Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

А. Е. Михайлов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. III

0. Данная работа является продолжением предыдущих работ автора [3, 4].

Введем следующие обозначения. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ вероятностное пространство, E – сепарабельное банахово пространство, E^* – его сопряженное, $||\cdot||$ – норма на E. B_E – единичный шар банахова пространства E. $\xi(t), t \in \mathbb{R}^d$ – стационарное гауссовское поле, принимающее значения в E, траектории которого непрерывны п.н.. H_γ – воспроизводящее ядро гауссовской меры γ на E, E^*_γ – пространство измеримых линейных функционалов, i – оператор, устанавливающий канонический линейный изоморфизм E^*_γ и H_γ. Норму гильбертова пространства на H_γ и евклидову норму на $\mathbb{R}^d$ будем обозначать – $|\cdot|$. Будем обозначать $n(G)$ наибольшую мощность подмножества $F \subset G$ такого, что $|t-s| \geqslant 1$, при $t \neq s$, t, $s \in F$. Для случайной величины Z, обозначим

$$\alpha(Z) = \inf\left\{u > 0 |\ \mathbb{E}\exp\left(\frac{Z^2}{u^2}\right) \leqslant 2\right\}.$$

Для случайных элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ со значениями в E, обозначим

$$\delta(\xi_1, \dots, \xi_n) = \inf\left\{\alpha(\sup_{i=1,\dots,n} ||\xi_i - \eta_i||)\right\},$$

где инфимум берется по всем семействам случайных элементов $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ таким, что η_i независимы и для каждого i распределение η_i совпадает с распределением ξ_i.

1. Пусть T – неограниченное подмножество $\mathbb{R}_+$, ψ – неубывающая функция на T, $\psi(t) > 0$ для всех $t \in T$, $\{G_u\}_{u\in T}$ – семейство подмножеств $\mathbb{R}^d$, обладающее следующими свойствами:

1. $G_u \subset G_v$ при $u < v$,

2. $\cup_{u\in T} G_u = G^*$ – неограниченное подмножество $\mathbb{R}^d$.

Определим случайное множество

$$\Xi_u = \overline{\left\{ \frac{\xi(t)}{\psi(u)} | t \in G_u \right\}}.$$

Нас будет интересовать поведение случайного множества Ξ_u при $u \to \infty$.

Легко показать, что случайное множество $\cup_{u\in T}\Xi_u$ относительно компактно почти наверное тогда и только тогда, когда почти наверное относительно компактно случайное множество

$$\left\{ \frac{\xi(t,\omega)}{\psi^*(t)} \right\}_{t\in T}, \quad \text{где} \quad \psi^*(t) = \inf\{\psi(u) | t \in G_u\}.$$

Если $\cup_{u\in T}\Xi_u$ относительно компактно п.н., то

$$\overline{\lim}_{u\to\infty}\Xi_u = \bigcap_{u\in T} \overline{\cup_{v\geqslant u}\Xi_v}$$

совпадает с множеством предельных точек последовательностей вида

$$\left\{ \frac{\xi(t_k,\omega)}{\psi^*(t_k)} \right\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \text{при} \quad |t_k| \to \infty.$$

Из результатов полученных в [4], следует, что

$$\overline{\lim}_{u\to\infty}\Xi_u(\omega) = B_{H_\gamma} \quad \text{п.н., если} \quad \limsup_{u\to\infty} \frac{2\ln n(G_u)}{\psi^2(u)} = 1$$

и

$$\lim_{|t|\to\infty} E < \xi(0), x^* > < \xi(t), x^* >= 0$$

для каждого $x^* \in E^*$.

В данной работе рассматривается вопрос, с какой скоростью элементы множества B_{H_γ} аппроксимируются элементами множеств Ξ_u.

Для этого введем несколько функций, характеризующих поведение стационарного гауссовского поля $\xi(t)$.

Для гауссовской меры γ, где γ – распределение случайного элемента $\xi(0)$, определим функцию $\Lambda(r) = -\ln\gamma(rB_E)$. Далее мы будем предполагать, что гауссовская мера γ обладает следующим свойством. Для каждого $c > 0$ существует предел

$\lim_{r\to 0}\frac{\Lambda(cr)}{\Lambda(r)} = l_\Lambda(c)$ и $l_\Lambda(c) \neq 1$ при $c \neq 1$. (Информацию об асимптотическом поведении функции $\gamma(rB_E)$ при $r \to 0$ можно найти в [2].)

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$a_\xi(\varepsilon) = \alpha\left(\sup_{|t|\leqslant\varepsilon} ||\xi(t) - \xi(0)||\right),$$

эта функция характеризует локальное поведение траекторий случайного процесса $\xi(t)$.

Для произвольного множества $G \subset \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $m_\xi(G,\varepsilon)$ – максимальное число n, для которого существует множество $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset G$ такое, что $\delta(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)) < \varepsilon$.

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть γ – гауссовская мера на E, $h \in H_\gamma$.*

Тогда для $\mu > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$1. \qquad \gamma(\mu B_E + h) \geqslant \exp\left(-\frac{|h|^2}{2}\right)\gamma(\mu B_E),$$

$$2. \qquad \gamma(\mu B_E + h) \leqslant \exp\left(-\frac{|h|^2}{2} + ||l||\mu + \frac{|h'|^2}{2}\right)\gamma(\mu B_E),$$

где l – непрерывный линейный функционал, $h' = h - il$.

Доказательство. Первое из неравенств хорошо известно. Докажем второе.

Известно (см., напр., [1], лемма 4.4.1), что для каждого линейного измеримого функционала f

$$\frac{1}{\gamma(\mu B_E)}\int\limits_{\mu B_E} \exp(f(x))d\gamma(x) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}||f||_{L^2_{(\gamma)}}\right).$$

Следовательно, для каждого $h \in H_\gamma$ мы получаем

$$\gamma(\mu B_E + h) = \exp\left(-\frac{|h|^2}{2}\right)\int\limits_{\mu B_E} \exp(i^*h(x))d\gamma(x) =$$

$$= \exp\left(-\frac{|h|^2}{2}\right)\int\limits_{\mu B_E} \exp(i^*h(x) - l(x) + l(x))d\gamma(x) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{|h|^2}{2}+||l||\mu\right)\int\limits_{\mu B_E}\exp(i^*h'(x))d\gamma(x)\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{|h|^2}{2}+||l||\mu+\frac{|h'|^2}{2}\right)\gamma(\mu B_E). \quad \blacksquare$$

Лемма 2. *Пусть*

$$h\in H_\gamma,\quad |h|<1,\quad T=\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}},\quad \limsup_{k\to\infty}\frac{2\ln n(G_{u_k})}{\psi^2(u_k)}=1$$

и ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\exp(-\alpha\psi^2(u_k))$$

сходится для каждого $\alpha>0$.

Тогда

1. *если для каждого* $\delta>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln a_\xi^{-1}(\frac{\delta}{b_\Lambda(x)})}{x^2}=0,\quad \textit{то}$$

$$\liminf_{k\to\infty} b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k},h)\geqslant l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2)\quad \textit{п.н.}\,.$$

2. *если* $\lim_{k\to\infty}\frac{2\ln n(G_{u_k})}{\psi^2(u_k)}=1$ *и существует* $C>0$ *такое, что*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln m_\xi(G_{u_k},\frac{C}{b_\Lambda(\psi(u_k))})}{\ln n(G_{u_k})}=1,\quad \textit{то}$$

$$\limsup_{k\to\infty} b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k},h)\leqslant l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2)\quad \textit{п.н.}\,.$$

Доказательство. 1. Нам достаточно доказать, что для каждого $c<l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2)$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k},h)<c\}.$$

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $c+\varepsilon<l^{-1}(1-|h|^2)$. Для каждого G_{u_k} выберем минимальную δ_k-сеть $\{t_{i,k}\}_{i=0}^{i_k}$, где

$$\delta_k=a_\xi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2b_\Lambda(\psi(u_k))}\right).$$

Тогда

$$\operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) \geqslant \operatorname{dist}(\{\frac{\xi(t_{i,k})}{\psi(u_k)}\}_{i=0}^{i_k}, h) -$$

$$- \max_{i=0,\dots,i_k} \sup_{|s|<\delta_k} \frac{||\xi(t_{i,k}+s) - \xi(t_{i,k})||}{\psi(u_k)}.$$

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$P\{b_\Lambda(\psi(u_k)) \operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) < c\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k)) \operatorname{dist}\left(\left\{\frac{\xi(t_{i,k})}{\psi(u_k)}\right\}_{i=0}^{i_k}, h\right) < c + \varepsilon\right\} +$$

$$+ P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k)) \max_{i=0,\dots,i_k} \sup_{|s|<\delta_k} \frac{||\xi(t_{i,k}+s) - \xi(t_{i,k})||}{\psi(u_k)} > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{i_k} P\left\{\left\|\frac{\xi(t_{i,k})}{\psi(u_k)} - h\right\| < \frac{c+\varepsilon}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{|s|<\delta_k} \frac{||\xi(t_{i,k}+s) - \xi(t_{i,k})||}{\psi(u_k)} > \frac{\varepsilon}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\}.$$

Поскольку $\xi(t)$ стационарное гауссовское поле, мы получаем

$$P\{b_\Lambda(\psi(u_k)) \operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) < c\} \leqslant$$

$$\leqslant (i_k+1)\left(P\left\{\left\|\frac{\xi(0)}{\psi(u_k)} - h\right\| < \frac{c+\varepsilon}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{|s|<\delta_k} ||\xi(s) - \xi(0)|| > \frac{\varepsilon\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\}\right).$$

По лемме 1

$$P\left\{\left\|\frac{\xi(0)}{\psi(u_k)} - b\right\| < \frac{c+\varepsilon}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{\psi^2(u_k)|h|^2}{2} + ||l||\frac{(c+\varepsilon)\psi^2(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))} +\right.$$

$$\left. + \frac{\psi^2(u_k)|h'|^2}{2}\right)\gamma\left(\frac{(c+\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}B_E\right),$$

с другой стороны,

$$P\left\{\sup_{|s|<\delta_k} ||\xi(s)-\xi(0)|| > \frac{\varepsilon\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{b_\Lambda^2(\psi(u_k))a_\xi^2(\delta_k)}\right).$$

Так как существует константа C_d такая, что $i_k+1 \leqslant C_d\frac{n(G_{u_k})}{\delta_k^d}$ для каждого $k\in\mathbb{N}$, то для каждого $k\in\mathbb{N}$

$$P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k},h)<c\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_d\exp\left(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{b_\Lambda^2(\psi(u_k))a_\xi^2(\delta_k)} + \ln n(G_{u_k}) - d\ln\delta_k\right) +$$

$$+2C_d\exp\left(-\frac{|h|^2\psi^2(u_k)}{2} + \frac{||l||(c+\varepsilon)\psi^2(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))} + \frac{|h'|^2\psi^2(u_k)}{2} -\right.$$

$$\left.-\Lambda\left(\frac{(c+\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right) + \ln n(G_{u_k}) - d\ln\delta_k\right).$$

Из определения функции $b_\Lambda(x)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2\Lambda(\frac{(c+\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))})}{\psi^2(u_k)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Lambda(\frac{(c+\varepsilon)x}{b_\Lambda(x)})}{\Lambda(\frac{x}{b_\Lambda(x)})}\frac{2\Lambda(\frac{x}{b_\Lambda(x)})}{x^2} = l_\Lambda(c+\varepsilon),$$

а по условиям леммы, мы имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\delta_k}{\psi^2(u_k)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_\xi^{-1}(\frac{\varepsilon}{2b_\Lambda(x)})}{x^2} = 0 \quad \text{и}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{2\ln n(G_{u_k})}{\psi^2(u_k)} = 1.$$

Поэтому существует $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что для каждого

$$\sigma < \max(1, |h|^2 - |h'|^2 + l_\Lambda(c+\varepsilon) - 1)$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} P\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) < c\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} 2C_d \exp\Big(-\frac{7-\sigma}{2}\psi^2(u_k)\Big) +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{\infty} 2C_d \exp\Big(-\frac{\psi^2(u_k)}{2}(|h|^2 - |h'|^2 + l_\Lambda(c+\varepsilon) - 1 - \sigma)\Big).$$

По условию леммы, последние два ряда сходятся. Следовательно, сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) < c\}.$$

2. Аналогично доказательству пункта 1 данной леммы, нам достаточно показать, что для любого $c > l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2)$ сходится ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\left\{ b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) > c \right\}.$$

Пусть

$$m_k = m_\xi\Big(G_{u_k}, \frac{C}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\Big).$$

Тогда можно выбрать $\{t_{i,k}\}_{i=1}^{m_k} \subset G_{u_k}$ так, что

$$\delta(t_{1,k}, \dots, t_{m_k,k}) < \frac{C}{b_\Lambda(\psi(u_k))}.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $c - \varepsilon > l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2)$. Поскольку

$$\operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) \geqslant \operatorname{dist}\left(\left\{\frac{\xi(ti,k)}{\psi(u_k)}\right\}_{i=1}^{m_k}, h\right),$$

мы получаем

$$P\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k}, h) > c\} \leqslant$$

$$\leq P\Big\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Big\{\frac{\xi(t_{i,k})}{\psi(u_k)}\}_{i=1}^{m_k}, h) > c\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}\left(\left\{\frac{\xi'(t_{i,k})}{\psi(u_k)}\right\}_{i=1}^{m_k}, h\right) > c - \varepsilon\right\} +$$

$$+P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k))\max_{i=1,\dots,i=m_k}\frac{||\xi(t_{i,k})-\xi'(t_{i,k})||}{\psi(u_k)}>\varepsilon\right\}.$$

Поскольку $\xi'(t_{i,k})$ независимы и одинаково распределены, мы получаем

$$P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k))\,\mathrm{dist}\left(\left\{\frac{\xi'(t_{i,k})}{\psi(u_k)}\right\}_{i=1}^{m_k},h\right)>c-\varepsilon\right\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{m_k}P\left\{\left\|\frac{\xi'(t_{i,k})}{\psi(u_k)}-h\right\|>\frac{c-\varepsilon}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\}=$$

$$=\left(P\left\{||\xi(0)-\psi(u_k)h||>\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\}\right)^{m_k}.$$

Из леммы 1 следует следующее неравенство

$$P\left\{||\xi(0)-\psi(u_k)h||>\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\}\leqslant$$

$$\le 1-\exp\left(-\frac{\psi^2(u_k)|h|^2}{2}\right)\gamma\left(\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}B_E\right),$$

и по построению множества $\{t_{i,k}\}_{i=0}^{m_k}$ имеет место

$$P\left\{b_\Lambda(\psi(u_k))\max_{i=1,\dots,m_k}\frac{||\xi(t_{i,k})-\xi'(t_{i,k})||}{\psi(u_k)}>\varepsilon\right\}=$$

$$=P\left\{\max_{i=1,\dots,m_k}||\xi(t_{i,k})-\xi'(t_{i,k})||>\frac{\varepsilon\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{b_\Lambda^2(\psi(u_k)\delta^2(t_{1,k},\dots,t_{m_k,k})}\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{C^2}\right).$$

Следовательно, мы получаем неравенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}P\{b_\Lambda(\psi(u_k))\,\mathrm{dist}(\Xi_{u_k},h)>c\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}2\exp(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{C^2})+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-\exp(-\frac{\psi^2(u_k)|h|^2}{2})\gamma(\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}B_E)\right)^{m_k}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=0}^{\infty}\exp(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{C^2})+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\exp\Big(-m_k\exp\Big(-\frac{\psi^2(u_k)|h|^2}{2}-\Lambda(\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\Big)\Big).$$

По условию леммы, ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\exp\big(-\frac{\varepsilon^2\psi^2(u_k)}{C^2}\big)$ сходится. С другой стороны,

$$\sigma=\lim_{k\to\infty}\Big(-|h|^2+\frac{2\ln m_k}{\psi^2(u_k)}-2\frac{\Lambda(\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))})}{\psi^2(u_k)}\Big)=$$

$$=-|h|^2+1-l_\Lambda(c-\varepsilon)>0.$$

Следовательно, существует k_0 такое, что

$$\sum_{i=k_0}^{\infty}\exp\Big(-m_k\exp\Big(-\frac{\psi^2(u_k)|h|^2}{2}\Big)-\Lambda(\frac{(c-\varepsilon)\psi(u_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))}\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leq\sum_{i=k_0}^{\infty}\exp\Big(-\exp\Big(\frac{\psi^2(u_k)\sigma}{4}\Big)\Big)\leqslant\sum_{i=k_0}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\psi^2(u_k)\sigma}{4}\Big).$$

По условию леммы, последний ряд сходится. Следовательно, сходится и ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}P\{b_\Lambda(\psi(u_k))\operatorname{dist}(\Xi_{u_k},h)>c\}.\quad\blacksquare$$

Теорема. *Пусть*

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{2\ln n(G_u)}{\psi^2(u)}=1.$$

Тогда для каждого $h\in H_\gamma$, $|h|<1$*:*
если для каждого $\delta>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln a_\xi^{-1}(\frac{\delta}{b_\Lambda(x)})}{x^2}=0,\ \text{то}$$

$$\liminf_{u\to\infty}b_\Lambda(\psi(u))\operatorname{dist}(\Xi_u,h)\geqslant l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2)\quad \text{п.н.}\quad;$$

если кроме того существует $C>0$ *такое, что*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\ln m_\xi(G_u,\frac{C}{b_\Lambda(\psi(u))})}{\ln n(G_u)}=1,\quad \text{то}$$

$$\liminf_{u\to\infty} b_\Lambda(\psi(u))\,\mathrm{dist}(\Xi_u, h) = l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2) \quad \text{п.н.}.$$

Доказательство. Пусть $q > 1$ и $B_n = T \bigcap \psi^{-1}(]\ln^q(n-1), \ln^q n])$, при $n = 2, 3, \ldots$. Обозначим

$$n_0 = \min\{n \mid B_n \neq \varnothing\},\ n_k = \min\{n > n_{k-1} \mid B_n \neq \varnothing\},\ u_k = \sup B_{n_k}.$$

Определим последовательность множеств $\{G'_{u_k}\}_{k=0}^\infty$ — $G'_{u_k} = \bigcup_{u\in B_{n_k}} G_u$ и пусть

$$\psi'(u_k) = \sup_{u\in B_{n_k}} \psi(u),\ \Xi'_{u_k} = \overline{\left\{\frac{\xi(t)}{\psi'(u_k)} \mid t \in G_{u_k}\right\}}.$$

Существует константа $c > 0$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{u\in B_{n_k}} n(G_u) \leqslant n(G'_{u_k}) \leqslant c \sup_{u\in B_{n_k}} n(G_u),$$

следовательно,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{2\ln n(G_{u_k})}{\psi'^2(u_k)} = \limsup_{u\to\infty} \frac{2\ln n(G_u)}{\psi^2(u)} = 1.$$

Тогда по лемме 2 мы получаем

$$\liminf_{k\to\infty} b_\Lambda(\psi'(u_k))\,\mathrm{dist}(\Xi'_{u_k}, h) \geqslant l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2) \quad \text{п.н.}.$$

С другой стороны, для $u \in B_{n_k}$ имеет место неравенство

$$b_\Lambda(\psi(u))\,\mathrm{dist}(\Xi_u, h) \geqslant \frac{b_\Lambda(\psi(u))\psi'(u_k)}{\psi(u)}\,\mathrm{dist}(\Xi'_{u_k}, h) -$$

$$-\frac{b_\Lambda(\psi(u))}{\psi(u)}(\psi'(u_k) - \psi(u))||h||,$$

$$\sup_{u\in B_{n_k}} \frac{b_\Lambda(\psi(u))}{\psi'(u)}(\psi(u_k) - \psi(u)) \leqslant$$

$$\leq \frac{b_\Lambda(\ln^q n_k)}{\ln^q(n_k-1)}(\ln^q n_k - \ln^q(n_k-1)).$$

Поскольку, как уже отмечалось выше, $\lim_{x\to\infty} \frac{b_\Lambda(x)}{\exp(cx^\beta)} = 0$ для всех c, $\beta > 0$, то легко заметить, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_\Lambda(\ln^q n_k)}{\ln^q(n_k-1)}(\ln^q n_k - \ln^q(n_k-1)) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_\Lambda(x^q)q}{x\exp x} = 0.$$

Очевидно

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi'(u_k)}{\ln^q(n_k-1)} = 1$$

и значит

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_\Lambda(\ln^q n_k)}{b_\Lambda(\psi(u_k))} = 1.$$

Следовательно, мы получаем

$$\liminf_{u\to\infty} b_\Lambda(\psi(u))\,\mathrm{dist}(\Xi_u, h) \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{k\to\infty} b_\Lambda(\psi'(u_k))\,\mathrm{dist}(\Xi'_{u_k}, h) \geqslant l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2) \quad \text{п.н.}.$$

Пусть теперь, кроме того, для некоторого $C > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\ln m_\xi(G_u, \frac{C}{b_\Lambda(\psi(u))})}{\ln n(G_u)} = 1.$$

Выберем последовательность $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ так, чтобы

$$\lim_{i\to\infty} \frac{2\ln n(G_{u_i})}{\psi^2(u_i)} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\alpha\psi^2(u_i)) < \infty$$

для каждого $\alpha > 0$.

Тогда по лемме 2, пункт 2, мы получаем

$$\limsup_{i\to\infty} b_\Lambda(\psi(u_i))\,\mathrm{dist}(\Xi_{u_i}, h) \leqslant l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2) \quad \text{п.н.}.$$

Следовательно,

$$\liminf_{u\to\infty} b_\Lambda(\psi(u))\,\mathrm{dist}(\Xi_u, h) = l_\Lambda^{-1}(1-|h|^2) \quad \text{п.н.}. \qquad \blacksquare$$

Замечание Пусть $F(t) = \overline{\{<\xi(t), x^*>|x^* \in E^*\}}$ – подмножество $L^2(\gamma)$. Обозначим

$$\cos(F(t), F(s)) = \sup_{\substack{\eta\in F(t)\\ \zeta\in F(s)}} \frac{(\eta,\zeta)}{|\eta|\,|\zeta|}.$$

Можно показать, что существует константа β, зависящая от меры γ, такая, что

$$\delta(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \leq \beta\varepsilon \left(\frac{n\ln n}{1-\varepsilon(n-1)}\right)^{1/2},$$

где $\varepsilon = \max_{i\neq j} \cos(F(t_i), F(t_j))$. Данное неравенство позволяет использовать $\cos(F(t), F(t))$ для оценки $m_\xi(G, \varepsilon)$.

Литература

1. В. И. Богачев, *Гауссовские меры*. Наука, Физматлит, М. (1997).
2. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*. TViMS, Киев (1995).
3. А. Е. Михайлов, *Асимптотическое поведение траекторий стационарных гауссовских полей со значениями в банаховом пространстве*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **216** (1994), 110–116..
4. А. Е. Михайлов, *Асимптотическое поведение траекторий стационарных гауссовских полей со значениями в банаховом пространстве. II*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 220–228.

Mikhailov A. E. Asymptotic behavior of stationary Banach valued Gaussian fields.

The speed of approximation of elements of the unit ball of the reproduction kernel space of the Gaussian measure, corresponding to a stationary Banach valued random field on a Euclidean space, by corresponding elements constructed for bounded subsets of this parametric set is investigated. The paper is a continuation of the author's investigations published in previous issues of ZNS POMI.

СПбГАСУ

Поступило 16 февраля 1999 г.