,\lambda)\xi_k\xi_l, \qquad (3.10_2)$$

где

$$b_{kl}(a\xi,a^2\lambda)=a^4b_{kl}(\xi,\lambda). \qquad (3.10_3)$$

Производным $\partial^2_{x_nx_r}u_j$ соответствуют их образы

$$-\xi_n\xi_r\widetilde{u}_j(\xi,\lambda)=-\sum_{k=1}^{3}\frac{\xi_n\xi_r c_{jk,lm}(\xi,\lambda)\xi_l\xi_m}{\det B(\xi,\lambda)}\widetilde{f}_k(\xi,\lambda), \qquad (3.15_1)$$

Фурье-образ производной $\partial_t u_j$ такой

$$i\lambda\widetilde{u}_j(\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{3}\frac{i\lambda c_{jk,lm}(\xi,\lambda)\xi_l\xi_m}{\det B(\xi,\lambda)}\widetilde{f}_k(\xi,\lambda), \qquad (3.15_2)$$

а Фурье-образом $\partial_{x_j}q$ в случае (3.14_1) являются функции

$$i\xi_j\widetilde{q}=\sum_{k=1}^{3}\frac{i\xi_j c_{4k,lmn}(\xi,\lambda)\xi_l\xi_m\xi_n}{\det B(\xi,\lambda)}\widetilde{f}_k(\xi,\lambda). \qquad (3.15_3)$$

Множители, стоящие при $\widetilde{f}_k(\xi,\lambda)$ во всех этих равенствх (3.15_k) и претендуют быть мультипликаторами $\widetilde{m}$, порождающими в пространствах $\mathcal{H}_0^{(\gamma,\gamma/2)}(E^4)$ ограниченные операторы.

Действительно, нетрудно проверить, что каждый из этих $\widetilde{m}$ является 0-однородной функцией (ξ,λ) в смысле

$$\widetilde{m}(a\xi, a^2\lambda) = \widetilde{m}(\xi,\lambda), \quad \forall\, a > 0.$$

Поэтому функции $\overset{\vee}{m}_j(\xi,\lambda) \equiv \widetilde{m}\left(\frac{\xi}{2^j}, \frac{\lambda}{2^{2j}}\right) = \widetilde{m}(\xi,\lambda)$ и проверять надо лишь одно неравенство

$$\left\| F^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}}) \right\|_{1,E^n} \leqslant \mu \tag{3.16}$$

для $\widetilde{\mathcal{M}}(\xi,\lambda) = \widetilde{m}(\xi,\lambda)\chi(\xi)$.

Для этого можно воспользоваться леммой 2.1, ибо, как нетрудно убедиться, справедливо неравенство

$$\left\| \widetilde{m} \right\|_{W_2^3(\omega)} \leqslant \mu_1. \tag{3.17}$$

Например, функция

$$\widetilde{m}(\xi,\lambda) = -\frac{\xi_n \xi_r c_{jk,lm}(\xi,\lambda)\xi_l\xi_m}{b_{kl}(\xi,\lambda)\xi_k\xi_l},$$

входящая в качестве множителя при $\widetilde{f}_k(\xi,\lambda)$ в (3.15_1) имеет особенности в $\omega = \left\{(\xi,\lambda) \mid |\xi| + \sqrt{|\lambda|} \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]\right\}$ только при $\xi = 0$; при этом сама она и ее производные по ξ до второго порядка являются ограниченными в ω функциями. Производные же по ξ третьего порядка имеют особенности порядка $1/|\xi|$, и потому их квадраты суммируемы по области ω. Все остальные производные от $\widetilde{m}$ до третьего порядка включительно тоже квадратично-суммируемы по ω и, тем самым, условие (2.8) выполнено с некоторой $\mu_1 < \infty$. Аналогично проверяется условие (2.8) для всех остальных коэффициентов при $\widetilde{f}_k$ в равенствах (15_k), $k = 1,2,3$. Благодаря этому мы можем воспользоваться теоремой 2.2 и сделать следующий вывод:

Теорема 3.1. *Задача Коши* (3.1_k), $k = 1,2,3$, *для любого* $f \in L_2(E^4_+)$ *имеет единственное решение* u, q, *обладающее свойствами:* $u \in W^{2,1}_{2,0}(E^4_+)$, $\nabla q \in L_2(E^4_+)$. *Если к тому же* f *принадлежит* $\mathcal{H}_0^{\gamma,\gamma/2} E^2_+)$ *с каким-либо* $\gamma \in (0,1)$ *и удовлетворяет* (3.5), *то решение* u, q *обладает также свойствами:* u_{xx}, u_t, $\nabla q \in \mathcal{H}_0^{\gamma,\gamma/2}(E^4_+)$.

Норма в $W_{2,0}^{2,1}(E_+^4)$ определяется равенством

$$\left\| u \right\|_{W_{2,0}^{2,1}(E_+^4)} = \left\| u_t \right\|_{2,E_+^4} + \left\| u_{xx} \right\|_{2,E_+^4} + \sup_{t \in E_+^1} \left\| u_x(\,\cdot\,,t) \right\|_{2,E^3},$$

причем нолик в $W^{2,1}$ указывает на обращение в нуль элементов этого пространства при $t = 0$.

Первое утверждение теоремы 3.1 можно доказать различными методами, аналогично тому, как это было сделано нами еще в середине 50-х годов для начально-краевых задач и задачи Коши для нестационарных уравнений разных типов (в их числе и уравнений Стокса). В данном случае, пожалуй, проще всего использовать преобразование Фурье по (x,t) и то, что получено для $\widetilde{u}$, $\widetilde{q}$ в данном параграфе. При этом сначала удобно считать $f \in \dot{C}^\infty(E_+^4)$ (т.е. носитель f лежит в отрытом полупространстве $E^3 \times (0,\infty)$). Для такого f образ Фурье $\widetilde{f}$ является бесконечно-гладкой быстро убывающей функцией. Поэтому функции $u = F^{-1}(\widetilde{u})$, $q = F^{-1}(\widetilde{q})$ для $\widetilde{u}$, $\widetilde{q}$ из (3.12) будут бесконечно гладкими функциями. Они и дают решение задачи (3.1_k), $k = 1,2,3$. Для них справедливы неравенства

$$\left\langle u_t \right\rangle_{E_+^4}^{(\gamma,\gamma/2)} + \left\langle u_{xx} \right\rangle_{E_+^4}^{(\gamma,\gamma/2)} + \left\langle \nabla q \right\rangle_{E_+^4}^{(\gamma,\gamma/2)} \leqslant c \left\langle f \right\rangle_{E_+^4}^{(\gamma,\gamma/2)}, \qquad (3.18_1)$$

а также неравенство

$$\left\| u_t \right\|_{2,E_+^4} + \left\| u_{xx} \right\|_{2,E_+^4} + \left\| \nabla q \right\|_{2,E_+^4} \leqslant c\|f\|. \qquad (3.18_2)$$

Это последнее есть следствие ограниченности мультипликаторов в равенствах (3.15_k), $k = 1,2,3$.

Полезно иметь ввиду и начилие оценок

$$\left\| u_t \right\|_{2,E_t^4}^2 + \beta_0 \left\| u_x(t) \right\|_{2,E_t^3} \leqslant \left\| f \right\|_{2,E_t^4}^2, \qquad (3.19_1)$$

$$\left\| u_{xx} \right\|_{2,E_t^4} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{\beta_0} \left\| f \right\|_{2,E_t^4} \qquad (3.19_2)$$

и

$$\left\| \nabla q \right\|_{2,E_t^4} \leqslant \beta_2 \left\| f \right\|_{2,E_t^4}, \qquad (3.19_3)$$

в которых $E_t^4 = E^3 \times (0,t)$, а β_2 – число, определяемое числами β_0 и β_1 из (3.4).

Первая из них получается в результате умножения (3.1_1) на $\partial_t u_j$ с последующим суммированием по $j = 1, 2, 3$ и интегрированием по $x \in E^3$. После интегрирования по частям во втором члене получается

$$\Big\|u_t\Big\|^2_{2,E^3} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{E^3} D_{jk,lm} u_{lx_m}\, u_{jx_k}\, dx = (f, u_t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big\|u_t\Big\|^2_{2,E^3} + \frac{1}{2}\Big\|f\Big\|^2_{2,E^3}.$$

Отсюда же в силу (3.4) следует (3.19_1). Оценка (3.19_2) получается из рассмотрения результата умножения (3.1_1) на $-\Delta u_j = \sum\limits_{n=1}^{3} u_{jx_nx_n}$, суммирования по $j = 1, 2, 3$ и интегрирования по E^3. Это дает равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x(t)\|^2 + \int\limits_{\Omega} D_{jk,lm}\, u_{lx_mx_n}\, u_{jx_kx_n} = -(f, \Delta u).$$

Интегрируя его по t и используя снова (3.4), получим

$$\beta_0\Big\|u_{xx}\Big\|^2_{2,E^4_t} \leqslant \Big\|f\Big\|_{2,E^4_t}\Big\|\Delta u\Big\|_{2,E^4_t},$$

а отсюда

$$\Big\|u_{xx}\Big\|_{2,E^4_t} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}\Big\|f\Big\|_{2,E^4_t}. \tag{3.20}$$

Из системы (3.1_1) и неравенств (3.19_k), $k = 1, 2$, получается оценка

$$\Big\|\nabla q\Big\|_{2,E^4_t} \leqslant \beta_2\Big\|f\Big\|_{2,E^4_t}. \tag{3.21}$$

Итак, функции $f \in \dot{C}^\infty(E^4_+)$ соответствует бесконечно-гладкое решение u, q, причем $u \in W^{2,1}_{2,0}(E^4_+)$, а $\nabla q \in L_2(E^4_+)$. Любую же $f \in \mathcal{H}^{\gamma,\gamma/2}_0(E^4_+)$ можно аппроксимировать функциями f^m из $\dot{C}^\infty(E^4_+)$ и, используя имеющиеся у нас оценки, убедиться, что решения u^m, q^m задачи (3.1_1), $k = 1, 2, 3$, соответствующие свободным членам f^m, сходятся должным образом к решению u, q этой же задачи со свободными членом f, причем u, q обладает свойствами, указанными в теореме 3.1.

В другой статье мы покажем, что результаты §2 позволяют сравнительно просто исследовать начально-краевые задачи в полупространствах для уравнений параболического типа и системы Стокса.

Литература

1. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I.* Springer-Verlag, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **256**, 1983, 391 p.
2. O. A. Ladyzhenskaya, *On multiplicators in Hölder spaces with nonhomogeneous metrics.* Report No. 16, 1999/2000, ISSN, 1103-467X, ISRN IML-R-16-99/100-SE, pp. 1–7.
3. О. А. Ладыженская, *Новые уравнения для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и глобальная разрешимость краевых задач для них.* — Труды МИАН СССР **102** (1967), 85–104.
4. О. А. Ладыженская, *О некоторых модификациях уравнения Навье–Стокса для больших градиентов скоростей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **7** (1968), 126–154.
5. O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for the modifications of the three-dimensional Navier–Stokes equations.* — Phil. Trans. Royal Soc. of London, Ser. A **246** (1994), 173–190.
6. О. А. Ладыженская, Г. А. Серегин, *Коэрцитивные оценки для решений линеаризаций модифицированных уравнений Навье–Стокса.* — Докл. РАН **370**, No. 6 (2000), 738–740.

Ladyzhenskaya O. A. On multiplicators in Hölder spaces with nonhomogeneous metrics.

In §2 sufficient conditions of boundedness of the convolution operators with kernel m in a nonhomogeneous Hölder space are given in terms of the Fourier-image of m. After that the result of §2 are used to prove solvability in a Hölder space of the Cauchy problem for the linear systems of hydrodynamical type.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 октября 2000 г.