Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

В. В. Макеев

О МНОЖЕСТВАХ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕННЫХ ИНВАРИАНТОВ

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – точки пространства $\mathbb{R}^d$, O – выделенная точка в $\mathbb{R}^d$, p – некоторое натуральное число, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – набор положительных вещественных чисел. Если суммы $s_p(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |A_i M|^{2p}$ не зависит от выбора точки M на сфере с центром в точке O, то говорим, что система точек $\{A_1, \dots, A_n\}$ обладает инвариантом степени p с системой весов $\{\lambda, \dots, \lambda_n\}$ [1]. Имеет место

Теорема. *При произвольных натуральных d и N существует конечное подмножество точек $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}^d$, обладающее инвариантами всех степеней $p \leqslant N$ с некоторой общей системой положительных весов $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.*

Ниже мы считаем, что $d \geqslant 3$, так как случай $d = 1$ тривиален, случай $d = 2$ рассмотрен в [1].

Построение нужных систем точек основывается на следующей лемме.

Лемма. *Пусть $\{A_1, \dots, A_n\}$ – конечный набор точек в $\mathbb{R}^d$, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ – набор весов, а p – произвольное натуральное число. Существует такой набор поворотов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ пространства $\mathbb{R}^d$ вокруг наперед заданной точки $O \in \mathbb{R}^d$ и такой набор положительных чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ с $N \leqslant C^d_{2p+d} + 1$, что сумма $\sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^n \mu_j |M\alpha_i(A_j)|^{2p}$ не зависит от выбора точки M на сфере с центром в точке $O \in \mathbb{R}^d$.*

Рассмотрим на группе $SO(d)$ сохраняющих ориентацию поворотов вокруг точки $O \in \mathbb{R}^d$ вероятностную инвариантную меру Хаара. Сумма $s_p(M) = \sum_{j=1}^n \mu_j |MA_j|^{2p}$ есть многочлен степени $2p$ относительно декартовых координат $(x_1, \dots, x_d)$ точки M.

Работа частично поддержана грантом поддержки научных школ, грант No. 96-15-96-075.

Тогда $f(M) = \int_{SO(d)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j |M_\alpha(A_j)|^{2p} d\alpha$ есть многочлен степени $2p$ из $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. По построению значение $f(M)$ не меняется при повороте системы точек $\{A_1, \dots, A_n\}$ относительно точки O, а следовательно не зависит от выбора точки M на сфере с центром в точке O. Пространство многочленов из $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ степени $\leqslant 2p$ имеет размерность C_{d+2p}^{d}. Хорошо известно, что $\int_{SO(d)} f(\alpha) d\alpha$ от непрерывной вектор-функции по непрерывной вероятной мере принадлежит выпуклой оболочке множества ее значений и по принципу Каратеодори является выпуклой линейной комбинацией не более $C_{d+2p}^{d} + 1$ значений этой функции. То есть $f(M) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} |M\alpha_i(A_j)|^{2p}$ не зависит от выбора точки M на сфере с центром в точке O, где $N \leqslant C_{d+2p}^{d} + 1$, а $\lambda_i > 0$ для $1 \leqslant i \leqslant N$ и $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$. Лемма доказана.

Теперь сформулированная выше теорема легко доказывается индукцией по p.

Пусть система точек $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}^d$ обладает всеми степенными инвариантами степени $< p$ с системой весов $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. По лемме найдется такой конечный набор поворотов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ пространства $\mathbb{R}^d$ вокруг точки O и набор весов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, что $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \mu_j |M\alpha_i(A_j)|^{2p}$ не зависит от выбора точки M на сфере с центром в точке O, то есть система точек $\alpha_i(A_j)$ с системой весов $\lambda_j \mu_j$ обладает инвариантом степени p. При натуральном $q < p$ в выражении $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \mu_j |M\alpha_i(A_j)|^{2q}$ значение внутренней суммы по индукционному предположению не зависит от выбора поворота α_i и выбора точки M на сфере с центром в точке O. Поэтому и вся сумма не зависит от выбора точки M на указанной сфере. Теорема доказана.

Вопрос о построении конечных систем точек с заданным числом степенных инвариантов с положительными единичными весами остается открытым, а с весами ± 1 он решен в [2].

Литература

1. Ю. И. Бабенко, В. А. Залгаллер, *Степенные инварианты некоторых точечных множеств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999).
2. Ю. И. Бабенко, *Степенные инварианты объединения призм.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999).

Makeev V. V. On sets with prescribed number of power invariants.

Let $A_1, \dots, A_n$ be points in $\mathbb{R}^d$, $O \in \mathbb{R}^d$ the fixed point, p the positive integer and $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive numbers. If the sum $s_p(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |A_i M|^{2p}$ does not depend on the position of M on the sphere with center at point O, then the point system $\{A_1, \dots, A_n\}$ has an invariant of degree p with weight system $\{\lambda, \dots, \lambda_n\}$.

Theorem. *For given positive integers d and N there exists a point system $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}^d$ with invariants of degree $p \leqslant N$ with some common weight system $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.*

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 18 марта 1999 г.