Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

Н. А. Каразеева

ОБ АТТРАКТОРАХ ДЛЯ ε-АППРОКСИМАЦИЙ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Светлой памяти Александра Васильевича Иванова посвящается

В работе рассматриваются аттракторы для ε-аппроксимаций уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта. Подобные ε-аппроксимации для уравнений Навье-Стокса были предложены и изучены О. А. Ладыженской [3], О. А. Ладыженской и Г. А. Серегиным [4]. Рассматриваемые в данной работе системы уравнений были предложены А. П. Осколковым, им же исследована разрешимость различных начально-краевых задач для подобных систем.

Аттракторы и динамические системы для самих уравнений Кельвина–Фойгта и Олдройта исследовались в совместных работах А. П. Осколкова, А. А. Котсиолиса и автора [8, 9]. В работе [8] построен минимальный глобальный B-аттрактор для системы уравнений, описывающих движение жидкостей Олдройта. Показано, что полугруппа разрешающих операторов вполне непрерывна. В работе [9] доказывается, что полугруппа разрешающих операторов для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта асимптотически компактна (в терминологии О. А. Ладыженской), что позволяет сделать заключение о существовании минимального глобального аттрактора и доказать некоторые его свойства (компактность, конечномерность, связность).

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} v^\varepsilon_t - \nu\Delta v^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, v^\varepsilon + v^\varepsilon_k v^\varepsilon_{x_k} + \frac{1}{2}\, v^\varepsilon\,\mathrm{div}\, v^\varepsilon - \\ \qquad\qquad -\beta\Delta u^\varepsilon - \frac{\beta}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u^\varepsilon - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v^\varepsilon = f \\ u^\varepsilon_t + \alpha u^\varepsilon = v^\varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 99-01-00108 и Федеральной целевой программы "Интеграция" 326.53.

Эта система получится, если в системе уравнений, описывающих движение жидкости Кельвина–Фойгта уравнение несжимаемости

$$\operatorname{div} v = 0$$

заменить на возмущенное уравнение

$$\varepsilon p^{\varepsilon} + \operatorname{div} v^{\varepsilon} = 0. \tag{2}$$

Система рассматривается в цилиндре $Q_\infty = \Omega \times [0, \infty)$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$ ограничена. Предположим, что на границе цилиндра выполнено условие прилипания

$$v^{\varepsilon}\big|_{\partial Q_\infty} = 0, \quad u^{\varepsilon}\big|_{\partial Q_\infty} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, решение $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$ удовлетворяет начальным данным:

$$v^{\varepsilon}(x, 0) = v_0^{\varepsilon}(x), \quad u^{\varepsilon}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

В работе А. П. Осколкова [7] доказано, что начально-краевая задача (1), (3), (4) имеет единственное решение. А именно доказано, что при условиях

$$\partial\Omega \in C^2; \quad f, f_t \in L_2(Q_\infty);$$

$$v_0^{\varepsilon} \in W_2^1(\Omega), \quad \|v_0^{\varepsilon}\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant C_1 \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{5}$$

начально-краевая задача (1), (3), (4) при $\forall \varepsilon > 0$ имеет единственное решение $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$, обладающее свойствами

$$v^{\varepsilon} \in W_\infty^1([0, \infty), W_2^1(\Omega))$$

и удовлетворяет оценке

$$\|v^\varepsilon\|^2_{W^1_\infty([0,\infty), W^1_2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\| \operatorname{div} v^\varepsilon, \operatorname{div} u^\varepsilon\|^2_{L_\infty([0,\infty), L_2(\Omega))}$$
$$\leqslant c_2(c_1, \|f, f_t\|_{2, Q_\infty}) \tag{6}$$

Перепишем систему в матричном виде. Пусть вектор $\vec{\varphi}^{\varepsilon} = (v^\varepsilon, u^\varepsilon)$. Введем операторы

$$\mathcal{A}^{\varepsilon}(v^\varepsilon) = -\nu \Delta v^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad} \operatorname{div} v^\varepsilon + v_k^\varepsilon v_{x_k}^\varepsilon +$$
$$+ \frac{1}{2} v^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon \tag{7}$$

$$B^\varepsilon(u^\varepsilon) = -\beta\Delta u^\varepsilon - \frac{\beta}{\varepsilon}\text{grad div}\, u^\varepsilon. \tag{8}$$

Рассмотрим также матричные операторы

$$\Lambda_1\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^\varepsilon & B^\varepsilon \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\varepsilon \\ u^\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\Lambda_2\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\mu\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\varepsilon \\ u^\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тогда система (1) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} + \Lambda_1\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} + \frac{d}{dt}\Lambda_2\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = \vec{F}, \tag{11}$$

где вектор $\vec{F} = (f, 0)$. Начально-краевая задача (1), (3), (4) перепишется в новых обозначениях

$$\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}\big|_{t=0} = (v^\varepsilon, u^\varepsilon)\big|_{t=0} = (v_0^\varepsilon(x), 0), \tag{12}$$

$$\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}\big|_{\partial Q_\infty} = (0, 0). \tag{13}$$

Введем фазовое пространство задачи $E_1(\Omega) = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^{\,\varepsilon}]_{E_1(\Omega)} = (v, v')_{2,\Omega} + \mu(v_x, v'_x)_{2,\Omega} + \beta(u_x, u'_x)_{2,\Omega}. \tag{14}$$

Из теоремы о существовании и единственности решения следует, что в фазовом пространстве $E_1(\Omega)$ задачи определена полугруппа разрешающих операторов V_t, ставящих в соответствие начальным данным $(v_0^\varepsilon, 0) = \vec{\varphi}_0^{\,\varepsilon}$ решение начально-краевой задачи $\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} : V_t(\vec{\varphi}_0^{\,\varepsilon}) = \vec{\varphi}^{\,\varepsilon}(x, t)$.

Рассмотрим матричные операторы

$$\Lambda_3\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\nu\Delta - \frac{1}{\varepsilon}\text{grad div} & B^\varepsilon \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\varepsilon \\ u^\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\Lambda_4\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = \begin{pmatrix} v_k^\varepsilon v_{x_k}^\varepsilon + \frac{1}{2}v^\varepsilon \,\text{div}\, v^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\varepsilon \\ u^\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Представим операторы V_t в виде суммы $V_t = W_t + U_t$, где W_t – решение линейной однородной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\chi}^{\,\varepsilon}}{dt} + \Lambda_3\vec{\chi}^{\,\varepsilon} + \frac{d}{dt}\Lambda_2\vec{\chi}^{\,\varepsilon} = 0, \\ \vec{\chi}^{\,\varepsilon}\big|_{t=0} = \vec{\varphi}^{\,\varepsilon}(0). \end{cases} \tag{17}$$

U_t – решение задачи с правой частью, нелинейно зависящей от $\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}$:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\psi}^{\,\varepsilon}}{dt} + \Lambda_3\vec{\psi}^{\,\varepsilon} + \frac{d}{dt}\Lambda_2\vec{\psi}^{\,\varepsilon} = \vec{G}(t), \\ \vec{\psi}^{\,\varepsilon}\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{18}$$

где вектор $\vec{G}(t) = \vec{F}(x) - \Lambda_4(\vec{\varphi})$. Мы покажем, что операторы W_t обладают экспоненциальной по времени оценкой, а операторы U_t вполне непрерывны. Тогда из построенной О. А. Ладыженской теории аттракторов для абстрактных полугрупп [2] следует, что для решений рассматриваемой начально-краевой задачи существует минимальный глобальный B-аттрактор $\mathfrak{M}^\varepsilon$. Он является компактным, конечномерным, связным множеством. Получим для задачи (17) энергетические оценки. Распишем (17) покомпонентно. Пусть вектор $\vec{\chi}^{\,\varepsilon} = (w^\varepsilon, y^\varepsilon)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} - \nu\Delta w^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,w^\varepsilon - \beta\Delta y^\varepsilon - \\ \qquad -\frac{\beta}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,y^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial t}\mu\Delta w^\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial y^\varepsilon}{\partial t} - w^\varepsilon + \alpha y^\varepsilon = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Умножим первое из уравнений этой системы на w^ε и проинтегрируем по Ω, учитывая, что $w^\varepsilon = \frac{\partial y^\varepsilon}{\partial t} + \alpha y^\varepsilon$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} + \nu\|w^\varepsilon_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon}\|\,\mathrm{div}\,w^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} +$$
$$+\frac{1}{2}\mu\frac{d}{dt}\|w^\varepsilon_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\beta\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon_x\|^2_{2,\Omega} +$$
$$+\frac{\beta}{\varepsilon}\frac{d}{dt}\|\,\mathrm{div}\,y^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} + \alpha\beta\|y^\varepsilon_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{\alpha\beta}{\varepsilon}\|\,\mathrm{div}\,y^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} = 0 \tag{20}$$

Откидывая положительные члены, мы получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\vec{\chi}^{\,\varepsilon}\|^2_{E_1} + \mu^*\|\vec{\chi}^{\,\varepsilon}\|^2_{E_1} \leqslant 0, \tag{21}$$

где константа μ^* зависит от ν, $\alpha\beta$, μ и λ_1 – первого собственного числа оператора Δ. Неравенство (21) и дает необходимую оценку:

$$\|W_t\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}\|_{E_1} = \|\vec{\chi}^{\,\varepsilon}(t)\|_{E_1} \leqslant e^{(-\mu^*/2)t}\|\vec{\chi}^{\,\varepsilon}(0)\|_{E_1} =$$
$$= e^{(-\mu^*/2)t}\|\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}(0)\|_{E_1}. \tag{22}$$

Теперь докажем компактность операторов U_t. Действительно, пусть $\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} \in E_1$.

Оператор $G(\vec{\varphi}^{\,\varepsilon})$ имеет вид

$$G(\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}) = f(x) - v_k^\varepsilon v_{x_k}^\varepsilon - \frac{1}{2} v^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon. \tag{23}$$

Следовательно, $G(\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}) \in L_{4/3} \times L_{4/3}$, так как $v \in L_4$, $v_x \in L_2$.

Покажем, что для оператора U_t верна оценка

$$\|U_t \vec{\varphi}^{\,\varepsilon}\|_{p,\Omega}^2 = \|\vec{\psi}^{\,\varepsilon}(t)\|_{p,\Omega}^{(2)} \leqslant c_3 \|\vec{G}(t)\|_{p,\Omega}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad p \in (1,2), \tag{24}$$

причем постоянная C_3 зависит только от μ, ν и области Ω. Действительно, оператор Λ_3 – эллиптический оператор порядка 2, переводит $W_p^2 \times W_p^2$ в $L_p \times L_p$, имеет ограниченный обратный Λ_3^{-1}. Применим Λ_3^{-1} к обеим частям (18) и проинтегрируем по t от 0 до $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда

$$\Lambda_3^{-1} \vec{\psi}^{\,\varepsilon} + \int_0^t \vec{\psi}^{\,\varepsilon} + \Lambda_3^{-1} \Lambda_2 \vec{\psi}^{\,\varepsilon} = \int_0^t \Lambda_3^{-1} \vec{G} \equiv \vec{H}(t). \tag{25}$$

В уравнении (25) оператор $D = \Lambda_3^{-1} + \Lambda_3^{-1}\Lambda_2$ ограничен в пространстве $W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$, а $\vec{H}(\cdot, t) \in W_p^2(\Omega)$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Тогда для нахождения $\vec{\psi}^{\,\varepsilon} \in W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ мы получаем операторно-интегральное уравнение типа Вольтерра

$$D\vec{\psi}^{\,\varepsilon}(t) + \int_0^t \vec{\psi}^{\,\varepsilon}(\tau) d\tau = \vec{H}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{26}$$

с ограниченным в пространстве $W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ оператором D. Уравнение (26) имеет в пространстве $W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ единственное решение, и для этого решения верна оценка

$$\|\vec{\psi}^{\,\varepsilon}(t)\|_{p,\Omega}^{(2)} \leqslant c_4 \|\vec{H}(t)\|_{p,\Omega}^{(2)}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{27}$$

из которой, в свою очередь, и следует оценка (24). Из оценки (24) при $p = 4/3$ следует компактность оператора U_t, поскольку пространство $W_{4/3}^2(\Omega) \times W_{4/3}^2(\Omega)$ компактно вкладывается в $W_2^{1+\varepsilon}(\Omega) \times W_2^{1+\varepsilon}(\Omega)$.

2. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, v^\varepsilon + v_k^\varepsilon v_{x_k}^\varepsilon + \frac{1}{2}v^\varepsilon\,\mathrm{div}\, v^\varepsilon - \\ \qquad -\beta\Delta u^\varepsilon - \frac{\beta}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u^\varepsilon = f \\ u_t^\varepsilon + \alpha u^\varepsilon = v^\varepsilon \end{cases} \tag{28}$$

Эта система также является регуляризацией системы, описывающей движение жидкости Олдройта. Будем Рассматривать эту систему в цилиндре $Q_\infty = \Omega\times[0,\infty)$, где область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$ ограничена. Поставим условие прилипания на границе цилиндра Q_∞ и зададим начальное условие:

$$v^\varepsilon(x,0) = v_0^\varepsilon(x), \quad u^\varepsilon(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{29}$$

$$v^\varepsilon\big|_{\partial Q_\infty} = 0, \quad u^\varepsilon\big|_{\partial Q_\infty} = 0. \tag{30}$$

В работе А. П. Осколкова [10]доказано существование и единственность решения начально-краевой задачи (28), (29), (30), а именно доказано, что если $\partial\Omega \in C^2$, $f \in L_\infty(\mathbb{R}^+, L_2(\Omega))$, $f_t \in L_2(Q_\infty)$, $v_0^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$, $\|v_0^\varepsilon\|_{2,\Omega}^1 \leqslant C_5$, то начально-краевая задача (28), (29), (30) имеет единственное решение $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$, $v^\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{T}^+, W_2^1(\Omega))$, удовлетворяющее оценке

$$\|v^\varepsilon\|_{L_\infty(\mathbb{R}+,W_2^1(\Omega))} + \|v_t^\varepsilon\|_{L_\infty(\mathbb{R}+,L_2(\Omega))} \leqslant$$

$$\leqslant c_6(\|v_0^\varepsilon\|_{2,\Omega}^{(1)}, \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}+,L_2(\Omega))}, \|f_t\|_{L_2(Q_\infty)}) \tag{31}$$

и имеет место повышение гладкости, т.е. $v^\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{R}^+, W_2^2(\Omega))$ и

$$\|v^\varepsilon\|_{L_\infty(\mathbb{R}+,W_2^2(\Omega))} \leqslant C_7(\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}+,L_2(\Omega))}, \|f\|_{L_2(\mathbb{R}+,W_2^1(\Omega))}) \tag{32}$$

Переходя к матричной форме записи системы и используя обозначения п. 1, мы получим следующее эволюционное уравнение

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} + \Lambda_1\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = \vec{F} \tag{33}$$

и начально-краевую задачу

$$\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}\big|_{t=0} = (v^\varepsilon, u^\varepsilon)\big|_{t=0} = (v_0^\varepsilon(x), 0), \quad x \in \Omega \tag{34}$$

$$\vec{\varphi}^{\,\varepsilon}\big|_{\partial Q_\infty} = 0. \tag{35}$$

Введем фазовое пространство $E_0(\Omega)$ векторов $\vec{\varphi}^{\,\varepsilon} = (v^\varepsilon, u^\varepsilon)$: $E_0(\Omega) = L_2(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$ с соответствующим скалярным произведением:

$$(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}\,')_{E_0(\Omega)} = (v, v')_{2,\Omega} + \beta(u_x, u'_x)_{2,\Omega},$$

а также вспомогательные пространства $E_n(\Omega) = W_2^n(\Omega) \times W_2^{n+1}(\Omega)$ со скалярным произведением:

$$(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}\,')_{E_n(\Omega)} = (v, v')_{2,\Omega}^{(n)} + \beta(u, u')_{2,\Omega}^{(n+1)}.$$

В силу существования и единственности решения начально-краевой задачи (33), (34), (35) в фазовом пространстве $E_0(\Omega)$ определена полугруппа V_t разрешающих операторов, ставящих в соответствие начальным данным $(v_0^\varepsilon, 0) = \vec{\varphi}_0^{\,\varepsilon}$ решение начально-краевой задачи:

$$V_t(\vec{\varphi}_0^{\,\varepsilon}) = \vec{\varphi}^{\,\varepsilon}(x, t).$$

Тогда из результатов А. П. Осколкова [10] следует, что операторы V_t вполне непрерывны в фазовом пространстве задачи $E_0(\Omega)$.

Действительно, оценка (32) показывает, что операторы V_t переводят ограниченное множество из пространства $E_0(\Omega)$ в ограниченное множество из пространства $E_1(\Omega)$, а последнее компактно в $E_0(\Omega)$.

Из построенной О. А. Ладыженской теории аттракторов для абстрактных полугрупп операторов [2] следует, что благодаря компактности операторов V_t для начально-краевой задачи (28), (29), (30) существует минимальный глобальный B-аттрактор $\mathfrak{M}_\varepsilon$, кроме того $\mathfrak{M}_\varepsilon$ является компактным, конечномерным, связным множеством в фазовом пространстве $E_0(\Omega)$.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* 2-ое изд. М., Наука (1970).
2. О. А. Ладыженская, *О нахождении минимальных глобальных B-аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными.* Препринт ЛОМИ, Е-3-87, Л. (1987).
3. О. А. Ладыженская, *О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач.* Труды МИАН СССР, **102** (1967), 85–104.
4. О. А. Ладыженская, Г. А. Серегин, *Об одном способе приближенного решения начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса.* — Записки научн. семин. ЛОМИ **197** (1992), 87–119.

5. А. П. Осколков, *Нелокальные проблемы для уравнений вязкоупругих жидкостей.* Бюлл. Сибирск. об-ва, **2** (1990), 14–16.
6. А. П. Осколков, *Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **181** (1990), 122–163.
7. A. P. Oskolkov, *Nonlocal problems for equations of Kelvin-Voight fluids.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **197** (1992), 120–158.
8. Н. А. Каразеева, А. А. Котсиолис, А. П. Осколков, *О динамической системе, порожденной уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка L.* — Записки научн. семин. ЛОМИ, **164** (1987), 47–53.
9. Н. А. Каразеева, А. А. Котсиолис, А. П. Осколков, *Об аттракторах и динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей.* Препринт ЛОМИ, Р-10-88 (1988).
10. A. P. Oskolkov, *The penalty method for the equations of viscoelastic media.* Books of abstracts of Intern. Conf. "Asymptotics in mechanics," St.-P. (1994), Записки научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 123–134.

Karazeeva N. A. On attraktors for ε-approximations of equations described non-Newtonian flows.

We prove the existence of minimal global B-attractors for ε-approximations of equations decribed 2-dimensional Oldroyd flows and 3-dimensional Kelvin-Voight flows. In both cases the attractors are compact finite dimensional connected sets.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 ноября 2000 г.