Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

Об Александре Васильевиче ИВАНОВЕ

Александр Васильеич родился 13-го августа 1936 г. в Ленинграде, в доме No. 48 по Садовой улице, принадлежавшим до революции его деду, Василию Ивановичу, юристу.

Дом, конечно, был отобран и семья ютилась в двух комнатах большой коммунальной квартиры. Отец, Василий Васильевич, был морским офицером. Много лет он проработал в историческом отделе Главного штаба ВМФ, а затем в центральном Военно-морском архиве ВМС и вышел в отставку в звании подполковника. Мать, Елизавета Ивановна, не служила, ухаживала за семьей.

Годы войны Александр Васильевич провел вместе с родителями в эвакуации (в Астрахани и Куйбышеве), а в 1944 году все они вернулись в Ленинград.

В 1954 году он окончил среднюю школу No. 232 и поступил на математико-механический факультет Ленинградского университета, который окончил с отличием летом 1959 г. Дипломную работу делал под моим руководством, и я его взяла на работу в ЛОМИ, в свою группу. С тех пор и до конца своих дней он работал в этой группе, оформившейся в 1961 году в лабораторию "Математическая физика".

В 1966 году А. В. защитил кандидатскую диссертацию на тему "Исследование свойств обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений 2-го порядка". К этому времени была написана монография Ладыженской, Солонникова и Уральцевой "Линейные и квазилинейные параболические уравнения второго порядка" ("Наука", Москва, 1967 год), содержащая наиболее полные к тому времени результаты по разрешимости краевых задач для указанных в заглавии уравнений и качественному анализу свойств их решений. Бóльшая часть их была получена авторами монографии в течение последних десяти лет.

Александр Васильевич был привлечен к построению примеров, подтверждающих точность ряда результатов, касающихся свойств обобщенных решений линейных параболических уравнений, коэффициенты которых суммируемы по $Q_T = \Omega \times (0,T)$ с теми или иными степенями.

Затем им был проведен детальный анализ решений линейных и квазилинейных параболических уравнений вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} a_i(x,t,u,u_x) + a_0(x,t,u,u_x) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &\big|a_i(x,t,u,p)\big| \leqslant \mu|p| + A(x,t)|u| + B(x,t),\\ &a_i(x,t,u,p)p_i \geqslant \nu p^2 - C(x,t)u^2 - D(x,t),\\ &\big|a_0(x,t,u,p)\big| \leqslant F(x,t)|p| + H(x,t)|u| + G(x,t), \end{aligned}$$

в которых мажоранты $A,\ldots,G$ суть неотрицательные функции $(x,t) \in Q_T$, принадлежащие пространствам $L_{q_i,r_i}(Q_T)$ с разными q_i и r_i. Александр Васильевич выяснил при каких значениях q_i, r_i обобщенные решения u из энергетического класса принадлежат $L_{q,r}(Q_T)$ или $L_\infty(Q_T)$ (т.е. являются ограниченными функциями). Он изучал и некоторые другие свойства таких решений. Из них наиболее тонкие – это справедливость для них неравенства Гарнака. Используя его, он оценил и норму Гёльдера самого решения u. Все это составлило содержание его первой, кандидатской диссертации.

После этого он активно включается в изучение неравномерно эллиптических и неравномерно параболических квазилинейных уравнений 2-го порядка. Полученные им до 1967 года результаты отражены в упомянутой выше монографии. Далее он занялся выделением классов уравнений этого типа, для которых остается справедливой классическая разрешимость задачи Дирихле. Эти классы включили в себя многие конкретные уравнения геометрии и механики. Для их решений u он получил необходимые априорные оценки модуля градиента $\partial_x u$. Именно, они в силу результатов Ладыженской и Уральцевой, составляют главную часть в исследовании разрешимости. Он получил также и локальные оценки градиента и на их основе доказал теоремы лиувиллевского типа, двусторонние и односторонние.

При этих штудиях неравномерно эллиптических и параболических уравнений он детально проследил какие именно характеристики функций, образующих уравнения ответственны за наличие тех или иных оценок градиентов $\partial_x u$. На основе этого анализа он выделил классы уравнений, для которых сохраняются те или иные свойства решений. Более того, он увидел, что некоторые свойства решений сохраняются и при вырождении эллиптичности (соответственно, параболичности). Это привело его к выделению широких классов квазилинейных эллиптических и параболических уравнений, вырождающихся на произвольных фиксированных множествах изменения независимых переменных, для которых тем не мнее, корректны “правильно сформулированные” задачи Дирихле. Эти классы включают в себя классы линейных эллиптических уравнений с неотрицательной основной квадратичной формой, изучавшихся Г. Фикера, а затем рядом других математиков. Здесь нет возможности осветить более подробно этот раздел исследований Александра Васильевича, но хочу отметить, что он еще найдет своих читателей и продолжателей.

Описанные работы, выполненные в течение 1966–1981 годов, составили содержание его докторской диссертации “Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка”, успешно защищенной в ЛОМИ в феврале 1982 года.

Изученные в ней классы вырождающихся уравнений теряют свою эллиптичность (параболичность) на заранее известных множествах независимых переменных. Но в механике и математике немало уравнений с так называемым неявным вырождением, зависящим от решения.

К изучению именно таких уравнений приступил Александр Васильевич после защиты второй диссертации. Главным объектом его исследований становятся уравнения вида

$$\partial_t - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \left(|u|^l |u_{x_i}|^{m-2} \right) = 0, \quad m > 1, \quad l \geqslant 0, \tag{2}$$

и некоторые их обобщения. Он назвал их “дважды вырождающимися”, имея ввиду то, что они вырождаются и в тех точках (x,t), где $u(x,t)=0$, и в тех, где обращаются в ноль производные u_{x_i}.

Важным этапом в изучении уравнений (2) было доказательство гельдеровости их обобщенных решений, данное Ди Бенедетто сначала для случая $l = 0$, $m > 2$ а затем (вместе с Чен-Я-Ши) и для $m \in (1,2)$. Оно существенно дополняло методику Ладыженской–Уральцевой, развитую ими для изучения решений уравнений вида (1).

Александр Васильевич, развивая далее эти методы, сначала оценил норму Гёльдера для решений уравнения (2) с $l > 0$, $m = 2$, и аналогичных систем параболических уравнений. Позднее, в 1989–92 годах он это сделал и для $l > 0$, $m > 1$.

Разрешимость первой начально-краевой задачи для (2) при $l > 0$ (а также для некоторых их обобщений) была установлена Х. В. Альтом и С. Лукхаусом (1983). Они это сделали в классе обобщенных решений с конечной энергетической нормой. Однако, единственность они доказали только для случая $m = 2$. В конце 80-х годов под руководством Александра Васильевича начал свою стажировку в аспирантуре П. З. Мкртычян. С ним вместе они доказали для уравнений (2) существование неотрицательных обобщенных решений первой начально-краевой задачи, принадлежащих пространству Гёльдера и имеющих конечную энергетическую норму (1990). Они оценили для них сверху и величину $\sup\limits_{Q_T}\left(u^{l-2-1/\gamma}\left|u_x\right|^m\right)$, где γ – показатель гёльдеровости для u.

В 1992 году Александр Васильевич ввел понятие "квазисильных" решений первой начально-краевой задачи для (2) (они, по определению, являются неотрицательными функциями) и доказал, что в этом классе эта задача глобально однозначно разрешима при $\forall m \geqslant 2$, $l \geqslant 0$. В совместной работе с В. Егеромом и П. З. Мкртычяном это было сделано и для $m \in (1,2)$, $l \geqslant 0$ (1994).

В следующем году Александр Васильевич оценил норму Гёльдера для решений уравнений (2) при всех $m > 1$ и $l > 1 - m$.

Александр Васильевич внес свой вклад и в изучение более общих, чем (2), уравнений вида

$$\partial_t b(u) - \operatorname{div}\left[\left|\nabla u + k\big(b(u)\big)\vec{e}\right|^{m-2}\big(\nabla u + k\big(b(u)\big)\vec{e}\big)\right] = 0.$$

В них $\vec{e}$ есть фиксированный вектор в R^n, b и k суть непрерывные функции, причем b является неубывающей. Для них Ф. Отто установил важный результат – теорему единственности в классе обобщенных решений из энергетичноского класса (1995–96гг.). Он пишет, что сделал это для любого $m > 1$. Однако, Александр Васильевич считал аргументы Отто недостаточными в случаях $m \in (1,2)$, и опубликовал в связи с этим работу, выполненную совместно с И. Ф. Родригесом (1999).

Доказательству однозначной разрешимости первой начально-краевой задачи для уравнений (2) в классе “квазисильных” решений посвящена совместная с В. Егером работа Александра Васильевича (1996), а также работа 1997 г. одного Александра Васильевича.

Александр Васильевич изучал и вопросы о конечности скорости распространения возмущений для вырождающихся уравнений и некоторые задачи с препятствиями (совместно с И. Ф. Родригесом).

Много лет Александр Васильевич вел и педагогическую работу (по совместительству). В 1962–69 г.г. он читал лекции на заочном отделении математико-механического факультета Университета. Особенно много сил он вкладывал в курсы лекций по краевым задачам математической физики, стараясь следовать соответствующим лекциям, которые я читала много лет на очном отделении. С 1969 по 1993 он проработал в Ленинградском Высшем Военно-Инженерном строительном училище им. Комаровского, сначала в звании доцента, а с 1987 года – в звании профессора.

Александр Васильевич многократно получал поощрения по работе в нашем институте, а в 1994–1996 и 1997–2000 годы имел государственную стипендию Правительства России. Все годы существования грантов РФФИ он был участником такого гранта моей лаборатории.

Выезжать заграницу он, как и большинство из нас, начал, в основном, в 90-х годах. Он был приглашенным докладчиком на международных конференциях в Обервольфахе (1993, 1995), в Братиславе (1993), в Варшаве (1993), в Португалии (1996), а также в Москве (1996, 1998) и Санкт-Петербурге (1995). В десять институтов разных стран выезжал он на более длительные сроки. Особенно много времени он провел в Германии, в Бонне, Гайдельберге и Лейпциге.

Работал Александр Васильевич со всем напряжением своих сил. Он ценил и любил место своей основной службы – наш институт. Аккуратно исполнял взятые на себя обязательства. У всех нас он оставил добрую о себе память. Он был любящим и заботливым сыном, мужем, отцом, дедушкой.

К сожалению, он не обратился к нам, его коллегам и друзьям, с прособой помочь найти хорошего врача-кардиолога, который дал бы ему правильные рекомендации для регулирования работы сердца. Сердце давало о себе знать, но не настолько, чтобы бить тревогу. Он сам пришел в больницу и был уверен, что через несколько дней выйдет из нее. Да, он вышел через неделю, но, увы, в другую жизнь.

О. Ладыженская