Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

Г. Я. Арешкин

О РЕШЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО И 2-ГО РОДА, ЯДРОМ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ КООРДИНАТАМИ.

Эта работа посвящена светлой памяти Александра Васильевича Иванова, с которым мне посчастливилось в течение многих лет вести преподавательскую работу в Высшем Военном Инженерно-Строительном Училище МО (ныне ВИТУ). Александр Васильевич обладал счастливой способностью сочетать свое огромное математическое дарование с умением ясно, доходчиво, интересно, и в то же время достаточно строго читать лекции по высшей математике, за что его слушатели неизменно платили ему большим уважением и любовью. Он активно участвовал в работе кафедры, содействовал повышению научной квалификации преподавателей кафедры, участвовал в написании учебных пособий. Во втором издании нашего совместного с ним учебного пособия "Элементы теории рядов Фурье и уравнений математической физики" (1988 г.) центральные главы 2 и 3 написаны целиком Александром Васильевичем и содержат ряд ценных методических находок.

Личное обаяние Александра Васильевича, его душевность оставили неизгладимую память о нем, огромное сожаление о его безвременной кончине.

Введение

На основании обобщенной теоремы Рисса–Фишера о представлении линейных непрерывных преобразований гильбертовых пространств вводится понятие координат таких преобразований. Строится полная теория разрешимости функциональных уравнений 1-го и 2-го рода, ядра которых имеют ортогональные координаты, с получением всех решений таких уравнений.

I. В дальнейшем H обозначает комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $G = \{g_k^0\}_K$ – какой-нибудь его ортонормированный базис.

Предложение 1. *Всякое преобразование $V \in L(H)$ однозначно определяет последовательность векторов $\{y_k\} \subset H$ такую, что*

$$\forall\, x \in H \colon Vx = \sum_K (x, y_k) g_k^0. \tag{1}$$

При этом, $y_k = V^* g_k^0$, $k \in K$.

Это предложение является обобщением теоремы Рисса–Фишера о представлении линейных функционалов на линейные операторы (в сепарабельном случае). Более того, представление (1) фактически содержит в себе эту теорему. Действительно, пусть $\Phi(x)$ – линейный непрерывный функционал на H. Образуем оператор: $Vx = \Phi(x) g_1^0$. Имеем: $V \in L(H)$. Рассмотрим представление этого оператора по формуле (1) и сравним его с самим оператором $\Phi(x) g_1^0$. Получим: $\forall\, x \in H \colon \Phi(x) = (x, y_1)$. В силу произвольности $x \in H$ такое представление функционала Φ единственно. Но это и есть теорема Рисса–Фишера. Заметим, что доказательство представления (1) не нуждается в использовании этой теоремы.

Векторы y_k, $k \in K$, сами однозначно определяющие V, мы называем координатами V (в базисе G) и пишем $V = (y_k)_K$. Если последовательность $(y_k)_K$ ортогональна, говорим, что V имеет ортогональные координаты в базисе G. Класс всех преобразований с ортогональными координатами (каждое в своем базисе) обозначим $L_\perp(H)$.

Лемма 1. *Любые две ортонормированные последовательности векторов из H: $\{e_i^0\}_{\mathcal{J}}$ и $\{g_i^0\}_{\mathcal{J}}$ и любые комплексные числа $\mu_i \neq 0$, $i \in \mathcal{J}$, для которых $\sup\limits_{\mathcal{J}} |\mu_i| < \infty$, однозначно определяют $V \in L_\perp(H)$ с разложением*

$$\forall\, x \in H \colon Vx = \sum_{\mathcal{J}} \mu_i (x, e_i^0) g^0. \text{[1]} \tag{2}$$

[1] Другие свойства класса $L_\perp(H)$ см. в п. VI.

II. **Теорема 1.**[2] *Для равномерной сходимости представления* (1) *к* V *необходимо, а если последовательность* $\{y_k\}_K$ *ортогональна, то и достаточным, чтобы*

$$\lim_K \|y_k\| = 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Для компактности преобразования* V *с ортогональными координатами* $(y_k)_K$ *необходимо и достаточно выполнение условия* (3).

III. Полагая в разложении (1) $y_k = \mu_k e_k^0$, $k \in K$, и обозначая через $\mathcal{J}$ множество тех k, для которых $\mu_k \neq 0$, перепишем (1) в виде (2).

Введем подпространства в H:

$$\overset{\cup}{H} = \overline{\left[\left\{e_i^0\right\}_{\mathcal{J}}\right]}, \quad \overset{\cap}{H} = \overline{\left[\left\{g_i^0\right\}_{\mathcal{J}}\right]}.$$

Ниже считаем, что в базисе G $V \in L_\perp(H)$. Сужение V на $\overset{\cup}{H}$ обозначаем через $\overset{\cup}{V}$. $x \in H$ влечет: $x = \overset{\cup}{h} + \widehat{h}$, где $\overset{\cup}{h} \in \overset{\cup}{H}$, $\widehat{h} \in \overset{\cup}{H}{}^\perp$.

Теорема 4. $V^* \in L_\perp(H)$; $\forall x \in H: V^*x = \overset{\cup}{V}{}^*\overset{\cap}{q} = \sum\limits_i \overline{\mu}_i \left(\overset{\cap}{q}, g_i^0\right) e_i^0$, *где* $x = \overset{\cap}{q} + \widehat{q}$, $\overset{\cap}{q} \in \overset{\cap}{H}$, $\widehat{q} \in \overset{\cap}{H}{}^\perp$.

Следствие 1. $\forall i \in \mathcal{J}: \overset{\cup}{V} e_i^0 = \mu_i g_i^0$, $\overset{\cup}{V}{}^* g_i^0 = \overline{\mu}_i e_i^0$.

IV. Уравнение

$$Vx = q, \quad q \in H, \tag{4}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда $q \in R(\overset{\cup}{V})$.

Теорема 5. *Вектор* $q \in H$ *принадлежит* $(\overset{\cup}{V})$ *тогда и только тогда, когда* $q \in \overset{\cap}{H}: q = \sum\limits_{\mathcal{J}} (q, g_i^0) g_i^0$; *при этом должен сходиться ряд*

$$\sum_{\mathcal{J}} \left|\mu_i^{-1}\right|^2 \left|(q, g^0)\right|^2. \tag{5}$$

[2] В теоремах 1 и 2 H предполагается счетномерным.

Тогда общее решение уравнения (4) *записывается в виде*

$$\forall\, q \in R(\overset{\cup}{V})\colon\, x = \widetilde{h} + \sum_{\mathcal{J}} \mu_i^{-1}(q, g_i^0)e_i^0, \tag{6}$$

где $\widehat{h} \in \overset{\cup}{H}{}^{\perp}$.

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (4) q *определен с точностью до* $\Delta q = \|\Delta q\|\tau^0$, *где* $\tau^0 \in R(\overset{\cup}{V})$. *Пусть* x *есть решение уравнения* (4), x^* *– решение этого уравнения с правой частью* $q+\Delta q$, x' *– с правой частью* τ^0. *Тогда*

$$\|x - x^*\| = \|x'\| \cdot \|\Delta q\|.$$[3]

V. Пусть в уравнении

$$\lambda x - Vx = q, \tag{7}$$

$\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$, x, $q \in H$, V представлено разложением (2), в котором $\left\{e_i^0\right\}_{\mathcal{J}}$ – ортогональна. Оператор $W = \lambda I - V$, очевидно, принадлежит $L(H)$. Его сужение на $\overset{\cup}{H}$ обозначается через $\overset{\cup}{W}$, $\overset{\cup}{W} = \lambda\overset{\cup}{I} - \overset{\cup}{V}$.

Лемма 2. *Уравнение* (7) *эквивалентно уравнению*

$$\lambda\widehat{h} + \overset{\cup}{W}\overset{\cup}{h} = q. \tag{8}$$

Лемма 3. *Оператор* $\overset{\cup}{W}$ *обратим на* $R(\overset{\cup}{W})$ *тогда и только тогда, когда* λ *не является собственным значением оператора* $\overset{\cup}{V}$.

Обозначим через H_λ собственное подпространство в H, определяемое собственным значением λ преобразований $\overset{\cup}{V}$.

Введем векторы $\Theta_i = \overset{\cup}{W}e_i^0$, $i \in \mathcal{J}$. Согласно следствию 1, $\Theta_i = \lambda e_i^0 - \mu_i g_i^0$.

[3] Считая $\widetilde{h}$ одним и тем же для x, x^* и x'.

Теорема 7. *Вектор $q' \in H$ принадлежит $R(\overset{\cup}{W})$ тогда и только тогда, когда он разлагается по векторам Θ_y, $i \in \mathcal{J}$,*

$$q' = \sum_{\mathcal{J}} \gamma_i \Theta_i, \tag{9}$$

причем

$$\sum_{\mathcal{J}} |\gamma_i|^2 < \infty. \tag{10}$$

В этом случае вектор

$$\overset{\cup}{h} = \sum_{\mathcal{J}} \gamma_i e_i^0 \tag{11}$$

является решением уравнения

$$\overset{\cup}{W}\overset{\cup}{h} = q'. \tag{12}$$

Если λ не является собственным значением оператора $\overset{\cup}{V}$, то это решение единственно. Если же λ – собственное значение оператора $\overset{\cup}{V}$, то вместе с (11) решениями уравнения (12) будут и векторы $\overset{\cup}{h} + h^*$, где h^* – "текущий" вектор из H_λ. Следовательно, общее решение уравнения (12) имеет вид

$$\widehat{h} = \sum_{\mathcal{J}} \gamma_i e_i^0 + h^*. \tag{13}$$

Лемма 4. *Если λ не является собственным значением оператора $\overset{\cup}{V}$, то система векторов $\{\Theta_i\}_{\mathcal{J}}$ минимальна.*

Биортогональную систему к $\{\Theta_i\}_{\mathcal{J}}$ бозначим через $\{\Gamma_i\}_{\mathcal{J}}$.

Теорема 8. *Уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть q представима в виде $q = \widehat{q} + q'$, где $\widehat{q} \in \overset{\cup}{H}{}^{\perp}$, $q' \in R(\overset{\cup}{W})$. Тогда общее решение этого уравнения дается равенством*

$$x = \widehat{q}/\lambda + \sum_{\mathcal{J}} \gamma_i e_i^0 + h^*.$$

Если λ не является собственным значением оператора $\overset{\cup}{V}$, то $h^*=0$, решение единственно и может быть представлено в виде

$$x = \widehat{q}/\lambda + \sum_{\mathcal{J}} (q', \Gamma_i) e_i^0.$$

Отметим, что в этой теореме на V не накладывается никаких ограничений, кроме $V \in L_\perp(H)$ в базисе $G = \{g_k^0\}_K$. Не используются и "присоединенные элементы" к собственным векторам, принадлежащим собственному значению λ (см. [5], гл. V, §3).

VI. Приведем некоторые признаки принадлежности преобразований V классу $L_\perp(H)$, с указанием базисов G, в которых V имеют ортогональные координаты.

1) Если из собственных векторов преобразования $V \in L(H)$ можно образовать ортонормированный базис, то в этом базисе V имеет каноническую форму

$$\forall\, x \in H : Vx = \sum_{\mathcal{J}} \mu_i (x, g^0) g_i^0, \quad \mu_i \neq 0.$$

(При этом V может не быть ни самосопряженным, ни компактным.) В данном случае $\Theta_i = (\lambda - \mu_i) g_i^0$, $i \in \mathcal{J}$. Биортогональная система к $\{\Theta_i\}_{\mathcal{J}}$ находится непосредственно: $\Gamma_i = \overline{(\lambda - \mu_i^{-1})}\, g_i^0$, $i \in \mathcal{J}$. Если λ не является собственным значением оператора $\overset{\cup}{V}$, то *единственное решение уравнения* (7) *принимает вид*

$$x = \widehat{q}/\lambda + \sum_{\mathcal{J}} \frac{(q', g_i^0)}{\lambda - \mu_i} g_i^0.$$

2) Унитарное преобразование U в любом ортонормированном базисе $G = \{g_k^0\}_K$ имеет ортогональные координаты. Ими являются векторы $y_k = U^{-1} g_k^0 = e_k^0$. Разложение U по базису G имеет вид:

$$\forall\, x \in H : Ux = \sum_k (x, e_k^0) g_k^0.$$

3) **Теорема 9.** *Оператор $V \in L(H)$ принадлежит классу $L_\perp(H)$ тогда и только тогда, когда из собственных векторов оператора $T = VV^*$ можно образовать (ортонормированный) бызис G в H. В этом базисе V имеет ортогональные координаты.*

Следствие 2. *Всякое компактное преобразование V принадлежит классу $L_\perp(H)$. Его разложение по ортонормированному базису собственных векторов компактного самосопряженного оператора $T = V^2$ имеет ортогональные координаты.*

(См. [4], гл. 7, п. 7.5.1). Такое разложение приведено в [3, гл. V, п. 64.]

Следствие 3. *Если $V \in L(H)$ имеет ортогональные координаты в базисе G, то $T = VV^*$ также имеет ортогональные координаты в этом базисе. Разложение T по этому базису имеет каноническую форму.*

Литература

1. Г. Я. Арешкин, *Теорема о представлении линейных непрерывных операторов и некоторые ее следствия.* в кн: Межвуз. сб. научн. трудов, посвященный 200-летию РГПУ им. Герцена, Мурманск 1977, сс. 133–139.
2. Г. Я. Арешкин, *Применение интегралов от скалярных функций по векторной мере к некоторым вопросам функционального анализа теории линейых интегральных уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 5–16.
3. Н. И. Ахиезер, П. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* 2-ое изд., Наука, М. (1966).
4. В. Хатсон, Дж. Пим, *Приложения функционального анализа и теории операторов.* Мир, М. (1983).
4. А. Т. Талдыкин, *Элементы прикладного функционального анализа.* Высшая школа, М. (1982).

Areshkin G. Ya. On solution of the functional equations of the 1st and 2nd kind whose the transformations with orthogonal coordinats.

In this paper we introduce the notion of coordinats for a linear continuous transformation of Hilbert space H. We develop the complete solvability theory for the functional equations of the 1st and 2nd kind with kernels having orthogonal coordinats and we obtain all such solutions. In particular, this theory is applicable to equations with compact operator.

Военный
Инженерно-Технический
Университет

Поступило 8 ноября 2000 г.