Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

В. Г. Бойцов

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА ИЗ ГРУППЫ ГЛАВНЫХ ЕДИНИЦ В ДВУМЕРНЫХ ПОЛНЫХ ПОЛЯХ

Введение

В случае локального поля F имеется изоморфизм F^* и $\mathbb{Z} \times U_1$, где U_1 – группа главных единиц, которая (при некоторых условиях на F) является свободным $\mathbb{Z}_p$-модулем (см. [2] Chap. 1 §6). Для доказательства последнего утверждения используется существование и единственность представления элемента a из группы главных единиц в виде

$$a = \prod_{\substack{(i,p)=1 \\ i>0}} \prod_{\theta \in R_0} (1 + \theta \pi_i)^{a_{i\theta}},$$

где R_0 – множество представителей Тейхмюллера элементов базиса $\overline{F}$ над $\mathbb{F}_p$, $v(\pi_i) = i$, $a_{i\theta} \in \mathbb{Z}_p$. При переходе к многомерным полным полям вопрос о существовании и единственности аналогичного разложения усложняется, так как сходимость бесконечных произведений в многомерном случае отличается от одномерного. И формулировки теорем из ([1], §2) не верны, что легко видеть на примере элемента $\varepsilon = 1 + t + t^2 + \dots$ и $\varepsilon_{(i,0),1} = 1 + t^i + \pi t^{-i}$. Тогда в разложение ε входит ряд

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + t^n + \pi t^{-n}),$$

который не сходится. В данной статье рассмотрен случай двумерного полного поля, который, при достаточно большой наглядности, позволяет обобщать полученные результаты на случай произвольной размерности.

Основные определения и обозначения

Определение 1. *K – n-мерное полное поле, если есть цепочка полей $K^{(n)} = K$, $K^{(i)}$ – полное дискретно нормированное поле, с полем вычетов $K^{(i-1)}$, а $K^{(0)} = F$ – совершенное поле.*

Определение 2. *В предыдущих обозначениях, набор элементов поля K $t_n, \ldots, t_1$ назовем системой локальных параметров, если для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, t_i – единица в $K^{(n)}$, его вычет единица в $K^{(n-1)}$, и т.д. до $K^{(i)}$, где соответствующий вычет будет простым элементом.*

Обозначения. Для многомерного полного поля K введем следующие обозначения:

- $\overline{v}_K = (v^{(n)}, \ldots, v^{(1)}) : K \to \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\}$, где для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$ $v^{(i)}(a) = v_{K^{(i)}}(\overline{at_n^{-v^{(n)}(a)} \cdot \ldots \cdot t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(a)}})$, $v^{(n)}$ – нормирование соответствующего поля $K^{(n)}$, а группа $\mathbb{Z}^n$ предполагается лексикографически упорядоченной.
- $\mathfrak{M}_K = \{a \in K \mid \overline{v}(a) > 0\}$
- $V_K = 1 + \mathfrak{M}_K$ – группа главных единиц.

Определение 3. *Набор мультииндексов $I \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым, если для любых целых $i^{(n)}, \ldots, i^{(l+1)}$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$ найдется целое i, такое, что из $\overline{r} \in I$, $r^{(n)} = i^{(n)}, \ldots, r^{(l+1)} = i^{(l+1)}$ следует $r^{(l)} \geqslant i$.*

Обозначения. В данной статье всегда будем полагать, что

- K – двумерное полное дискретно нормированное поле,
- $\overline{K}$ – его поле вычетов, причем $\operatorname{char} \overline{K} = p > 0$,
- $F = \overline{\overline{K}}$ – последнее поле вычетов,
- π, t – система локальных параметров,
- $\mathfrak{R}_K \subset K^*$ – группа представителей Тейхмюллера ненулевых элементов поля F,
- $\mathfrak{O}_K$ – кольцо нормирования поля K,
- $\mathbb{Z}_p$ – целые p-адические числа,
- ξ_p – корень p-ой степени из 1,
- $\mathfrak{p}((i,j)) = \{u \in K \mid \overline{v}(u) \geqslant (i,j)\}$, и соответственно
- $\mathfrak{p}((i,j)+) = \{u \in K \mid \overline{v}(u) > (i,j)\}$.

Через $\{i,j\}$ обозначим любой элемент u такой, что $\overline{v}(u) = (i,j)$, а через $\{i,j+\}$, соответственно любой элемент со строго большим нормированием.

При $\operatorname{char} K = 0$ введем следующие обозначения:

- $\overline{e} = (e_1, e_2) = \overline{v}(p)$ – абсолютный индекс ветвления K.

- $\theta_0 \in \mathfrak{R}_K$ – такой элемент, что $p \equiv \theta_0 \pi^{e_1} t^{e_2} \bmod \mathfrak{p}(\overline{e}+)$

Определение 4. *Для любого элемента и поля K рассмотрим его аддитивное разложение с коэффициентами из $\mathfrak{R}_K$, через $A_l(u)$ обозначим минимальное целое число j такое, что в этом разложении при $t^j \pi^l$ стоит ненулевой коэффициент, и ∞, если такого j не существует.*

Замечание. Базисом окрестностей нуля в поле K являются множества вида

$$\mathfrak{U}_{u,\{i_l\}_{l\leqslant u}} = \{x \in K | A_l(x) > i_l, \quad l \leqslant u\}, \quad \text{где} \quad u, l \in \mathbb{Z}.$$

§1. Условия существования

Предложение. *Для набора $\{a_i \in \mathfrak{M}_K\}_{i\in\mathbb{N}}$ следующие два утверждения равносильны:*

1. *Произведение $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}(1+a_i)$ – сходится.*
2. *Для любого $i \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_i(a_n) = \infty$.*

Замечание. Второе условие равносильно тому, что для любой окрестности нуля $\mathfrak{U}$ множество $\{i \mid a_i \notin \mathfrak{U}\}$ – конечно.

Следствие. *В условиях Предложения, результат перемножения не зависит от порядка сомножителей, так как по модулю любой окрестности нуля произведение конечно.*

Доказательство предложения. Пусть второе условие не выполнено, тогда рассмотрим минимальное k, для которого существует последовательность индексов $\{l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ такая, что для любого $j \in \mathbb{N}$ значение $A_k(a_{l_j})$ будет меньше некоторого j_0. Пусть $\mathfrak{U}$ – такая окрестность нуля, для которой значение A_k у любого элемента больше j_0. Если произведение $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}(1+a_i)$ сходится, то для некоторого $n \in \mathbb{N}$ будет выполнено

$$\prod_{i=1}^{m+1}(1+a_i) - \prod_{i=1}^{m}(1+a_i) \in \mathfrak{U} \quad \text{для любого} \quad m > n.$$

Это равносильно тому, что

$$a_{m+1}\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) \in \mathfrak{U}.$$

Тогда, так как

$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) \quad \text{сходится при} \quad m \to \infty,$$

то

$$A_r\left(\prod_{i=1}^{m}(1+a_i)\right) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r < k$$

ограничены снизу, и существует N, начиная с которого при $0 \leqslant r < k$

$$A_r(a_{m+1}) + \min_{j<k}\left\{A_j\left(\prod_{i=1}^{m}(1+a_i)\right)\right\} > j_0 \quad (m > N),$$

в частности,

$$A_r(a_{m+1}) + \left\{A_s\left(\prod_{i=1}^{m}(1+a_i)\right)\right\} > j_0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant r,\ s < k.$$

Замечание. Для $\theta_1, \theta_1 \in \mathfrak{R}_K$ сумма $\theta_1 + \theta_2 = \theta_0' + \theta_1\pi + \dots$, где θ_i' – представители Тейхмюллера элементов $\mathfrak{R}_{\overline{K}}$, и $\theta_i' \in \mathbb{Z}[\theta_1^{p^{-i}}, \theta_2^{p^{-i}}]$ по модулю π ([2] Chap. 1 (7.6)). Тогда для любого i $A_i(\theta_1 + \theta_2) > 0$. Но тогда

$$A_k(a_{m+1}\prod_{i=1}^{m}(1+a_i)) = A_k(a_{m+1}) < j_0$$

для любого $m+1 \in \{l_j\}_j$ и большего N, следовательно, и

$$a_{m+1}\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) \notin \mathfrak{U},$$

откуда вытекает противоречие с условием сходимости.

Обратно, для любой окрестности нуля $\mathfrak{U}_{u,\{i_l\}_{l<u}}$ для любого натурального $k \leqslant u$ существует $\min\limits_{j<k, i\in\mathbb{N}}\{A_j(a_i)\} = j_0$. Через c обозначим количество индексов i, для которых выполнено неравенство $A_j(a_i) < i_k$, хотя бы при одном $j < k$. Тогда начиная с некоторого N, для $m > N$ будет выполнено $A_j(a_m) + cj_0 > i_k$ для всех $j \leqslant k$. Откуда следует, что

$$A_k\left(\prod_{i=1}^{m+1}(1+a_i) - \prod_{i=1}^{m}(1+a_i)\right) > i_k,$$

для любого натурального k, т.е.

$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) - \prod_{i=1}^{m+1}(1+a_i) \in \mathfrak{U},$$

при достаточно больших m, следовательно, произведение сходится. $\square$

Теорема. *Для каждой тройки (i,j,θ) такой, что $(i,j)>0$, $\theta\in\mathfrak{R}_K$, рассмотрим элемент $\varepsilon_{ij\theta}\in V_K$, который представляется в виде*

$$\varepsilon_{ij\theta} \equiv 1+\theta\pi^i t^j \mod \mathfrak{p}((i,j)+). \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{R}_K$ – поднятие базиса F над $\mathbb{F}_p$. Тогда если для любого $i\in\mathbb{Z}_+$ и для любой окрестности единицы $\mathfrak{U}\subset K$ существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $\theta\in\mathfrak{B}$ и любого $j>N$ элемент $\varepsilon_{ij\theta}$ лежит в $\mathfrak{U}$, то любой элемент из группы главных единиц поля K можно представить в виде

$$v = \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}_v} \varepsilon_{ij\theta_{ij}},$$

где $\mathfrak{I}_v$ – допустимое множество.

Доказательство. Рассмотрим элемент

$$v \equiv 1+\theta\pi^i t^j \mod \mathfrak{p}((i,j)+),$$

тогда

$$v = \varepsilon_{ij\theta}(v(1-(\varepsilon_{ij\theta}-1)+(\varepsilon_{ij\theta}-1)^2-\dots)) = \varepsilon_{ij\theta}(1+\{i,j_1\}), \quad j<j_1.$$

Обозначим последнюю скобку за v_{ij_1}. Аналогично v_{ij_1} представим в виде $v_{ij_1}=\varepsilon_{ij_1\theta_1}v_{ij_2}$, и т.д.

Так как для любой окрестности нуля $\mathfrak{U}$ при достаточно больших m по условию $\varepsilon_{ij_m\theta}\in\mathfrak{U}$, следовательно и

$$(-(\varepsilon_{ij_m\theta}-1)+(\varepsilon_{ij_m\theta}-1)^2-\dots)\in\mathfrak{U} \text{ для любого } \theta,$$

тогда из Предложения получаем, что

$$\prod_{k\in I\subset\mathbb{N}}(1-(\varepsilon_{ij_k\theta_k}-1)+(\varepsilon_{ij_k\theta_k}-1)^2-\dots)$$

сходится, т.е. можно определить v_1 следующим равенством:

$$v = v_1\prod_{l>j}\varepsilon_{il\theta_l}.$$

При этом $i_1 = v_K(v_1 - 1) > i$. Аналогично представим v_1 в виде

$$v_1 = v_2 \prod_{l > j_{v_1}} \varepsilon_{i_1 l \theta'_l}, \quad \text{где} \quad j_{v_1} = v_{\overline{K}}(\overline{v}_1)$$

и т.д. Так можем сделать любое конечное число раз и при этом $v_n - 1$, начиная с некоторого n, попадет в любую наперед данную окрестность 0, следовательно, по Предложению, искомое произведение сходится к v. $\square$

§2. Условия единствености

Утверждение 1. *В предыдущих обозначениях, если* $\operatorname{char} K = p$ *и* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}_K$ *– поднятие базиса* F *над* $\mathbb{F}_p$*, то равносильны следующие два утверждения:*

1. *Для любого* $i \in \mathbb{Z}_+$ *и для любой окрестности единицы* $\mathfrak{U} \subset K$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $\theta \in \mathfrak{B}$ *и любого* $j > N$ *элемент* $\varepsilon_{ij\theta}$ *лежит в* $\mathfrak{U}$.

2. *Любой элемент из группы главных единиц поля* K *можно представить единственным образом в виде*

$$v = \prod_{\substack{i,j \\ \text{НОД}(p,i,j)=1}} \prod_{\theta \in \mathfrak{B}} \varepsilon_{ij\theta}^{\lambda_{ij\theta}}, \tag{2}$$

где $\lambda_{ij\theta} \in \mathbb{Z}_p$*, и для любой пары* i, j *множество* $\{(ij\theta) \mid v_p(\lambda_{ij\theta}) < n\}$ *– конечно для произвольного* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие 1, тогда существование представления v в виде

$$v = \prod_{i,j} \prod_{\theta \in \mathfrak{B}} \varepsilon_{ij\theta}^{\lambda_{ij\theta}}$$

следует из доказательства предыдущей теоремы, если использовать сравнение

$$1 + \sum_{\theta \in \mathfrak{B}} (a_\theta \theta) \pi^i t^j \equiv \prod_{\theta \in \mathfrak{B}} (1 + \theta \pi^i t^j)^{a_\theta} \mod \mathfrak{p}((i,j)+), \quad a_\theta \in \mathbb{Z}_p.$$

Для приведения к искомому виду все сомножители $\varepsilon_{ij\theta}$, для которых $\text{НОД}(i,j,p) = p$, исключаются аналогично ([2] Chap. 1 (6.2)).

Чтобы доказать единственность рассмотрим представление $1 \in K$ в виде (2), и пусть (i', j', θ') – такая тройка, что $(i', j', p) = 1$ и

$$(i_1, j_1) = p^{v_p(\lambda_{i'j'\theta'})} i,$$

$$p^{v_p(\lambda_{i'j'\theta'})} = \min\{p^{v_p(\lambda_{ij\theta})} i, p^{v_p(\lambda_{ij\theta})} j\}.$$

Тогда имеется следующее сравнение :

$$1 \equiv \prod_{\theta \in \mathfrak{B}} (1 + \theta \pi^{i_1} t^{j_1})^{\lambda'_\theta} \mod \mathfrak{p}((i_1, j_1)+),$$

где

$$\lambda'_\theta = \frac{\lambda_{i'j'\theta}}{p^{v_p(\lambda_{i'j'\theta})}} \quad \text{при} \quad \lambda_{i'j'\theta} \neq 0$$

и ноль в противном случае. Дважды перейдя к вычетам, получим

$$\sum_{\theta \in \mathfrak{B}} \overline{\overline{\lambda'_\theta}} \theta = 0,$$

тогда $\forall \theta$ $\overline{\overline{\lambda'_\theta}} = 0$, так как $\mathfrak{B}$ – поднятие базиса. Таким образом, $p \mid \lambda'_\theta$, откуда следует, что $\lambda_\theta = 0$.

Если первое условие не выполнено, то для какого-либо i существует окрестность единицы $\mathfrak{U}$ и последовательности $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такие что $\varepsilon_{i, j_n, \theta_n} \notin \mathfrak{U}$, где последовательность $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – строго возрастающая.

Рассмотрим

$$v_0 = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \theta_n t^{j_n} \pi^i,$$

где a_n выбирается таким, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik\theta_k} b_k \neq -a_n \theta_n,$$

где $\{\lambda_{ik\theta_k}\}_k$ – набор показателей из мультипликативного разложения

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \theta_k t^{j_k} \pi^i \equiv \prod_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ \text{НОД}(p,i,m)=1}} \prod_{\theta \in \mathfrak{B}} \varepsilon_{im\theta}^{\lambda_{im\theta}} \mod \pi^{i-1},$$

а b_k – коэффициенты при $t^{j_n}\pi^i$ в аддитивном разложении $\varepsilon_{ik\theta}$. Тогда если v_0 представим в искомом виде, то его разложение должно содержать $\prod\limits_n \varepsilon_{ij_n\theta_n}^{a_n}$, которое, согласно Предложению, не сходится, следовательно и само "разложение" v_0 тоже не сходится. $\square$

Утверждение 2. *В предыдущих обозначениях, если* $\operatorname{char} K = 0$, *то равносильны следующие два утверждения:*

1. *Для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ и для любой окрестности единицы $\mathfrak{U}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\theta \in \mathfrak{B}$ и $j > N$ элемент $\varepsilon_{ij\theta}$ лежит в $\mathfrak{U}$.*

2. *Любой элемент из группы главных единиц поля K можно представить единственным образом в виде*

$$v = \prod_{0<(i,j)} \prod_{\theta\in\mathfrak{B}} \varepsilon_{ij\theta}^{\lambda_{ij\theta}},$$

где $0 \leqslant \lambda_{ij\theta} < p$.

Доказательство. Аналогично предыдущему утверждению. $\square$

Утверждение 3. *В предыдущих обозначениях, если* $\operatorname{char} K = 0$ *и*

$$p - 1 \nmid \overline{e}, \tag{3}$$

а $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}_K$ – произвольное поднятие базиса F над $\mathbb{F}_p$, тогда равносильны следующие два утверждения:

1. *Для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ и для любой окрестности единицы $\mathfrak{U}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\theta \in \mathfrak{B}$ и $j > N$ элемент $\varepsilon_{ij\theta}$ лежит в $\mathfrak{U}$.*

2. *Любой элемент из группы главных единиц поля K можно представить единственным образом в виде*

$$v = \prod_{\substack{(i,j)<\frac{p}{p-1}\overline{e} \\ \text{НОД}(p,i,j)=1}} \prod_{\theta\in\mathfrak{B}} \varepsilon_{ij\theta}^{\lambda_{ij\theta}},$$

где $\lambda_{ij\theta} \in \mathbb{Z}_p$, и для любой пары i, j множество $\{\theta \mid v_p(\lambda_{ij\theta}) < n\}$ – конечно для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Следствие. *В предыдущих обозначениях, если* $\operatorname{char} K = 0$ *и* $p-1 \mid \overline{e}$, $\xi_p \notin K$, *то выберем* $a \in K$ *такое, что*

$$\overline{v}(a) = \frac{1}{p-1}\overline{e},$$

и обозначим через P_a *полином* $x^p + \lambda x$, *где* λ *– класс вычетов* $\frac{p}{a^{p-1}}$ *в* $\overline{K}$. *Пусть* $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{R}_K$ *такое, что классы вычетов в* $\overline{K}$ *образуют базис* $\overline{K}/P_a(\overline{K})$ *как векторного пространства над* $\mathbb{F}_p$. *Для* $\theta \in \mathfrak{B}_1$ *выберем*

$$\eta_\theta \equiv 1 + \theta a^p \mod \mathfrak{p}(\frac{p}{p-1}\overline{e}+).$$

Тогда если для любого натурального $s > k$ *выполнено*

$$-\frac{p \cdot (p^s - p^{k+1} + 1) \cdot \ldots \cdot (p^s - p^k)}{(p^k + 1) \cdot \ldots \cdot (p^{k+1})} \notin \mathfrak{R}_K, \tag{4}$$

где $k = \min\{v_p(e_1), v_p(e_2)\}$, *то равносильны следующие два утверждения:*

1. *Для любого* $i \in \mathbb{Z}_+$ *и для любой окрестности единицы* $\mathfrak{U}$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $\theta \in \mathfrak{B}$ *и* $j > N$ *элемент* $\varepsilon_{ij\theta}$ *лежит в* $\mathfrak{U}$.

2. *Любой элемент из группы главных единиц поля* K *можно представить единственным образом в виде*

$$v = \prod_{\substack{(i,j) < \frac{p}{p-1}\overline{e} \\ \text{НОД}(p,i,j)=1}} \prod_{\theta \in \mathfrak{B}} \varepsilon_{ij\theta}^{\lambda_{ij\theta}} \prod_{\theta \in \mathfrak{B}_1} \eta_\theta^{b_\theta}, \tag{5}$$

где $\lambda_{ij\theta}, b_\theta \in \mathbb{Z}_p$, *и для любой пары* i, j *множества*

$$\{\theta \mid v_p(\lambda_{ij\theta}) < n\}, \quad \{\theta \mid v_p(b_\theta) < n\}$$

– конечны для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство Утверждения 3 и Следствия. Существование разложения получаем аналогично Утв. 1 и ([2] Chap. 1 (6.4)).

Рассмотрим элемент $a \in \mathfrak{M}_K$ такой, что

$$1 + a = (1 + \theta\pi^i t^j)^{p^s} \quad \text{для некоторых} \quad i, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathfrak{R}_K.$$

Так как

$$\overline{v}(C_{p^s}^{p^k}) = (s-k)\overline{e},$$

то

$$1+a = 1+\sum_{k=1}^{p^s} C_{p^s}^k \theta^k (\pi^i t^j)^k = 1+\sum_{k=1}^{s} \{(s-k)e_1+ip^k, (s-k)e_2+jp^k\}. \quad (6)$$

Заметим, что функция $\phi(x) = p^x - xe$ имеет один экстремум – минимум. Разность значений нормирования двух последовательных слагаемых из суммы в последнем равенстве в (6) равна $\overline{e} - (p-1)p^k(i,j)$, следовательно,

$$\overline{v}(a) = (s-m)\overline{e} + (p-1)p^m(i,j),$$

где

$$m = \max\{k \mid \overline{e} > (p-1)p^k(i,j)\}. \quad (7)$$

Лемма. *В предыдущих обозначениях, если выполнено условие* (3) *или, при невыполнении* (3), *выполнено* (4), *то рассмотрим*

$$1+b = (1+\theta'(\pi')^{i'}(t')^{j'})^{p^{s'}}, \quad где \quad \theta' \in \mathfrak{R}_K.$$

Тогда если $a \equiv b \bmod \mathfrak{p}(\overline{v}(a)+)$, *то* $a = b$.

Доказательство. Пусть

$$\max\{n \mid \overline{e} > (p-1)p^n(i,j)\} = k > k' = \max\{n \mid \overline{e} > (p-1)p^n(i',j')\},$$

тогда из (7) получаем $(i',j') < p^{k-k'+1}(i,j)$, и так как нормирования a и b равны, то

$$(s-s'-k+k')\overline{e} = (i',j')p^{k'} - (i,j)p^k.$$

Но правая часть меньше, чем $(i,j)p^k(p-1) < \overline{e}$, тогда $s = s'$, $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$, тогда и $\theta = \theta'$, при $\overline{e} \neq (i,j)p^k(p-1)$, т.е. при выполнении (3), так как слагаемое с минимальным нормированием только одно. В случае если (3) не выполнено, то существует пара (i,j), при которой два слагаемых в (6) имеют минимальное нормирование. Но из (4) следует, что для любого $\theta \in \mathfrak{R}_K$ и для любого натурального $s > k$ выполнено

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad \frac{C_{p^s}^{p^k}}{p^{s-k}}\theta_0\theta^{p^k} \neq -\frac{C_{p^s}^{p^{k+1}}}{p^{s-k-1}}\theta^{p^{k+1}},$$

тогда, так как $\xi_p \notin K$, то аналогично доказательству ([2] Chap. 1 (5.7)) снова получаем, что $\theta = \theta'$. $\square$

Если существует разложение $1 \in K$, тогда из леммы получаем, что

$$1 \equiv 1 + \sum_{\theta \in \mathfrak{B}} \theta p^s \pi^{i_0} t^{j_0} \mod \mathfrak{p}(r+), \tag{8}$$

$$r = (v_p(\lambda_{i_0 j_0 \theta}) e_1 + i_0, v_p(\lambda_{i_0 j_0 \theta}) e_2 + j_0),$$

и r – минимальное, представимое в таком виде. То есть в (8) присутствуют только слагаемые, получающиеся от $\varepsilon_{i_0 j_0 \theta}$, а тогда аналогично Утв. 1 получим $\lambda_{i_0 j_0 \theta} = 0$.

Необходимость первого условия доказывается точно так же, как в Утв. 1. $\square$

Замечание. При невыполнении (3), (4) единственности нет, так как в этом случае существует тройка (i, j, θ_k) такая, что

$$\overline{v}\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \theta_k \pi^i t^j\right)^{a_k p^s} - 1 \right) > (i, j),$$

следовательно, можно представить единицу в виде (5).

Литература

1. И. Б.Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* — Труды Санкт-Петербургского математического общества **3** (1995), 4–46.
2. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions. A constructive approach.* — Transl. Math. Monographs, AMS, Providence, RI **121** (1993).

Bojtsov V. G. Multiplicative representation of principal units in two-dimentional complete fields.

This paper gives conditions on existence and uniqueness of representation of principal units in two-dimentional complete fields as a product of principal units from some fixed set.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: vadim79@mail.ru

Поступило 1 ноября 1999 г.