Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДВУХФАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ВЕНТЦЕЛЯ

**Памяти
Александра Васильевича Иванова**

Задачи с краевым условием Вентцеля описывают физические процессы в средах, содержащих тонкие пленки из материала с высокой проницаемостью. Примеры физических постановок можно найти в [1–4].

Если пленка покрывает границу области, то мы имеем дело с однофазной задачей Вентцеля, которая активно разрабатывалась в последнее десятилетие. Описание основных результатов по этой задаче приведено в [5], где имеется также обширная библиография.

В настоящей статье изучаются двухфазные задачи Вентцеля, описывающие случай, когда тонкая пленка разделяет среду на две части. Цель статьи – получить необходимые априорные оценки и доказать разрешимость квазилинейных двухфазных задач Вентцеля в пространствах Соболева и Гельдера. Соответствующая линейная теория была построена в работе [6].

Статья разделена на шесть параграфов. Большая часть из них посвящена нестационарной задаче, которая требует специальной техники. В §1 мы приводим описание вырожденной и невырожденной параболических задач. В §2 приведена оценка осцилляции решений линейной невырожденной задачи в окрестности разделяющей пленки. §3 посвящен оценке осцилляции решений линейной задачи вблизи точек вырождения условия на пленке.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-01-00684), грантом 201/98/1450 GA ČA и грантом GAUK 170/99.
Первый автор выражает свою благодарность Институту Миттаг-Леффлер Королевской Академии наук Швеции, где данная работа была начата, и Математическому институту Академии наук Чешской республики, где она была завершена.

Затем, в §4, с помощью этих результатов устанавливаются глобальные гельдеровские оценки решений для обеих нестационарных задач. Далее, мы сосредотачиваемся на невырожденной задаче и рассматриваем в основном случай, когда разделяющая пленка не пересекается с внешней границей среды. В §5 устанавливаются априорные оценки градиента решения и формулируются теоремы существования в пространствах Соболева и Гельдера. Наконец, в §6 приводятся соответствующие результаты для решений стационарных задач.

Следует отметить, что основные идеи доказательств лемм 2.1–2.5, теоремы 2.6, теоремы 4.2 и теорем 5.1–5.3, уже использовались нами ранее при изучении однофазных задач Вентцеля (см. [7–9]). По этой причине в данной статье мы лишь формулируем вышеперечисленные утверждения, снабдив их короткими замечаниями о необходимых изменениях в доказательствах, и уделяем основное внимание оценкам осцилляции решений двухфазных задач (теорема 3.1 и теорема 4.1), которые имеют существенные отличия от однофазного случая.

Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи:

$x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ – вектор в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|x|$ (для нормы, определяемой через супремум, используем обозначение $\|x\|$),

(x, t) – точка в $\mathbb{R}^{n+1}$,

Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$,

Σ – достаточно гладкая гиперповерхность, разделяющая Ω на две подобласти: $\Omega^{(in)}$ и $\Omega^{(ex)}$,

$\Sigma_T = \Sigma\times]0, T[$,

$\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_i(x))$ – единичный вектор внешней (по отношению к $\Omega^{(in)}$) нормали к Σ в точке x,

Q – цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Для цилиндра $Q = \Omega\times]0, T[$ обозначим через $\partial''Q = \partial\Omega\times]0, T[$ его боковую поверхность и через $\partial'Q = \partial''Q \cup \{\overline{\Omega} \times \{0\}\}$ – параболическую границу.

Положим $Q^{(ex)} = \Omega^{(ex)}\times]0, T[$ и $Q^{(in)} = \Omega^{(in)}\times]0, T[$. Для обозначения функций, определенных в $Q^{(ex)}$ и в $Q^{(in)}$, используются различные буквы с индексами (ex) и (in), соответственно. Мы будем употреблять индекс (hh) в тех случаях, когда хотим подчеркнуть, что некоторые предположения выполняются как для функции с индексом (in), так и для такой же функции с индексом (ex).

Обозначим через $Q^{(r)}$ и $Q^{(l)}$ $(\Omega^{(r)}$ и $\Omega^{(l)})$ части Q (Ω), лежащие в полупространствах $x_n > 0$ и $x_n < 0$, соответственно. Мы будем предполагать, что $\Gamma(Q)$ – часть Q $(\Gamma(\Omega)$ – часть $\Omega)$ – лежит в плоскости $x_n = 0$. Для обозначения функций, определенных в $Q^{(r)}$ и в $Q^{(l)}$ будут использоваться различные буквы с индексами (r) и (l), соответственно. Для экономии места мы употребляем индекс (h), если некоторые предположения выполняются как для функции с индексом (r), так и для такой же функции с индексом (l).

$|Q|$ $(|\Gamma(Q)|)$ – мера Лебега соответствующей размерности.

Через $K_R(x^0)$ обозначим открытый куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x^0 и ребрами длиной $2R$, параллельными координатным осям.

$$Q_R(x^0,t^0) = K_R(x^0)\times]t^0 - R^2, t^0[, \quad Q_R = Q_R(0,0),$$

$$\Gamma_R(x^0,t^0) = \Gamma(Q_R(x^0,t^0)), \quad \Gamma_R = \Gamma(Q_R).$$

Если u – непрерывная функция, то полагаем

$$\operatorname*{osc}_Q u = \sup_Q u - \inf_Q u, \qquad A_k^u = \{(x;t)\colon u(x;t) \geqslant k\}.$$

Мы придерживаемся соглашения, что индексы i, j изменяются от 1 до n, а индексы s, m – от 1 до $n-1$. Применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Оператор дифференцирования по переменной x_i обозначим через D_i. В частности, $Du = (D_i u) = (D'u, D_n u)$ есть градиент функции u.

Пусть d_i – касательный дифференциальный оператор на многообразии Σ. Тогда $du = (d_i u)$ – касательный градиент u; в частности, $du = (D'u, 0)$ на $\Gamma_{R,T}$. Далее, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Для любого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ определим операторы $\delta_i = \frac{\partial}{\partial z} p_i + \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\delta u = (\delta_i u)$.

Через $\|\cdot\|_{q,Q}$ обозначим норму в $L_q(Q)$. Введем следующие пространства:

$$W_q^{2,1}(Q) \quad \text{с нормой} \quad \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} = \|u_t\|_{q,Q} + \|D(Du)\|_{q,Q} + \|u\|_{q,Q};$$

$$W_q^{2,1}(\Sigma_T) \quad \text{с нормой} \quad \|u\|_{W_q^{2,1}(\Sigma_T)} = \|u_t\|_{q,\Sigma_T} + \|d(du)\|_{q,\Sigma_T} + \|u\|_{q,\Sigma_T};$$

$$V_q(Q) = W_q^{2,1}(Q^{(in)} \cup Q^{(ex)}) \cap W_{q-1}^{2,1}(\Sigma_T) \cap C(\overline{Q}) \quad \text{с нормой}$$

$$\|u\|_{V_q(Q)} = \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^{(in)})} + \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^{(ex)})} + \|u\|_{W_{q-1}^{2,1}(\Sigma_T)};$$

$$V_{q,\infty}(Q) = W_q^{2,1}(Q^{(in)} \cup Q^{(ex)}) \cap W_\infty^{2,1}(\Sigma_T) \cap C(\overline{Q}) \text{ с нормой}$$

$$\|u\|_{V_{q,\infty}(Q)} = \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^{(in)})} + \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^{(ex)})} + \|u\|_{W_\infty^{2,1}(\Sigma_T)}.$$

В случае, когда Σ_T лежит в плоскости $x_n = 0$, мы будем использовать обозначения $V_q^\Gamma(Q)$ и $V_{q,\infty}^\Gamma(Q)$ для пространств

$$W_q^{2,1}(Q^{(r)} \cup Q^{(l)}) \cap W_{q-1}^{2,1}(\Gamma(Q)) \cap C(\overline{Q})$$

и

$$W_q^{2,1}(Q^{(r)} \cup Q^{(l)}) \cap W_\infty^{2,1}(\Gamma(Q)) \cap C(\overline{Q}),$$

соответственно. Нормы в пространствах $V_q^\Gamma(Q)$ и $V_{q,\infty}^\Gamma(Q)$ определяются аналогично тому, как это было сделано для пространств $V_q(Q)$ и $V_{q,\infty}(Q)$.

$C(\overline{Q})$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|\cdot\|_Q$.

$C^\gamma(\overline{Q})$ $C^{2+\gamma}(\overline{Q})$, $(0 < \gamma < 1)$ – пространства Гельдера с нормами

$$\|u\|_{C^\gamma(\overline{Q})} = \|u\|_Q + [u]_{\gamma,Q},$$

$$\|u\|_{C^{2+\gamma}(\overline{Q})} = \|u\|_Q + \|D(Du)\|_Q + \|u_t\|_Q + [D(Du)]_{\gamma,Q} + [u_t]_{\gamma,Q},$$

соответственно, где $[\cdot]_{\gamma,Q}$ – постоянная Гельдера с показателем γ относительно параболического расстояния

$$d_{par}((x^1,t^1),(x^2,t^2)) = |x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|^{1/2}.$$

Обозначим $C_\Sigma^{2+\gamma}(Q) = C^{2+\gamma}(\overline{Q^{(in)}}) \cap C^{2+\gamma}(\overline{Q^{(ex)}})$,

$$\|u\|_{C_\Sigma^{2+\gamma}(Q)} = \|u\|_{C^{2+\gamma}(\overline{Q^{(in)}})} + \|u\|_{C^{2+\gamma}(\overline{Q^{(ex)}})}.$$

Положим $g_+ = \max\{g, 0\}$ и $g_- = \max\{-g, 0\}$. Через $\mathbf{tr}(a)$ обозначим след матрицы (a). Показатель q может принимать значения $n < q < \infty$.

Для обозначения констант используем буквы M, N, C с индексами или без них. Для указания величин, от которых они зависят, мы используем запись $N(\dots)$.

§1. Постановка задачи

Изучаются решения квазилинейной двухфазной параболической задачи:

$$u_t - a^{ij}_{(in)}(x,t,u,Du)D_iD_ju + a_{(in)}(x,t,u,Du) = 0 \quad \text{в} \quad Q^{(in)}, \tag{1.1}$$

$$u_t - a^{ij}_{(ex)}(x,t,u,Du)D_iD_ju + a_{(ex)}(x,t,u,Du) = 0 \text{ в } \quad Q^{(ex)}, \tag{1.2}$$

$$\tau(x,t)\{u_t - \alpha^{ij}(x,t,u,du)d_id_ju + \alpha(x,t,u,du)\} + \mathcal{J}u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_T, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{J}$ обозначает оператор "скачка":

$$\mathcal{J}u \equiv \tau_1(x,t)\cdot\beta_{(in)}\big(x,t,u,du + \mathbf{n}(x)\cdot\lim_{\varepsilon\to-0}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x+\varepsilon\cdot\mathbf{n}(x),t)\big) -$$

$$-\{1-\tau_1(x,t)\}\cdot\beta_{(ex)}\big(x,t,u,du + \mathbf{n}(x)\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x+\varepsilon\cdot\mathbf{n}(x),t)\big).$$

Мы предполагаем также, что u удовлетворяет начально-краевому условию

$$u|_{\partial' Q} = 0. \tag{1.4}$$

Замечание 1.1. Однородное начально-краевое условие (1.4) используется лишь для простоты изложения. Очевидно, что оно может быть заменено на условия $u|_{\partial'' Q} = \theta_1$, $u|_{\Omega\times\{0\}} = \theta_2$, где функции θ_1 и θ_2 принадлежат подходящим функциональным пространствам, диктуемым теоремами вложения. Кроме того, в общем случае должны быть выполнены условия согласования на $\partial\Omega\times\{t=0\}$.

Мы намереваемся исследовать два типа задач – **вырожденную** задачу, когда параметр τ в (1.3) допускает вырождение на подмножествах Σ_T ненулевой меры, и **невырожденную** задачу, когда уравнение (1.3) является равномерно параболическим.

При изучении **обеих задач** будем предполагать, что уравнения (1.1)–(1.2) равномерно параболические, т.е. $(a^{ij}_{(hh)})$ – симметричные матрицы, и неравенства

$$\nu_{(hh)}|\xi|^2 \leqslant a^{ij}_{(hh)}(x,t,z,p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}_{(hh)}|\xi|^2, \quad \nu_{(hh)} = \mathrm{const} > 0 \tag{A0}$$

справедливы для любых $(x,t)\in Q^{(hh)}$, $z\in\mathbb{R}^1$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Предположим также, что функции $a_{(hh)}(x,t,z,p)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_{(hh)}(x,t,z,p)| \leqslant \mu_{(hh)}|p|^2 + b_{(hh)}(x,t)|p| + \Phi_1^{(hh)}(x,t), \tag{A1}$$

где $\mu_{(hh)}$ – некоторые неотрицательные константы и

$$b_{(hh)} \in L_{n+2}(Q^{(hh)}), \quad \Phi_1 \in L_{n+1}(Q^{(hh)}). \tag{A2}$$

Мы считаем, что коэффициенты α^{ij} из уравнения (1.3) удовлетворяют условию равномерной параболичности, т.е. (α^{ij}) – симметричная матрица, такая, что

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \alpha^{ij}(x,t,z,p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2, \qquad \nu = \text{const} > 0, \tag{B0}$$

при любых $(x,t) \in \Sigma_T$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ таких, что $p \perp \mathbf{n}(x)$ и $\xi \perp \mathbf{n}(x)$. Функции $\beta_{(in)}(x,t,z,p)$ и $\beta_{(ex)}(x,t,z,p)$ из (1.3) предполагаются дифференцируемыми по p.

Исследуя **вырожденный случай**, мы считаем, что

$$\tau \text{ – неотрицательная функция на } \Sigma_T, \text{ удовлетворяющая условию Липшица с константой } \lambda; \tag{B}$$

$$\tau_1 \in C(\overline{\Sigma_T}), \qquad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant 1 \ \text{ на } \ \Sigma_T; \tag{J}$$

и для любых $(x,t) \in \Sigma_T$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:

$$|\alpha(x,t,z,p)| \leqslant \mu(|p|^2+1), \qquad p \perp \mathbf{n}(x), \tag{B1}$$

где μ – некоторая неотрицательная константа;

$$\chi \leqslant \frac{\partial \beta_{(hh)}(x,t,z,p)}{\partial p_i} \cdot \mathbf{n}_i(x) \leqslant \chi^{-1}, \quad \chi = \text{const} > 0; \tag{J0}$$

$$|\beta_{(hh)}(x,t,z,p)| \leqslant \chi^{-1}(|p|+1). \tag{J1}$$

В **невырожденном случае** мы предполагаем, не умаляя общности, что

$$\tau = \tau_1 \equiv \frac{1}{2} \ \text{ на } \ \Sigma_T.$$

Кроме того, неравенства (B1), (J0), (J1) заменяются на следующие условия: для любых $(x,t) \in \Sigma_T$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$

$$|\alpha(x,t,z,p)| \leqslant \mu|p|^2 + \beta(x,t)|p| + \Theta_1(x,t), \quad p \perp \mathbf{n}(x); \tag{B1*}$$

$$0 \leqslant \frac{\partial \beta_{(hh)}(x,t,z,p)}{\partial p_i} \cdot \mathbf{n}_i(x) \leqslant \beta(x,t); \tag{J0*}$$

$$|\beta_{(hh)}(x,t,z,p)| \leqslant \beta(x,t)|p| + \Theta_1(x,t); \tag{J1*}$$

$$\beta \in L_{n+1}(\Sigma_T), \quad \Theta \in L_n(\Sigma_T). \tag{B2*}$$

Замечание 1.2. Без потери общности мы можем считать, что $\mu = \mu_{(in)} = \mu_{(ex)}$, $\nu = \nu_{(in)} = \nu_{(ex)}$.

Замечание 1.3. На протяжении всей статьи мы будем использовать буквы с индексами nd и d для обозначения операторов на разделяющей пленке в невырожденном и вырожденном случаях, соответственно.

§2. Оценки неотрицательных решений невырожденной задачи вблизи разделяющей пленки

Этот параграф построен по образцу §2 [8].

Пусть $L^{(h)}$ – линейные параболические операторы в $Q_1^{(h)}$:

$$L^{(h)}u \equiv u_t - a^{ij}_{(h)}(x,t)D_iD_ju + b^i_{(h)}(x,t)D_iu,$$

$b^i_{(h)} \in L_{n+2}(Q_1^{(h)})$, $(a^{ij}_{(h)})$ – симметричные матрицы, и неравенства

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a^{(ij)}_{(h)}\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2, \quad \nu = \mathrm{const} > 0,$$

выполняются при любых $(x,t) \in Q_1^{(h)}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Пусть B_{nd} – линейный параболический оператор на пленке:

$$B_{nd}u \equiv u_t - \alpha^{sm}(x',t)D_sD_mu + \beta^s(x',t)D_su,$$

а J_{nd} – оператор "скачка":

$$J_{nd}u \equiv \beta_{(l)}(x',t)\cdot \lim_{x_n\to -0} D_nu(x',x_n,t) - \beta_{(r)}(x',t)\cdot \lim_{x_n\to +0} D_nu(x',x_n,t),$$

$$(x',t) \in \Gamma_1,$$

β^s, $\beta_{(r)}$, $\beta_{(l)} \in L_{n+1}(\Gamma_1)$, (α^{sm}) – симметричная матрица и неравенства

$$\nu|\eta|^2 \leqslant \alpha^{sm}\eta_s\eta_m \leqslant \nu^{-1}|\eta|^2, \qquad \beta_{(r)} \geqslant 0, \quad \beta_{(l)} \geqslant 0$$

выполняются при любых $(x',t) \in \Gamma_1$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Введем обозначение $\mathbf{b}^*_{(h)} = (b^1_{(h)}, \dots, b^n_{(h)})$. Через β'_* обозначим вектор $(\beta^1, \dots, \beta^{n-1})$, а через β_* – вектор $(\beta'_*, \beta_{(r)}, \beta_{(l)})$.

Лемма 2.1. *Пусть* $R \leqslant 1$, $u \in V^{\Gamma}_{n+1}(Q_R)$, $u \geqslant 0$ *в* $\overline{Q_R}$.

Тогда для любого $\delta_1 \in]0,1[$ *существуют константы* $\sigma_1 > 0$, $\xi < 1$, *зависящие только от* n, ν, δ_1, *такие, что если*

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q^{(r)}_R} \leqslant \sigma_1, \qquad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q^{(l)}_R} \leqslant \sigma_1, \qquad \|\beta_*\|_{n+1,\Gamma_R} \leqslant \sigma_1,$$

$$|A^u_k \cap \Gamma_R| \geqslant \xi \cdot |\Gamma_R| \quad \text{при некотором} \qquad k > 0,$$

то

$$u \geqslant (1-\delta_1)k - N_1(n,\nu) \cdot \left\{R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q^{(r)}_R} + \right.$$

$$\left. + R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q^{(l)}_R} + R^{\frac{n-1}{n}} \cdot \|(B_{nd}u + J_{nd}u)_-\|_{n,\Gamma_R}\right\} \quad \text{на} \quad \Gamma_{R/2}.$$

Доказательство. Доказательство утверждения леммы дословно повторяет рассуждения из доказательства леммы 2.1 [8]. Отличие состоит лишь в том, что вместо барьерной функции из [8] используется новая вспомогательная функция

$$\psi(x,t) = 1 - 4(|x' - x^{0\prime}|^2 - (t - t^0)) + C^2 x_n^2 - 2C|x_n|$$

с подходящей константой C, а вместо теоремы 1 [10] используется теорема 2.1 [6]. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть* $R \leqslant 1$, $u \in W^{2,1}_{n+1}(Q^{(r)}_R \cup Q^{(l)}_R) \cap C(\overline{Q_R})$, $u \geqslant 0$ *в* $\overline{Q_R}$,

$$u \geqslant k > 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_R.$$

Тогда для любого $\delta_2 \in]0,1[$ *существуют положительные константы* ε *и* σ_2, *зависящие только от* n, ν, δ_2, *такие, что если*

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q^{(r)}_R} \leqslant \sigma_2, \quad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q^{(l)}_R} \leqslant \sigma_2,$$

то

$$u \geqslant (1-\delta_2)k - N_2(n,\nu) R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \{\|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q^{(r)}_R} +$$

$$+ \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q^{(l)}_R}\} \quad \text{в} \quad Q_{\varepsilon R}.$$

Доказательство. Утверждение леммы доказывается почти дословным повторением доказательства леммы 2.2 [8]. Различие лишь в том, что на множестве $Q = Q_1 \cap \{|x_n| < \frac{2}{C}\}$ используется новая барьерная функция

$$\psi_1(x,t) = 1 - |x'|^2 + t + \frac{C^2}{4} x_n^2 - C|x_n|$$

(здесь C – константа из доказательства леммы 2.1), а теорема 1 [11] применяется дважды в цилиндре $Q^{(r)}$ и в цилиндре $Q^{(l)}$, соответственно. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $\varkappa, \varepsilon_1 \in]0,1[$, $R \leqslant 1$,

$$\varkappa R^2 \leqslant \tau \leqslant \varkappa^{-1} R^2, \qquad 2\varkappa R \leqslant x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \leqslant 2\varkappa^{-1} R,$$

$$x_s^{(1)} + \varkappa R \leqslant x_s^{(0)} \leqslant x_s^{(2)} - \varkappa R, \quad x_n^{(0)} = 0, \quad x_n^{(1)} + \varkappa R \leqslant 0 \leqslant x_n^{(2)} - \varkappa R,$$

$$Q = \{(x,t) : x_i^{(1)} < x_i < x_i^{(2)}, \quad t^1 < t < t^1 + \tau\}.$$

Предположим также, что $u \in V_{n+1}^{\Gamma}(Q)$, $u \geqslant 0$ *в* $\overline{Q}$,

$$u(x,t^1) \geqslant k > 0 \quad \text{при} \quad \|x - x^0\| \leqslant \varepsilon_1 R.$$

Тогда существуют положительные константы δ_3 *и* p, *зависящие только от* n, ν, *а также* $\sigma_3 = \sigma_3(n, \nu, \varkappa, \varepsilon_1)$ *такие, что если*

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q^{(r)}} \leqslant \sigma_3, \quad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q^{(l)}} \leqslant \sigma_3, \quad \|\beta_*\|_{n+1,\Gamma(Q)} \leqslant \sigma_3,$$

то

$$u \geqslant \delta_3 \varepsilon_1^{2p+1} k - N_1 \cdot \{R^{\frac{n}{n+1}} \|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q^{(r)}} +$$

$$+ R^{\frac{n}{n+1}} \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q^{(l)}} + R^{\frac{n-1}{n}} \|(B_{nd}u + J_{nd}u)_-\|_{n,\Gamma(Q)}\} \quad \text{в} \quad Q',$$

где N_1 – *константа из леммы* 2.1,

$$Q' = \{(x,t) : x_i^{(1)} - \varkappa R \leqslant x_i \leqslant x_i^{(2)} + \varkappa R, \quad t^1 + \varkappa R^2 \leqslant t \leqslant t^1 + \tau\}.$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично лемме 2.3 [8]. При этом вместо теоремы 1 [10] применяется теорема 2.1 [6]. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть* $R \leqslant 1$, $u \in V_{n+1}^{\Gamma}(Q_R)$, $u \geqslant 0$ *в* $\overline{Q_R}$.

Тогда существуют положительные константы ξ, δ_4, σ_4, *зависящие только от* n *и* ν *такие, что если*

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q_R^{(r)}} \leqslant \sigma_4, \qquad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q_R^{(l)}} \leqslant \sigma_4, \qquad \|\beta_*\|_{n+1,\Gamma_R} \leqslant \sigma_4,$$

$$|A_k^u \cap \Gamma_{R/2}(0, -\frac{3R^2}{4})| \geqslant \xi \cdot |\Gamma_{R/2}| \quad \text{при некотором} \quad k > 0,$$

то

$$u \geqslant \delta_4 k - N_3(n,\nu) \cdot \big\{R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(r)}} +$$

$$+ R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(l)}} + R^{\frac{n-1}{n}} \cdot \|(B_{nd}u + J_{nd}u)_-\|_{n,\Gamma_R}\big\} \quad \text{в} \quad Q_{R/2}.$$

Замечание 2.1. Это утверждение аналогично лемме 2.4 [8] и доказывается последовательным применением лемм 2.1–2.3.

Лемма 2.5. *Пусть* $R \leqslant 1$, $u \in V^{\Gamma}_{n+1}(Q_R)$, $u \geqslant 0$ *в* $\overline{Q_R}$.

Тогда для любого $\zeta \in]0,1[$ *существуют положительные константы* δ_5, σ_5, η, η_1, *зависящие только от* n, ν, ζ *такие, что если*

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q_R^{(r)}} \leqslant \sigma_5, \quad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q_R^{(l)}} \leqslant \sigma_5, \quad \|\beta_*\|_{n+1,\Gamma_R} \leqslant \sigma_5,$$

$$\zeta \cdot |\Gamma_{R/2}| \leqslant |A^u_k \cap \Gamma_{R/2}(0,-\frac{3R^2}{4})| \leqslant \xi \cdot |\Gamma_{R/2}| \quad \text{при некотором} \quad k>0,$$

(здесь $\xi = \xi(n,\nu)$ *– константа из леммы 2.4), то либо*

$$u \geqslant \delta_5 k - N_4(n,\nu,\zeta) \cdot \big\{ R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(r)}} +$$

$$+ R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(l)}} + R^{\frac{n-1}{n}} \cdot \|(B_{nd}u + J_{nd}u)_-\|_{n,\Gamma_R} \big\} \quad \text{в} \quad Q_{R/2},$$

либо

$$|A^u_{\eta_1 \cdot k} \cap \Gamma_{R/2}(0,-\frac{3R^2}{4})| \geqslant (1+\eta) \cdot |\Gamma_{R/2}|.$$

Доказательство. Применяя рассуждения лемм 3.4–3.6 [12] к множеству $A^u_k \cap \Gamma_{R/2}(0,-\frac{3R^2}{4})$, лежащему в Γ_R, и используя при этом леммы 2.1–2.3 вместо следствия 3.1 [12], получим требуемые оценки. □

Теорема 2.6. *Пусть* $R \leqslant 1$, $u \in V^{\Gamma}_{n+1}(Q_R)$, $u \geqslant 0$ *в* $\overline{Q_R}$.

Тогда для любого $\zeta_1 \in]0,1[$ *существуют положительные константы* $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\sigma}_1$, *зависящие только от* n, ν, ζ_1 *такие, что если*

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q_R^{(r)}} \leqslant \widetilde{\sigma}_1, \quad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q_R^{(l)}} \leqslant \widetilde{\sigma}_1, \quad \|\beta_*\|_{n+1,\Gamma_R} \leqslant \widetilde{\sigma}_1,$$

$$|A^u_k \cap \Gamma_{R/2}(0,-\frac{3R^2}{4})| \geqslant \zeta_1 \cdot |\Gamma_{R/2}| \quad \text{при некотором} \quad k>0,$$

то

$$u \geqslant \widetilde{\delta}_1 k - C_1(n,\nu,\zeta_1) \cdot \big\{ R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(r)}} +$$

$$+ R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(l)}} + R^{\frac{n-1}{n}} \cdot \|(B_{nd}u + J_{nd}u)_-\|_{n,\Gamma_R} \big\} \quad \text{в} \quad Q_{R/2}.$$

Доказательство. Аналогично лемме 2.5 [12]. При этом вместо лемм 2.3–2.4 [12] применяются соответственно леммы 2.4 и 2.5. □

§3. Оценки неотрицательных решений вблизи точек вырождения условия на пленке

Пусть B_d – линейный оператор на разделяющей пленке:

$$B_d u \equiv \tau(x,t)\{u_t - \alpha^{sm}(x,t)D_s D_m u\} + \beta^s(x,t)D_s u,$$

где τ – функция, удовлетворяющая условию (B), и (α^{sm}) – матрица, определенная в §2.

Укажем, что если не оговорено противное, то до конца этого параграфа мы будем пользоваться обозначениями из §2.

Предположим также, что

$$\beta_{(r)} + \beta_{(l)} \geqslant \chi \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$

$$\chi = \text{const} > 0, \quad \|\beta_*\|_{\infty,\Gamma_1} \leqslant \chi^{-1}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $R \leqslant 1$, $u \in V^{\Gamma}_{n+1,\infty}(Q_R)$, $u \geqslant 0$ в $\overline{Q_R}$.*

Предположим, что

$$\tau(0,0) \leqslant F \cdot R \tag{3.1}$$

для некоторой константы $F > 0$.

Если вдобавок

$$\beta_{(r)} \geqslant \frac{\chi}{4} \quad \text{на} \quad \Gamma_R,$$

то существуют положительные константы $\widetilde{\sigma}_2$, ρ, $\widetilde{\delta}_2$, C_2 и C_3, зависящие только от n, ν, χ, λ, F, такие, что при условии

$$\|\mathbf{b}^*_{(r)}\|_{n+2,Q_R^{(r)}} \leqslant \widetilde{\sigma}_2, \quad \|\mathbf{b}^*_{(l)}\|_{n+2,Q_R^{(l)}} \leqslant \widetilde{\sigma}_2, \tag{3.2}$$

$$|A_k^u \cap Q_{\rho R}(0,\dots,0,\frac{R}{2},R^2(-1+\rho^2))| \geqslant \frac{1}{2}|Q_{\rho R}| \quad \text{для некоторого} \quad k > 0, \tag{3.3}$$

справедливо неравенство

$$u \geqslant \widetilde{\delta}_2 k - C_2 \sup_{Q_R} u \cdot \widetilde{\sigma}_2 - C_3 \cdot \big\{R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(r)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(r)}} + R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|(L^{(l)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(l)}} + R \cdot \|(B_d u + J_{nd} u)_-\|_{\infty,\Gamma_R}\big\} \quad \text{в} \quad Q_{R/2}. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. Это утверждение является обобщением на двухфазный случай леммы 2.2 [13].

Доказательство. С помощью замены переменных $(x,t)\in Q_R$ на $(R^{-1}x,R^{-2}t)$ мы можем рассматривать Q_1 вместо Q_R. После такой замены координат функция $\widetilde{u}(x,t)=u(Rx,R^2t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\widetilde{L}^{(h)}\widetilde{u}\equiv\widetilde{u}_t-\widetilde{a}^{ij}_{(h)}(x,t)D_iD_j\widetilde{u}+R\cdot\widetilde{b}^i_{(h)}(x,t)D_i\widetilde{u}=$$

$$=R^2\cdot(L^{(h)}u)\quad\text{в}\quad Q_1^{(h)}, \tag{3.5}$$

где $\widetilde{a}^{ij}_{(h)}(x,t)=a^{ij}_{(h)}(Rx,R^2t)$, и т. д.

Кроме того, определяя на пленке линейный оператор $\widetilde{B}_d$ и оператор “скачка” $\widetilde{J}_{nd}$ как

$$\widetilde{B}_d\widetilde{u}\equiv\widetilde{\tau}(x',t)\{\widetilde{u}_t-\widetilde{\alpha}^{sm}(x',t)D_sD_m\widetilde{u}\}+R\cdot\widetilde{\beta}^s(x',t)D_s\widetilde{u},$$

$$\widetilde{J}_{nd}\widetilde{u}\equiv R\cdot\widetilde{\beta}_{(l)}(x',t)\cdot\lim_{x_n\to-0}D_n\widetilde{u}(x',x_n,t)-$$

$$-R\cdot\widetilde{\beta}_{(r)}(x',t)\cdot\lim_{x_n\to+0}D_n\widetilde{u}(x',x_n,t),$$

$$(x',t)\in\Gamma_1,$$

где $\widetilde{\tau}(x,t)=\tau(Rx,R^2t)$, и т.д., мы легко получаем, что

$$\widetilde{B}_d\widetilde{u}+\widetilde{J}_{nd}\widetilde{u}=R^2\cdot(B_du+J_{nd}u)\quad\text{на}\quad\Gamma_1. \tag{3.6}$$

Очевидно, что условия (3.1) и (B) приводят к неравенствам

$$0\le\widetilde{\tau}(x;t)\le(F+2\lambda)R\quad\text{на}\quad\Gamma_1. \tag{3.7}$$

Пусть $\eta(x;t)$ – гладкая функция, равная 1 в $Q_{1/2}$ и -1 в $Q_1\backslash Q_{3/4}$. Введем барьерную функцию

$$w_2(x;t)=x_n^2+N_5'x_n+N_6\eta(x,t),$$

где

$$N_5'=\begin{cases}N_5, & \text{если}\quad x_n>0,\\ 1, & \text{иначе},\end{cases}$$

N_5,N_6 – положительные константы, которые мы определим далее.

Выбрав $N_6(n,\nu)<\frac{1}{16}$ так, что

$$N_6[\eta_t-\big(\widetilde{a}^{ij}_{(r)}\cdot I_{Q_1^{(r)}}+\widetilde{a}^{ij}_{(l)}\cdot I_{Q_1^{(l)}}\big)D_iD_j\eta]\le2\nu$$

(здесь $I_{Q_1^{(h)}}$ – характеристические функции множеств $Q_1^{(h)}$), и проделав элементарные выкладки, получим

$$\widetilde{L}^{(h)} w_2 \leqslant R \cdot |\widetilde{b}^*_{(h)}| \cdot (N_6 \cdot |D\eta| + N_5' + 2) \quad \text{в} \quad Q_1^{(h)}, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{B}_d w_2 \leq N_6 \cdot \widetilde{B}_d \eta \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$

$$\widetilde{J}_{nd} w_2 = R \cdot \widetilde{\beta}_{(l)} \cdot \lim_{x_n \to -0} (2x_n + 1 + N_6 D_n \eta(x', x_n, t)) -$$

$$- R \cdot \widetilde{\beta}_{(r)} \cdot \lim_{x_n \to +0} (2x_n + N_5 + N_6 D_n \eta(x', x_n, t)) \leqslant$$

$$\leqslant N_6 N_7(n, \nu, \chi) \cdot R - \frac{\chi}{4} N_5 R \quad \text{на} \quad \Gamma_1.$$

Из (3.7) находим

$$\widetilde{B}_d \eta \leqslant N_8(n, \nu, \chi, \lambda, F) \cdot R.$$

Следовательно, при $N_5 = 4N_6 \frac{N_7 + N_8}{\chi}$ имеем

$$\widetilde{B}_d w_2 + \widetilde{J}_{nd} w_2 \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{3.9}$$

Теперь предположим, что $\xi_1 = \xi_1(n, \nu, \chi, \lambda, F)$ – положительный корень уравнения $\xi_1^2 + N_5 \xi_1 - N_6 = 0$ ($\xi_1 < \frac{1}{4}$, так как $N_6 < \frac{1}{16}$). Тогда

$$w_2(x;t) \leqslant 0, \quad \text{если} \quad (x;t) \in Q_1 \backslash Q_{3/4}, \quad -\frac{3}{4} \leqslant x_n < \xi_1,$$

$$w_2(x;t) \leq 2N_6, \quad \text{если} \quad (x;t) \in Q_{3/4}, \quad x_n = \xi_1.$$

Предположим, что $\widetilde{\sigma}_2 \leqslant \sigma_0$, где σ_0 – константа из леммы 2.1 [13], и определим $\rho = \frac{\sqrt{2\xi_1 - \xi_1^2}}{2}$. Вследствие леммы 2.1 [13] (при $\xi = 1 - \xi_1$), примененной в $Q_1^{(r)}$, справедлива оценка

$$\widetilde{u} \geqslant \delta_0 k - N_9 \sup_{Q_1} \widetilde{u} \cdot \|R \widetilde{b}^*_{(r)}\|_{n+1, Q_1^{(r)}} - N_{10} \|(\widetilde{L}^{(r)} \widetilde{u})_-\|_{n+1, Q_1^{(r)}} \equiv N_{11}$$

$$\text{в} \quad Q_{3/4} \cap \{x_n \geqslant \xi_1\},$$

где δ_0, N_9 и N_{10} зависят только от n, ν, ξ_1.

Пусть $N_{12} = (N_{11})_+$, $\vartheta = \frac{N_{12}}{2N_6}$, $Q = Q_{3/4} \cap \{x_n < \xi_1\}$. Очевидно, что $\vartheta w_2 - \widetilde{u} \leqslant 0$ на $\partial' Q$. Поэтому можно применить теорему 2.2 [6] к разности $\vartheta w_2 - \widetilde{u}$ в цилиндре Q, что приводит к оценке

$$\vartheta w_2 - \widetilde{u} \leqslant N_{13} \big[\|(\widetilde{L}^{(r)}(\vartheta w_2 - \widetilde{u}))_+\|_{n+1, Q^{(r)}} +$$

$$+\|(\widetilde{L}^{(l)}(\vartheta w_2-\widetilde{u}))_+\|_{n+1,Q^{(l)}}+R^{-1}\|(\widetilde{B}_d(\vartheta w_2-\widetilde{u}))_+\|_{\infty,\Gamma(Q)}+$$

$$+R^{-1}\|(\widetilde{J}_{nd}(\vartheta w_2-\widetilde{u}))_+\|_{\infty,\Gamma(Q)}\big] \text{ в } Q, \tag{3.10}$$

где N_{13} зависит только от n, ν, χ, $\|R\widetilde{b}^*_{(r)}\|_{n+1,Q_1^{(r)}}$, $\|R\widetilde{b}^*_{(l)}\|_{n+1,Q_1^{(l)}}$.

Отметим, что из неравенств (3.2) вытекает соотношение

$$\|R\widetilde{b}^*_{(r)}\|_{n+1,Q_1^{(r)}}\leqslant 2\widetilde{\sigma}_2, \quad \|R\widetilde{b}^*_{(l)}\|_{n+1,Q_1^{(l)}}\leqslant 2\widetilde{\sigma}_2. \tag{3.11}$$

Без потери общности, уменьшая при необходимости $\widetilde{\sigma}_2$, считаем, что $\widetilde{\sigma}_2\leqslant\nu$. Из (3.10) с помощью (3.8)–(3.9) и (3.11) выводим

$$\vartheta w_2-\widetilde{u}\leqslant N_{13}\cdot\big[\|(\widetilde{L}^{(r)}\widetilde{u})_-\|_{n+1,Q_1^{(r)}}+\|(\widetilde{L}^{(l)}\widetilde{u})_-\|_{n+1,Q_1^{(l)}}+$$

$$+R^{-1}\cdot\|(\widetilde{B}_d\widetilde{u}+\widetilde{J}_{nd}\widetilde{u})_-\|_{\infty,\Gamma_1}\big]+N_{14}(n,\nu,\chi,\lambda,F)\cdot\vartheta\widetilde{\sigma}_2 \quad \text{в} \quad Q.$$

Поскольку $w_2(x,t)\geqslant N_6$ в $Q_{1/2}$, то справедлива оценка

$$\widetilde{u}\geqslant N_{12}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\widetilde{\sigma}_2N_{14}}{2N_6}\right)-N_{13}\cdot\big[\|(\widetilde{L}^{(r)}\widetilde{u})_-\|_{n+1,Q_1^{(r)}}+\|(\widetilde{L}^{(l)}\widetilde{u})_-\|_{n+1,Q_1^{(l)}}+$$

$$+R^{-1}\cdot\|(\widetilde{B}_d\widetilde{u}+\widetilde{J}_{nd}\widetilde{u})_-\|_{\infty,\Gamma_1}\big] \quad \text{в} \quad Q_{1/2}\cap\{x_n\leqslant\xi_1\}.$$

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая вытекающие из (3.5)–(3.6) очевидные соотношения

$$\|(\widetilde{L}^{(h)}\widetilde{u})_-\|_{n+1,Q_1^{(h)}}=R^{n/(n+1)}\|(L^{(h)}u)_-\|_{n+1,Q_R^{(h)}},$$

$$\|(\widetilde{B}_d\widetilde{u}+\widetilde{J}_{nd}\widetilde{u})_-\|_{\infty,\Gamma_1}=R^2\|(B_du+J_{nd}u)_-\|_{\infty,\Gamma_R},$$

получаем (3.4) для достаточно малых $\widetilde{\sigma}_2$. $\square$

Замечание 3.2. В случае $\beta_{(l)}\geqslant\frac{\chi}{4}$ на $\Gamma_{R/2}$ утверждение теоремы 3.1 остается верным, если условие (3.3) заменить неравенством

$$|A_k^u\cap Q_{\rho R}(0,\dots,0,-\frac{R}{2},R^2(-1+\rho^2))|\geqslant\frac{1}{2}|Q_{\rho R}|. \tag{3.3$'$}$$

§4. Гельдеровские оценки для u

В этом параграфе мы будем исследовать вырожденную и невырожденную задачи одновременно.

Пусть J_d – оператор "скачка":

$$J_d u \equiv \tau_1(x',t)\cdot\beta_{(l)}(x',t)\cdot\lim_{x_n\to -0} D_n u(x',x_n,t)-$$

$$-\{1-\tau_1(x',t)\}\cdot\beta_{(r)}(x',t)\cdot\lim_{x_n\to +0} D_n u(x',x_n,t),$$

где $\tau_1\in C(\overline{\Gamma_1})$, $0\leqslant\tau_1(x',t)\leqslant 1$ при $(x',t)\in\Gamma_1$, J_{nd} – оператор "скачка" из §2.

Очевидно, что в вырожденном случае можно выбрать $R_0\leqslant 1$, зависящее только от модуля непрерывности $\tau_1(x,t)$, так, что значения по крайней мере одной из функций τ_1 и $1-\tau_1$ будут не меньше $1/4$ на Γ_{R_0}. В невырожденом случае R_0 – произвольная положительная константа, не превосходящая 1.

Рассмотрим неравенства:

$$|u_t - a^{ij}_{(h)}(x,t,u,Du)D_iD_ju|\leqslant$$

$$\leqslant\mu|Du|^2+b_{(h)}(x,t)|Du|+\Phi_1^{(h)}(x,t)\ \text{в}\ Q^{(h)}_{R_0}, \tag{4.1}$$

$$\|b_{(h)}\|_{n+2,Q^{(h)}_{R_0}}\leqslant\sigma,\qquad \Phi_1^{(h)}\in L_{n+1}(Q^{(h)}_{R_0}),$$

где σ – некоторая неотрицательная константа.

Предположим, что на Γ_{R_0} выполнено одно из двух неравенств:

(Вырожденный случай):

$$|\tau(x,t)\{u_t-\alpha^{sm}(x,t,u,D'u)D_sD_mu\}+J_du|\leqslant$$

$$\leqslant\tau(x,t)\cdot\mu[|D'u|^2+1]+\chi^{-1}[|D'u|+1]\ \text{на}\ \Gamma_{R_0}, \tag{4.2}$$

где χ – некоторая положительная константа;

(Невырожденный случай):

$$|u_t-\alpha^{sm}(x,t,u,D'u)D_sD_mu+J_{nd}u|\leqslant$$

$$\leqslant\mu|D'u|^2+\beta(x,t)|D'u|+\Theta_1(x,t)\ \text{на}\ \Gamma_{R_0}, \tag{4.3}$$

$$\|\beta\|_{n+1,\Gamma_{R_0}}\leqslant\sigma,\qquad\Theta_1\in L_n(\Gamma_{R_0}).$$

Предположим также, что $(a^{ij}_{(h)})$, (α^{sm}) – симметричные матрицы, такие, что выполнены условия эллиптичности

$$\begin{gathered}\nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}_{(h)}(x,t,z,p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2,\\ (x,t)\in Q^{(h)}_{R_0},\quad z\in\mathbb{R}^1,\quad p\in\mathbb{R}^n,\quad \xi\in\mathbb{R}^n;\end{gathered}\tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\nu|\xi|^2 \leqslant \alpha^{sm}(x,t,z,p)\xi_s\xi_m \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2,\\ (x,t)\in \Gamma_{R_0},\quad z\in\mathbb{R}^1,\quad p\in\mathbb{R}^{n-1},\quad \xi\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{gathered}\tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Предположим, что функция u и коэффициенты уравнения на разделяющей пленке удовлетворяют следующим условиям в вырожденном и невырожденном случаях соответственно:*

1. **(Вырожденный случай):**
   - (i) *функция $u\in V^{\Gamma}_{n+1,\infty}(Q_{R_0})$ удовлетворяет неравенству* (4.2)*;*
   - (ii) $\chi\leqslant\beta_{(h)}\leqslant\chi^{-1}$ *на* Γ_{R_0}*;*
   - (iii) τ – *функция, удовлетворяющая условию* (B)*;*
2. **(Невырожденный случай):**
   - (i) *функция $u\in V^{\Gamma}_{n+1}(Q_{R_0})$ удовлетворяет условиям* (4.3)*;*
   - (ii) $0\leqslant\beta_{(h)}\leqslant\beta(x,t)$ *на* Γ_{R_0}.

Предположим также, что в обоих случаях u удовлетворяет неравенствам (4.1), $|u|\leqslant M_0$ *в* $\overline{Q_{R_0}}$ *и выполнены условия эллиптичности* (4.4)–(4.5).

Тогда существует положительная константа $\widehat{\sigma}$, такая, что при условии $\sigma\leqslant\widehat{\sigma}$ справедлива оценка

$$\operatorname*{osc}_{Q_R} u\leqslant C_4\cdot\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\widehat{\gamma}} \quad \text{для любых } R\leqslant R_0.\tag{4.6}$$

В вырожденном случае $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\gamma}\in]0,1[$ определяются значениями n, ν, χ, λ; константа $C_4>0$ зависит от тех же аргументов, а также от μ, M_0, $\|\Phi^{(h)}_1\|_{n+1,Q^{(h)}_{R_0}}$ и от модуля непрерывности $\tau_1(x,t)$.

В невырожденном случае $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\gamma}\in]0,1[$ определяются значениями n, ν, а константа $C_4>0$ зависит от n, ν, μ, M_0, $\|\Phi^{(h)}_1\|_{n+1,Q^{(h)}_{R_0}}$, $\|\Theta_1\|_{n,\Gamma_{R_0}}$.

Доказательство. Покажем, что для любого $R\leqslant R_0$ справедливо неравенство

$$\operatorname*{osc}_{Q_{R/2}} u\leqslant\max\{(1-\varkappa)\operatorname*{osc}_{Q_R} u,\ N\cdot R^{\frac{n-1}{n}}\},\quad \varkappa\in]0,1[,\tag{4.7}$$

где $\varkappa$ и N определяются известными величинами. Известно, что оценка (4.6) получается из (4.7) стандартным образом (см. лемму 5.8, гл. II [14]).

Для $R \leqslant R_0$ введем обозначения

$$u_1 = \inf_{Q_R} u, \quad u_2 = \sup_{Q_R} u, \quad \omega = u_2 - u_1.$$

Предположим, что $\omega > 0$.

Введем функции

$$v^{(K)}(x,t) = 1 - \exp\{-\frac{\varepsilon}{\omega}|u(x,t) - u_K|\}, \quad K = 1, 2,$$

где $\varepsilon \geqslant \omega\mu\nu^{-1}$ (в случае $\mu = 0$ эти функции следует заменить на $\widetilde{v}^{(K)} = \omega^{-1}|u(x,t) - u_K|$ и положить $\varepsilon = 1$). Легко проверить, что функции $v^{(K)}$ удовлетворяют неравенствам

$$v_t^{(K)} - a_{(h)}^{ij} D_i D_j v^{(K)} + b_{(h)}^{i,(K)} D_i v^{(K)} \geqslant -\frac{\varepsilon}{\omega}\Phi_1^{(h)} \text{ в } Q_R^{(h)}. \tag{4.8}$$

Здесь

$$b_{(h)}^{i,(K)}(x,t) = \frac{b_{(h)}(x,t) D_i v^{(K)}(x,t)}{|Dv^{(K)}(x,t)|}$$

(в точках, в которых $|Dv^{(K)}| = 0$, полагаем

$$b_{(h)}^{i,(K)}(x,t) = \frac{b_{(h)}(x,t)}{n^{1/2}},$$

поэтому $|\mathbf{b}_{(h)}^{*,(K)}(x,t)| = b_{(h)}(x,t)$ всюду).

Рассмотрим сначала **вырожденную задачу**. Эта часть доказательства сходна по идее с доказательством теоремы 3.1 [13].

Положив $\beta^{s,(K)}(x,t) = \frac{\chi^{-1} D_s v^{(K)}(x,t)}{|D' v^{(K)}(x,t)|}$, мы получим из (4.2) неравенства

$$\tau\{v_t^{(K)} - \alpha^{sm} D_s D_m v^{(K)}\} + \beta^{s,(K)} D_s v^{(K)} + J_d v^{(K)}$$
$$\geqslant -\frac{\varepsilon}{\omega}\{\chi^{-1} + \tau\mu\} \text{ на } \Gamma_R. \tag{4.9}$$

Выберем $F = F(n, \nu, \chi, \lambda)$ достаточно большим, чтобы выполнялось условие

$$\frac{8\chi^{-1}}{F - 2\lambda} \leqslant \widetilde{\sigma}_1 \tag{4.10}$$

(здесь $\widetilde{\sigma}_1 = \widetilde{\sigma}_1(n,\nu,1/2)$ – константа из теоремы 2.6). Без потери общности можно считать, что $\widehat{\sigma} \leqslant \widetilde{\sigma}_1$.

Далее доказательство естественно распадается на две части.

Случай 1: $\tau(0,0) > F\cdot R$. Из условия (B) имеем неравенство

$$\tau(x,t) \geqslant (F-2\lambda)\cdot R \quad \text{на} \quad \Gamma_R,$$

из которого следует, что (4.9) можно переписать следующим образом:

$$v_t^{(K)} - \alpha^{sm} D_s D_m v^{(K)} + \frac{\beta^{s,(K)}}{\tau} D_s v^{(K)} + \frac{J_d v^{(K)}}{\tau} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\varepsilon}{\omega}\Big\{\frac{\chi^{-1}}{(F-2\lambda)\cdot R} + \mu\Big\} \quad \text{на} \quad \Gamma_R. \tag{4.11}$$

Кроме того, выбор функций $\beta^{s,(K)}$ вместе с нашими предположениями о коэффициентах оператора J_d и неравенством (4.10) приводят к оценке

$$\Big\|\frac{1}{\tau}\cdot\big\{|\beta_*^{',(K)}| + \tau_1\cdot\beta_{(l)} + (1-\tau_1)\cdot\beta_{(r)}\big\}\Big\|_{n+1,\Gamma_R} \leqslant \frac{8\chi^{-1}}{F-2\lambda} \leqslant \widetilde{\sigma}_1.$$

Поэтому по крайней мере одна из функций $v^{(K)}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.6 (при $\zeta_1 = 1/2$ и $k = 1-\exp\{-\frac{\varepsilon}{2}\}$).

Теперь, с учетом (4.8) и (4.11), оценка (4.7) при

$$\varkappa = -\varepsilon^{-1}\ln\big(1-\frac{\widetilde{\delta}_1 k}{2}\big) > 0,$$

$$N = \frac{2\varepsilon C_1}{\widetilde{\delta}_1 k}\cdot\Big[\|\Phi_1^{(r)}\|_{n+1,Q_{R_0}^{(r)}} + \|\Phi_1^{(l)}\|_{n+1,Q_{R_0}^{(l)}} + \frac{4\chi^{-1}}{F-2\lambda} + \mu\Big] \equiv \frac{\varepsilon}{k}N_{14}$$

получается стандартным образом (см., например, теорему 2 [8]).

Случай 2: $\tau(0,0) \leqslant F\cdot R$. Заметим, что значения каждой из функций $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ заполняют отрезок $[0,1-e^{-\varepsilon}]$. Поэтому $\sup_{Q_R} v^{(K)} \leqslant 1$.

Теперь предположим, что $\widehat{\sigma} \leqslant \min\{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2\}$, где $\widetilde{\sigma}_2$ – константа из теоремы 3.1. Далее, выбор константы R_0 и условие (ii) гарантируют, что на Γ_{R_0} по крайней мере одно из произведений $\tau_1\cdot\beta_{(l)}$ и $(1-\tau_1)\cdot\beta_{(r)}$ будет не меньше $\frac{\chi}{4}$. Поэтому, хотя бы одна из функций $v^{(K)}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 (при $k = 1-\exp\{-\frac{\varepsilon}{2}\}$).

Теперь, с учетом (4.8) и (4.11), оценка (4.7) при

$$\varkappa = -\varepsilon^{-1}\ln\bigl(1 - \frac{\widetilde{\delta}_2 k}{4}\bigr) > 0,$$

$$N = \frac{4\varepsilon C_3}{\widetilde{\delta}_2 k}\cdot\bigl[\|\Phi_1^{(r)}\|_{n+1,Q_{R_0}^{(r)}} + \|\Phi_1^{(l)}\|_{n+1,Q_{R_0}^{(l)}} + \chi^{-1} + \mu(F+2\lambda)\bigr] \equiv \frac{\varepsilon}{k}N_{15}$$

получается стандартным образом (см., например, теорему 3.1 [13]).

Комбинируя результаты, полученные в **случаях 1** и **2**, заключаем, что оценка (4.7) при

$$\varkappa = -\varepsilon^{-1}\ln\bigl(1 - \frac{k}{2}\min\bigl\{\widetilde{\delta}_1, \frac{\widetilde{\delta}_2}{2}\bigr\}\bigr),$$

$$N = \frac{\varepsilon}{k}\max\{N_{14}, N_{15}\}$$

справедлива для всех значений $\tau(0,0)$.

Далее, мы переходим к **невырожденной задаче**. Эта часть доказательства аналогична доказательству теоремы 2 [8].

Воспользовавшись (4.3), нетрудно убедиться, что функции $v^{(K)}$ удовлетворяют неравенствам

$$v_t^{(K)} - \alpha^{sm}D_sD_m v^{(K)} + \beta^{s,(K)}D_s v^{(K)} + J_{nd}v^{(K)} \geqslant -\frac{\varepsilon}{\omega}\Theta_1 \quad \text{на } \Gamma_R, \quad (4.12)$$

если $\varepsilon \geqslant \omega\mu\nu^{-1}$. Здесь

$$\beta^{s,(K)}(x,t) = \frac{\beta(x,t)D_s v^{(K)}(x,t)}{|D' v^{(K)}(x,t)|}.$$

С учетом условий теоремы получаем, что по крайней мере одна из функций $v^{(K)}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.6 (при $\zeta_1 = 1/2$ и $k = 1 - \exp\{-\frac{\varepsilon}{2}\}$).

Отсюда, с учетом (4.8) и (4.12), оценка (4.7) с тем же $\varkappa$, что и в **случае 1**, и

$$N = \frac{2\varepsilon C_1}{\widetilde{\delta}_1 k}\cdot\bigl[\|\Phi_1^{(r)}\|_{n+1,Q_{R_0}^{(r)}} + \|\Phi_1^{(l)}\|_{n+1,Q_{R_0}^{(l)}} + \|\Theta_1\|_{n,\Gamma_{R_0}}\bigr]$$

выводится аналогично доказательству теоремы 2 [8].

Вообще говоря, полученные k, $\varkappa$, и, следовательно, $\widehat{\sigma}$, $\widehat{\gamma}$ зависят от μ, ν и M_0, поскольку ε должно удовлетворять неравенству $\varepsilon \geqslant \omega\mu\nu^{-1}$, а для ω предварительно была известна лишь мажоранта $2M_0$. Пользуясь несколько модифицированным методом О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой ([12]), мы можем избавиться от этой зависимости. Это завершает доказательство. □

Теорема 4.2. *Пусть $\partial\Omega$ удовлетворяет условию внешнего конуса (в случае $\Sigma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ будем считать, что $\partial\Omega^{(in)}$ и $\partial\Omega^{(ex)}$ удовлетворяют этому условию). Предположим, что функция u и коэффициенты уравнения на разделяющей пленке удовлетворяют следующим предположениям в вырожденном и невырожденном случаях соответственно:*

1. (Вырожденный случай):

(i) $\Sigma \in W^2_\infty$;
(ii) $u \in V_{n+1,\infty}(Q)$;
(iii) *выполнены условия* (B), (B1), (J), (J0), (J1);

2. (Невырожденный случай):

(i) $\Sigma \in W^2_{n+2}$;
(ii) $u \in V_{n+1}(Q)$;
(iii) *выполнены условия* (B1*), (B2*), (J0*), (J1*).

Предположим, что в обоих случаях u является решением задачи (1.1)–(1.4), $|u| \leqslant M_0$ *в* $\overline{Q}$ *и выполнены условия* (A0), (A1), (A2), (B0).

Тогда существует константа $\gamma > 0$, такая, что

$$[u]_{\gamma,Q} \leqslant M_\gamma.$$

В обоих случаях γ зависит от n, ν и от свойств Σ и $\partial\Omega$. В вырожденном случае γ определяется также значениями χ и λ. Константа M_γ в обоих случаях зависит от μ, M_0, $\|\Phi_1^{(hh)}\|_{n+1,Q^{(hh)}}$, от модулей абсолютной непрерывности $b_{(hh)}(x,t)$ в пространствах $L_{n+2}(Q^{(hh)})$ и от тех же аргументов, что и соответствующая γ. Кроме того, в вырожденном случае M_γ определяется также модулем непрерывности $\tau_1(x,t)$, а в невырожденном случае – величиной $\|\Theta_1\|_{n,\Sigma_T}$ и модулем абсолютной непрерывности $\beta(x,t)$ в пространстве $L_{n+1}(\Sigma_T)$.

Доказательство. Аналогично теореме 1.1 [13] (см. также теорему 1 [8]). □

§5. Разрешимость невырожденной задачи

Теорема 5.1 (глобальная оценка максимума). *Пусть* $\Sigma \in W^2_{n+1}$, *функция* $u \in V_{n+1}(Q)$ – *решение невырожденной задачи* (1.1)–(1.4) *и выполнены условия* (A0), (A1), (B0), (J0*), (B1*), (J1*).

Предположим вдобавок, что

$$b_{(hh)}, \Phi_1^{(hh)} \in L_{n+1}(Q^{(hh)}), \quad \beta, \Theta_1 \in L_n(\Sigma_T).$$

Тогда

$$\|u\|_Q \leqslant M_0,$$

где M_0 *зависит от* n, ν, μ, T, $\operatorname{diam}\Omega$, $\|b_{(hh)}\|_{n+1,Q^{(hh)}}$, $\|\Phi_1^{(hh)}\|_{n+1,Q^{(hh)}}$, $\|\beta\|_{n,\Sigma_T}$, $\|\Theta_1\|_{n,\Sigma_T}$, *от свойств* Σ *и от модулей абсолютной непрерывности функций* $b_{(hh)}(x,t)$ *в пространствах* $L_{n+1}(Q^{(hh)})$ *и функции* $\beta(x,t)$ *в пространстве* $L_n(\Sigma_T)$.

Замечание 5.1. Для доказательства этой теоремы достаточно применить теорему 3.1 [6] к функциям $v^{\pm} = \exp(\pm\mu\nu^{-1}u) - 1$.

Для получения оценок градиента и доказательства разрешимости задачи (1.1)–(1.4) с невырожденным условием (1.3) на разделяющей пленке необходимо наложить дополнительные ограничения на коэффициенты исследуемых уравнений.

Именно, предположим, что для любых $(x,t) \in Q^{(hh)}$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ функции $a^{ij}_{(hh)}$ удовлетворяют следующим естественным структурным ограничениям:

$$a^{ij}_{(hh)}(x,t,z,p) \text{ имеют первые производные по } x,z,p; \tag{A3}$$

$$(1+|p|)\cdot\left|\frac{\partial a^{ij}_{(hh)}(x,t,z,p)}{\partial p}\right| \leqslant \mu_{(hh)},$$

$$\left|\delta a^{ij}_{(hh)}(x,t,z,p)\right| \leqslant \mu_{(hh)}|p| + \Phi_2^{(hh)}(x,t). \tag{A4}$$

Для $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Sigma$ положим $p' = p - (p\cdot\mathbf{n}(x))\mathbf{n}(x)$.

Предположим, что для любых $(x,t) \in \Sigma_T$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ коэффициенты α^{ij} в (1.3) удовлетворяют следующим естественным структурным ограничениям:

$$\alpha^{ij}(x,t,z,p') \quad \text{имеют первые производные по} \quad x,z,p'; \tag{B3*}$$

$$\begin{aligned} &(1+|p'|)\cdot\left|\frac{\partial\alpha^{ij}(x,t,z,p')}{\partial p'}\right|\leqslant\mu, \\ &\left|\delta'\alpha^{ij}(x,t,z,p')\right|\leqslant\mu|p'|+\Theta_2(x,t). \end{aligned}\tag{B4*}$$

Замечание 5.2. Как и прежде, считаем, что $\mu=\mu_{(in)}=\mu_{(ex)}$.

Теорема 5.2 (оценки градиента решений). *Пусть Σ и $\partial\Omega$ – поверхности класса W^2_{q+2}, $\Sigma\cap\partial\Omega=\emptyset$. Предположим, что функция $u\in V_{q+2}(Q)$ – решение невырожденной задачи* (1.1)–(1.4), $\|u\|_Q\leqslant M_0$ *и условия* (A0), (A1), (A3), (A4), (B0), (B1*), (B3*), (B4*), (J0*), (J1*) *выполнены при $|z|\leqslant M_0$.*

Если вдобавок

$$b_{(hh)},\Phi_k^{(hh)}\in L_{q+2}(Q^{(hh)}),\qquad \beta,\Theta_k\in L_{q+1}(\Sigma_T),\quad (k=1,2),\tag{A2$'$}$$

то имеют место оценки

$$\|Du\|_Q\leqslant C_4,\quad [Du]_{\gamma,Q}\leqslant C_5,\quad \|u\|_{V_{q+2}(Q)}\leqslant C_6,$$

где константы $\gamma\ \in]0,1[$, C_4-C_6 зависят от n, ν, μ, q, M_0, $\|b_{(hh)}\|_{q+2,Q^{(hh)}}$, $\|\beta\|_{q+1,\Sigma_T}$, $\|\Phi_k^{(hh)}\|_{q+2,Q^{(hh)}}$, $\|\Theta_k\|_{q+1,\Sigma_T}$, $(k=1,2)$, а также от свойств Σ и $\partial\Omega$.

Замечание 5.3. Это утверждение доказывается аналогично теореме 3.1 [9] и следствию 3.1 [9].

Сформулируем теоремы о разрешимости невырожденной задачи в пространствах Соболева и Гельдера.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *Σ и $\partial\Omega$ – поверхности класса W^2_{q+2}, $\Sigma\cap\partial\Omega=\emptyset$;*

(ii) *функции $a^{ij}_{(hh)}(x,t,z,p)$ и $\alpha^{ij}(x,t,z,p')$ непрерывны по всем своим аргументам;*

(iii) *функции $a_{(hh)}(\cdot,z,p)$ непрерывны по (z,p) как элементы пространств $L_{q+2}(Q^{(hh)})$, а функции $\alpha(\cdot,z,p')$, $\beta_{(hh)}(\cdot,z,p)$ непрерывны по (z,p) как элементы пространства $L_{q+1}(\Sigma_T)$;*

(iv) *выполнены условия* (A0), (A1), (A2'), (A3), (A4), (B0), (B1*), (B3*), (B4*), (J0*), (J1*).

Тогда задача (1.1)–(1.4) *имеет решение $u\in V_{q+2}(Q)$.*

Замечание 5.4. Утверждение теоремы доказывается дословным повторением доказательства теоремы 1.1 [7] с использованием теоремы 5.2 вместо следствия 3.1 [7] и теоремы 5.1 вместо леммы 4.1 [7].

Теорема 5.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) Σ *и* $\partial\Omega$ *– поверхности класса* $C^{2+\gamma}$, $\gamma \in]0,1[$, $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$;

(ii) *функции* $a^{ij}_{(hh)}$, $a_{(hh)}$, α^{ij}, α, $\beta_{(hh)}$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* γ *по переменным* x, z, p *и с показателем* $\frac{\gamma}{2}$ *по переменной* t;

(iii) *выполнены условия* (A0), (A3), (A4), (B0), (B1), (B3*), (B4*), (J0*), (J1), *а также следующее структурное ограничение:*

$$|a_{(hh)}(x,t,z,p)| \leqslant \mu(|p|^2+1) \text{ для любых } (x,t) \in Q^{(hh)}, z \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^n;$$

$$a_{(hh)}(x,0,0,0) = \alpha(x,0,0,0) \quad \text{при} \quad x \in \Sigma;$$

$$a_{(ex)}(x,0,0,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega;$$

(iv) $\Phi_2^{(hh)} \in L_{q+2}(Q^{(hh)})$, $\quad \Theta_2 \in L_{q+1}(\Sigma_T)$.

Тогда задача (1.1)–(1.4) *имеет решение* $u \in C^{2+\gamma}_{\Sigma}(Q)$.

§6. Приложение. Стационарный случай

В этом параграфе мы формулируем результаты для эллиптических задач, аналогичные теоремам из §§4–5.

Во всем параграфе предполагается, что функции, входящие в оператор “скачка” $\mathcal{J}$, и функция u не зависят от переменной t. По аналогии с параболическим случаем введем следующие пространства Соболева:

$V_q(\Omega) = W^2_q(\Omega^{(in)} \cup \Omega^{(ex)}) \cap W^2_{q-1}(\Sigma) \cap C(\overline{\Omega})$ с нормой

$$\|u\|_{V_q(\Omega)} = \|u\|_{W^2_q(\Omega^{(in)})} + \|u\|_{W^2_q(\Omega^{(ex)})} + \|u\|_{W^2_{q-1}(\Sigma)};$$

$V_{q,\infty}(\Omega) = W^2_q(\Omega^{(in)} \cup \Omega^{(ex)}) \cap W^2_\infty(\Sigma) \cap C(\overline{\Omega})$ с нормой

$$\|u\|_{V_{q,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{W^2_q(\Omega^{(in)})} + \|u\|_{W^2_q(\Omega^{(ex)})} + \|u\|_{W^2_\infty(\Sigma)}.$$

Соответствующая двухфазная эллиптическая задача имеет вид:

$$-a^{ij}_{(in)}(x,u,Du)D_iD_ju + a_{(in)}(x,u,Du) = 0 \text{ в } \Omega^{(in)}, \tag{6.1}$$

$$-a^{ij}_{(ex)}(x,u,Du)D_iD_ju + a_{(ex)}(x,u,Du) = 0 \text{ в } \Omega^{(ex)}, \tag{6.2}$$

$$\tau(x)\{-\alpha^{ij}(x,u,du)d_id_ju + \alpha(x,u,du)\} + \mathcal{J}u = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{6.3}$$

Будем считать, что $(a^{ij}_{(hh)})$ – симметричные матрицы и для любых $x \in \Omega^{(hh)}$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ выполнен ряд естественных структурных ограничений:

$$\nu_{(hh)}|\xi|^2 \leqslant a^{ij}_{(hh)}(x,z,p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}_{(hh)}|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{6.4}$$

$$|a_{(hh)}(x,z,p)| \leqslant \mu_{(hh)}|p|^2 + b_{(hh)}(x)|p| + \Phi_1^{(hh)}(x); \tag{6.5}$$

$$b_{(hh)}, \Phi_1^{(hh)} \in L_n(\Omega^{(hh)}). \tag{6.6}$$

Исследуя вырожденную задачу, мы предполагаем, что функции τ и τ_1 удовлетворяют соответственно условиям (B) и (J), в которых Σ_T заменена на Σ. В невырожденном случае мы считаем, не умаляя общности, что $\tau = \tau_1 \equiv \frac{1}{2}$ на Σ.

Кроме того, при изучении обеих задач мы предполагаем, что функции $\beta_{(in)}(x,z,p)$ и $\beta_{(ex)}(x,z,p)$ в (6.3) дифференцируемы по p, (α^{ij}) – симметричная матрица, и неравенства

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \alpha^{ij}(x,z,p')\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2 \tag{6.7}$$

справедливы для любых $(x) \in \Sigma$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, таких, что $\xi \perp \mathbf{n}(x)$.

Замечание 6.1. Как и прежде, считаем, что $\mu = \mu_{(in)} = \mu_{(ex)}$, $\nu = \nu_{(in)} = \nu_{(ex)}$.

Теорема 4.2*. *Пусть $\partial\Omega$ удовлетворяет условию внешнего конуса (в случае $\Sigma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ будем считать, что $\partial\Omega^{(in)}$ и $\partial\Omega^{(ex)}$ удовлетворяют этому условию). Предположим, что функция u и коэффициенты уравнения* (6.3) *удовлетворяют следующим предположениям в вырожденном и невырожденном случаях соответственно:*

1. (Вырожденный случай):

(i) $\Sigma \in W^2_\infty$*;*

(ii) $u \in V_{n,\infty}(\Omega)$*;*

(iii) *выполнены условия* (B), (J)*;*

(iv) *неравенства*

$$|\alpha(x,z,p')| \leqslant \mu(|p'|^2+1); \tag{6.8}$$

$$|\beta_{(hh)}(x,z,p)| \leqslant \chi^{-1}(|p|+1); \tag{6.9}$$

$$\chi \leqslant \frac{\partial\beta_{(hh)}(x,z,p)}{\partial p_i} \cdot \mathbf{n}_i(x) \leqslant \chi^{-1}$$

справедливы при любых $x \in \Sigma$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$;

2. (Невырожденный случай):

(i) $\Sigma \in W_n^2$;

(ii) $u \in V_n(\Omega)$;

(iii) *для любых* $x \in \Sigma$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ *выполнены следующие условия:*

$$|\alpha(x,z,p')| \leqslant \mu|p'|^2 + \beta(x)|p'| + \Theta_1(x); \tag{6.10}$$

$$|\beta_{(hh)}(x,z,p)| \leqslant \beta(x)|p| + \Theta_1(x); \tag{6.11}$$

$$0 \leqslant \frac{\partial\beta_{(hh)}(x,z,p)}{\partial p_i} \cdot \mathbf{n}_i(x) \leqslant \beta(x); \tag{6.12}$$

$$\beta, \Theta_1 \in L_{n-1}(\Sigma).$$

Предположим, что в обоих случаях u *является решением задачи* (6.1)–(6.3), $|u| \leqslant M_0$ *в* $\overline{\Omega}$ *и выполнены условия* (6.4)–(6.7).

Тогда существует константа $\gamma > 0$, *такая, что*

$$[u]_{\gamma,\Omega} \leqslant M_\gamma.$$

В обоих случаях γ *зависит от* n, ν *и от свойств* Σ *и* $\partial\Omega$. *В вырожденном случае* γ *определяется также значениями* χ *и* λ. *Константа* M_γ *в обоих случаях зависит от* μ, M_0, $\|\varPhi_1^{(hh)}\|_{n,\Omega^{(hh)}}$, *от модулей абсолютной непрерывности* $b_{(hh)}(x)$ *в пространствах* $L_n(\Omega^{(hh)})$ *и от тех же аргументов, что и соответствующая* γ. *Кроме того, в вырожденном случае* M_γ *определяется также модулем непрерывности* $\tau_1(x)$, *а в невырожденном случае – величиной* $\|\Theta_1\|_{n-1,\Sigma}$ *и модулем абсолютной непрерывности* $\beta(x)$ *в пространстве* $L_{n-1}(\Sigma)$.

Теорема 5.2*. *Пусть* Σ *и* $\partial\Omega$ *– поверхности класса* W_q^2, $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$. *Предположим, что функция* $u \in V_q(\Omega)$ *– решение невырожденной задачи* (6.1)–(6.3), $\|u\|_Q \leqslant M_0$ *и при* $|z| \leqslant M_0$ *выполнены неравенства* (6.4), (6.5), (6.7), (6.10)–(6.12).

Будем считать, что при любых $x \in \Omega^{(hh)}$, $z \in \mathbb{R}^1$, $|z| \leqslant M_0$, $p \in \mathbb{R}^n$ *выполнен ряд естественных структурных ограничений:*

$a_{(hh)}^{ij}(x,z,p)$ *имеют первые производные по всем аргументам;* (6.13)

$$(1+|p|) \cdot \left|\frac{\partial a_{(hh)}^{ij}(x,z,p)}{\partial p}\right| \leqslant \mu_{(hh)}, \qquad \left|\delta a_{(hh)}^{ij}(x,z,p)\right| \leqslant \mu_{(hh)}|p| + \varPhi_2^{(hh)}(x). \tag{6.14}$$

Предположим также, что при любых $x \in \Sigma$, $z \in \mathbb{R}^1$, $|z| \leqslant M_0$, $p \in \mathbb{R}^n$ *выполнены следующие условия:*

$$\alpha^{ij}(x,z,p') \text{ имеют первые производные по всем аргументам;} \tag{6.15}$$

$$\begin{gathered}(1+|p'|)\cdot\left|\frac{\partial\alpha^{ij}(x,z,p')}{\partial p'}\right| \leqslant \mu,\\ \left|\delta'\alpha^{ij}(x,z,p')\right| \leqslant \mu|p'| + \Theta_2(x).\end{gathered} \tag{6.16}$$

Если вдобавок

$$b_{(hh)}, \Phi_k^{(hh)} \in L_q(\Omega^{(hh)}), \qquad \beta, \Theta_k \in L_{q-1}(\Sigma), \quad (k=1,2), \tag{6.17}$$

то имеют место оценки

$$\|Du\|_\Omega \leqslant C'_4, \quad [Du]_{\gamma,\Omega} \leqslant C'_5, \quad \|u\|_{V_q(\Omega)} \leqslant C'_6,$$

где константы $\gamma \in]0,1[$, $C'_4 - C'_6$ *зависят от* n, ν, μ, q, M_0, $\|b_{(hh)}\|_{q,\Omega^{(hh)}}$, $\|\beta\|_{q-1,\Sigma}$, $\|\Phi_k^{(hh)}\|_{q,\Omega^{(hh)}}$, $\|\Theta_k\|_{q-1,\Sigma}$, $(k=1,2)$, *а также от свойств* Σ *и* $\partial\Omega$.

Теорема 5.3*. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) Σ *и* $\partial\Omega$ *– поверхности класса* W_q^2, $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$;

(ii) *функции* $a_{(hh)}(\cdot,z,p)$ *непрерывны по* (z,p) *как элементы пространств* $L_q(\Omega^{(hh)})$, *а функции* $\alpha(\cdot,z,p')$, $\beta_{(hh)}(\cdot,z,p)$ *непрерывны по* (z,p) *как элементы пространства* $L_{q-1}(\Sigma)$;

(iii) *для всех возможных решений* $u(\cdot,\varepsilon) \in V_q(\Omega)$, $\varepsilon \in [0,1]$, *семейства задач*

$$\begin{cases}\varepsilon(-a^{ij}_{(in)}(x,u,Du)D_iD_ju + a_{(in)}(x,u,Du)) -\\ -(1-\varepsilon)\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^{(in)},\\ \varepsilon(-a^{ij}_{(ex)}(x,u,Du)D_iD_ju + a_{(ex)}(x,u,Du)) -\\ -(1-\varepsilon)\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^{(ex)},\\ \varepsilon(-\alpha^{ij}(x,u,du)d_id_ju + \alpha(x,u,du)) -\\ -(1-\varepsilon)\cdot(\Delta u - u) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma\end{cases} \tag{6.18}$$

справедлива оценка: $\|u(\cdot,\varepsilon)\|_\Omega \leqslant M_0$;

(iv) *выполнены условия* (6.4), (6.5), (6.7), (6.10)–(6.17).

Тогда задача (6.1)–(6.3) *имеет решение* $u \in V_q(\Omega)$.

Теорема 5.4*. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) Σ *и* $\partial\Omega$ – *поверхности класса* $C^{2+\gamma}$, $\gamma \in]0,1[$, $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$;

(ii) *функции* $a_{(hh)}$, α, $\beta_{(hh)}$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* γ *по всем переменным;*

(iii) *для всех возможных решений* $u(\cdot,\varepsilon) \in C^{2+\gamma}_{\Sigma}(\Omega)$, $\varepsilon \in [0,1]$, *семейства задач* (6.18) *справедлива оценка:* $\|u(\cdot,\varepsilon)\|_{\Omega} \leqslant M_0$;

(iv) *выполнены условия* (6.4), (6.7)–(6.11), (6.13)–(6.16), *а также следующее структурное ограничение:*

$$|a_{(hh)}(x,z,p)| \leqslant \mu(|p|^2+1) \text{ для любых } x \in \Omega^{(hh)}, z \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^n;$$

(v) $\Phi_2^{(hh)} \in L_q(\Omega^{(hh)})$, $\quad \Theta_2 \in L_{q-1}(\Sigma)$.

Тогда задача (6.1)–(6.3) *имеет решение* $u \in C^{2+\gamma}_{\Sigma}(\Omega)$.

Теоремы 5.3*–5.4* носят условный характер: для их применения необходима глобальная оценка максимума решений невырожденной двухфазной эллиптической задачи Вентцеля. Такая оценка может быть получена при различных условиях. Ниже мы приводим одно из возможных утверждений:

Теорема 6.1. *Пусть* $\Sigma \in C^2$, *функция* $u \in C^2(\overline{\Omega^{(in)}}) \cap C^2(\overline{\Omega^{(ex)}})$ – *решение невырожденной задачи* (6.1)–(6.3) *и выполнены условия* (6.4), (6.7), (6.12).

Предположим вдобавок, что для любого $z \in \mathbb{R}^1$, *такого, что* $|z| \geqslant M_0$, *справедливы следующие неравенства:*

$$\operatorname{sign}(z)\cdot a_{(hh)}(x,z,0) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega^{(hh)},$$

$$\operatorname{sign}(z)\cdot \big\{\alpha(x,z,0) + \beta_{(in)}(x,z,0) - \beta_{(ex)}(x,z,0)\big\} > 0 \text{ при } x \in \Sigma.$$

Тогда $\|u\|_{\overline{\Omega}} \leqslant M_0$.

Литература

1. J. R. Cannon, G. H. Meyer, *On diffusion in a fractured medium.* — SIAM J. Appl. Math. **3** (1971), 434–448.
2. P. Korman, *Existence of periodic solutions for a class of nonlinear problems.* — Nonlinear Anal. **7** (1983), 873–879.
3. P. Korman, *Existence of solutions for a class of semilinear noncoercive problems.* — Nonlinear Anal. **10** (1986), 1471–1476.
4. M. Shinbrot, *Water waves over periodic bottoms in three dimensions.* — J. Inst. Math. Appl. **25** (1980), 367–385.
5. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *A survey of results on nonlinear Venttsel problems.* — Appl. of Math. **45**, No. 1 (2000), 69–80.

6. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Linear two-phase Venttsel problems.* Report No. 8, 1999/2000, Institut Mittag-Leffler (статья принята к печати в журнал Arkiv för Matematik).
7. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений.* — Алгебра и анализ **6**, № 6 (1994), 1–29.
8. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition.* — Am. Math. Soc. Transl. (2) **164** (1995), 1–13.
9. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Нестационарная задача Вентцеля с квадратичным ростом по градиенту.* — Проблемы мат. анализа **15** (1995), 33–46.
10. Д. Е. Апушкинская, *Оценка максимума решений параболических уравнений с граничным условием Вентцеля.* — Вестник Ленингр. унив., Сер.1 **24**, № 2 (1991), 3–12.
11. А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, *Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **147** (1985), 95–109.
12. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Оценки константы Гельдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому неравенству с неограниченными коэффициентами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **147** (1985), 72–94.
13. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида.* — Проблемы мат. анализа **17** (1997), 3–19.
14. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., 1967.

Apushkinskaya D. E. and Nazarov A. I. Quasilinear two-phase Venttsel problems.

A majorant of the Hölder norms is established for solutions of the two-phase quasilinear parabolic (elliptic) boundary value problems with degenerate and nondegenerate Venttsel interface conditions. In addition, gradient estimates for solutions of the two-phase quasilinear nondegenerate Venttsel problems as well as the solvability results in Sobolev and Hölder spaces are obtained.

С.-Петербургский
государственный университет

19 февраля 2000 г.

С.-Петербургский
государственный университет