Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

О. А. Ладыженская

О ПОГРЕШНОСТЯХ В ДВУХ МОИХ ПУБЛИКАЦИЯХ ПО УРАВНЕНИЯМ НАВЬЕ–СТОКСА И ИХ ИСПРАВЛЕНИЯХ

Можно утешать себя тем, что не ошибается только тот, кто ничего не делает. Но, тем не менее, огорчительно, если ошибка закралась в твою публикацию, и особенно неприятно, если она привела к неверным результатам другого исследователя. Именно о такой ошибке пойдет речь в п. 1.

1. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье–Стокса.

В работе [1] была предложена следующая аппроксимация первой начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса

$$\mathcal{M}(u,p) = u_t + \varepsilon\Delta^2 u - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = f, \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (1_1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (1_2)$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1_3)$$

$$\Delta u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1_4)$$

$$u\Big|_{t=0} = u^0, \quad (x,t)\in Q_T = \Omega\times(0,T), \quad (1_5)$$

и о ней сказано (первая часть теоремы 1), что эта задача глобально однозначно разрешима при любой $f \in L_2(Q_T)$ и $u^0 \in W_2^2(\Omega)$, $\operatorname{div} u^0 = 0$, $u^0\Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Однако, это неверно, ибо такая задача переопределена – в ней "слишком много" краевых условий. "Просто так" это не видно, тем более, что для оператора Δ^2 (а именно он входит в один из старших членов (1_1)) краевые условия (1_3) и (1_4) дают корректную задачу. Однако наличие связи (1_2) меняет дело. Оказывается, краевых условий должно быть пять, а не шесть. В качестве таковых можно взять, например, условия

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u\times n\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где n есть нормаль к поверхности $\partial\Omega$. Р. С. Сакс показал, что условия (2) удовлетворяют условиям дополнительности для системы

$$\varepsilon\Delta^2 u - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \tag{3}$$

с $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall\nu \in R^1$, причем проверил, что сама система (3) является обобщенно-эллиптической. Благодаря этому, согласно общей теории разрешимости для таких систем, задача (3) и (2) является нормально разрешимой (т.е. ее ядро и коядро конечномерны). Однако нетрудно убедиться непосредственно, что на самом деле задача (3) и (2) однозначно разрешима для всех f, например, из $L_2(\Omega)$, используя ту методику, с помощью которой я в середине 50-х годов доказала подобный факт для системы Стокса. В основе ее лежит энергетическое соотношение, получаемое из рассмотрения скалярного произведения $(\ ,\ )$ в $L_2(\Omega)$ уравнения (3) на u. А именно:

$$\varepsilon(\Delta^2 u, u) - \nu(\Delta u, u) + (\nabla p, u) = (f, u). \tag{4}$$

В нем третий член равен нулю,

$$-(\Delta u, u) = (u_x, u_x), \quad \text{а} \quad (\Delta^2 u, u) = (\Delta u, \Delta u). \tag{5}$$

Эти равенства получены с помощью интегрирования по частям, условий (2) и уравнения $\operatorname{div} u = 0$. Таким образом, из (4) следует

$$(\Delta u, \Delta u) = (f, u). \tag{6}$$

Отсюда оценивается норма u в $W_2^2(\Omega)$. Это же равенство (6) и такие же оценки имеют место и для системы (3) с включенными в нее членами $u\cdot\nabla u$. Это позволяет доказать и для нее глобальную разрешимость в $W_2^2(\Omega)$ краевой задачи (2) (так, как это было сделано мною для стационарной системы Навье–Стокса).

Для нестационарной задачи (1_1), (1_2), (2), (1_5) глобальная однозначная разрешимость доказывается с помощью следующего соотношения баланса энергий

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \varepsilon\|\Delta u\|^2 + \nu\|u_x\|^2 = (f, u). \tag{7}$$

Оно получается из соотношения

$$\Big(\mathcal{M}(u, p), u\Big) = (f, u).$$

Однако в [1] использованы и другие соотношения, которые верны при условиях (1_3), (1_4), но не имеют места при условиях (2). Одно из таких соотношений таково

$$(\Delta u, \nabla q) = 0. \tag{8}$$

Условия (1_3), (1_4) использованы и при выводе соотношения

$$(\Delta^2 u, -\Delta u) = (\Delta u_x, \Delta u_x). \tag{9}$$

Вряд ли оно верно при условиях (2).

Для тех вопросов, которые меня интересовали в [1], можно использовать вместо аппроксимации (1_k), $k = 1, \dots, 5$, аппроксимацию (1_1), (1_2), (2), (1_5). Ее решения u^ε сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решениям u первой начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса, причем в предположении

$$\sup_{t\in(0,T]} \int\limits_\Omega |u^\varepsilon(x,t)|^{3+\delta} dx \leqslant c(\delta), \quad \delta > 0 \tag{10}$$

последовательность $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ будет иметь единственный предел (именно это утверждается во второй половине теоремы 1).

Однако такой условный результат перестал быть интересным после того, как были доказаны другие более полезные условные результаты, не связанные с какой-либо аппроксимацией уравнений Навье–Стокса. Например, в моей работе [2] 1967 года доказано, что если u есть обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered} u_t - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = u^0, \quad (x,t) \in Q_T = \Omega\times(0,T), \quad \Omega \in R^3, \end{gathered} \tag{11}$$

принадлежащее какому-нибудь из пространств $L_{q,r}(Q_T)$ с

$$\frac{2}{r} + \frac{3}{q} = 1, \quad r \in [2,\infty), \quad q \in (3,\infty], \tag{12_1}$$

или

$$q > 3, \quad r = \infty, \tag{12_2}$$

то оно единственно и его гладкость растет с повышением гладкости f и u^0. Как видим, условие (10) стыкуется с условием (12_2). В §4 главы VI из [3] есть теорема $12'$, являющаяся другим условным результатом по задаче (11).

Теорема 1 из [1], к сожалению, имеется (правда, без доказательства) в первом русском издании [4] моей книги (как теорема 13, §6, гл. VI) и в ее английском переводе [5] (теорема 13, §7, гл. VI). Из второго русского издания [3] я ее выбросила, сообщив заинтересованным, что она неверна. Никаких следствий из нее я никогда не делала и забыла о ее существовании. Однако она сослужила плохую службу моему коллеге А. П. Осколкову. Он использовал аппроксимацию (1_k), $k = 1, \dots, 5$ для изучения первой начально-краевой задачи для водных растворов полимеров [6, 7]. Увидев эти публикации, я сообщила ему о неверности теоремы 1, а также о возможности взять вместо условий (1_3) и (1_4) краевые условия (2), но такие условия его не устраивали, ибо при них он терял важное для него соотношение (8). После этого Осколков заменил условие прилипания условием проскальзыванием и для него все сделал корректно. Вопрос же о разрешимости для систем водных растворов полимеров начально-краевой задачи с условиями прилипания остался открытым.

Укажем еще два недочета из §2 работы [1].

1) В теореме 2 надо было указать, что начальное поле $\vec{u}^{\,0}$ должно удовлетворять (необходимым) условиям: $\operatorname{div} \vec{u}^{\,0} = 0$ и $(u^0, n)\Big|_S = 0$ (понимаемым в обобщенном смысле). В терминологии книг [3–5] эти требования записываются так: $\vec{u}^{\,0} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$.

2) В теореме 3 также не указано, что $\vec{u}^{\,0}$ должно еще удовлетворять необходимым условиям $\operatorname{div} \vec{u}^{\,0} = 0$ и $u^0\Big|_S = 0$.

2. О стационарных потоках вязких несжимаемых жидкостей в неограниченных трехмерных областях с цилиндрическими выходами на бесконечность.

В заметке [8] я анонсировала существование по крайней мере одного стационарного бездивергентного решения v уравнений Навье–Стокса, стремящегося к течению Пуазейля в каждом из двух цилиндрических выходов области течения на бесконечность. Однако, сразу же после выхода заметки в свет я поняла, что мое доказательство имеет лакуны.

Правильная постановка и исследование стационарных задач для уравнений Навье–Стокса в неограниченных областях с выходами типа выходов заметки [8] даны в работах [9, 10].

Литература

1. О. А. Ладыженская, *О нестационарных уравнениях Навье–Стокса.* — Вестн. Ленингр. университета **19** (1958), 9–18.
2. О. А. Ладыженская, *О единственности и гладкости обобшенных решений уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **5** (1967), 169–185.
3. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы для вязкой несжимаемой жидкости.* Второе изд., "Наука", М. (1970).
4. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы для вязкой несжимаемой жидкости.* ГИФМЛ, М. (1961).
5. O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* Gordon and Breach, New York-London (1963).
6. А. П. Осколков, *О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **27** (1972), 145–160.
7. А. П. Осколков, *О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **38** (1973), 98–136.
8. О. А. Ладыженская, *Стационарные движения вязкой несжимаемой жидкости в трубе.* — ДАН СССР **124**, No. 3 (1959), 353–553.
9. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *Нахождение в неограниченных областях решений стационарных краевых задач для уравнений Навье–Стокса, имеющих бесконечную диссипацию.* — ДАН СССР **249**, No. 4 (1979), 828–831.
10. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Навье–Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **96** (1980), 117–160.

Ladyzhenskaya O. A. On some gaps in two my publications on the Navier–Stokes equations and their improvements.

We indicate some gaps in two of my publications of 1958 and 1959 years and describe how to imptove them.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 октября 2000 г.