Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

А. Н. Баушев

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Пусть $(B, \|\,\|)$ – сепарабельное банахово пространство, B' – пространство всех линейных непрерывных функционалов на B. Говорят, что пространство B обладает H – *свойством*, если для любой последовательности $(x_n) \subset B$ и для любого $x \in B$ из условий:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, $(\forall f \in B')$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

следует

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Хорошо известными примерами пространств, обладаюших H – свойством, являются равномерно выпуклые пространства, в частности, пространства L_p, l_p $(1 < p < \infty)$. Отметим также, что в каждом сепарабельном банаховом пространстве существует эквивалентная локально равномерно выпуклая норма, относительно которой пространство обладает H – свойством [7].

Пусть теперь X_n, $n \geqslant 1$, X – B-значные случайные величины, определённые на некотором полном вероятностном пространстве. Очевидно, что если B обладает H – свойством, то из соотношений:

(aa) $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$ (п.н.) $(\forall f \in B')$,

(bb) $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n\| = \|X\|$ (п.н.),

следует

(cc) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ (п.н).

Однако, естественный вопрос о том, останется ли эта импликация справедливой если в соотношениях (aa), (bb) и (cc) сходимость почти наверное заменить на слабую сходимость, не является тривиальным. Проблему можно переформулировать следующим образом. Пусть μ_n, $n \geqslant 1$, μ – борелевские вероятностные меры на B, $\hat{\mu}_n$, $\hat{\mu}$ – их характеристические функционалы, $F_n(t) := \mu_n(\|x\| < t)$, $F(t) := \mu(\|x\| < t)$ – функции распределения нормы относительно мер μ_n, μ соответственно. Предположим, что пространство B обладает H-свойством. Спрашивается, можно ли утверждать, что из соотношений

(aaa) $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\mu}(f) = \hat{\mu}(f)$, $(\forall f \in B')$

(bbb) $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$,

следует,что

(ccc) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, $n \to \infty$?

Основным результатом настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть B – сепарабельное строго нормированное банахово пространство с непрерывным модулем выпуклости. Тогда* (ccc) *следует из* (aaa) *и* (bbb).

Для формулировки остальных результатов введём следующие обозначения [2]. Пусть $\overline{\mu} = (\mu_n)$ – последовательность борелевских вероятностных мер на B, (X_n) – последовательность B-значных случайных величин, определённых на некотором полном вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ таких, что $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$. Обозначим через $\mathcal{M}(\overline{\mu})$ класс всех непрерывных строго монотонных функций $\varphi : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ таких, что последовательность $\varphi(\|X_n\|)$ равномерно интегрируема относительно меры $\mathcal{P}$. Для любой последовательности $\overline{\mu}$ имеют место включения $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{M}(\overline{\mu}) \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}_b$ обозначает класс всех строго монотонных непрерывных ограниченных функций $\varphi : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$, а $\mathcal{M}$ обозначает класс всех строго монотонных непрерывных функций $\varphi : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$.

Теорема 2. *Пусть B удовлетворяет условиям теоремы* 1, *μ, μ_n, $n \in \mathcal{N}$ – борелевские вероятностные меры на B, удовлетворяющие* (aaa). *Для выполнения соотношения* (ccc) *необходимо, чтобы любой функции $\varphi \in \mathcal{M}(\overline{\mu})$ и достаточно, чтобы для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{M}(\overline{\mu})$ выполнялось соотношение:*

(d) $\int \varphi(\|x\|)\mu_n(dx) \longrightarrow \int \varphi(\|x\|)\mu(dx),\ n \to \infty.$

В качестве следствия теоремы 2 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 2, $\mu_n, n \in \mathcal{N}, \mu$ – гауссовские меры, удовлетворяющие* (aaa). *Для слабой сходимости последовательности (μ_n) к μ, необходимо, чтобы для любого $\alpha > 0$ и достаточно, чтобы для некоторого $\alpha > 0$ выполнялось соотношение:*

(dd) $\int \|x\|^\alpha \mu_n(dx) \longrightarrow \int \|x\|^\alpha \mu(dx),\ n \to \infty.$

Аналоги сформулированных выше теорем для пространств $L_p, 1 < p < \infty$ и некоторых пространств Орлича были получены в [2, 3]. Основным моментом в доказательстве этих теорем является получение подходящих условий относительной компактности семейства вероятностных мер.

Отметим, что наличие H – свойства у пространства B необходимо для справедливости сформулированных теорем. В частности, теоремы 1–3 не имеют места для таких пространств как $L_1, C([0,1]), \mathbf{c}_0$. В то же время ограничения на B, фигурирующие в условиях этих теорем, не являются необходимыми для наличия H - свойства у пространства B. Например, если $B = l_1$ то, как хорошо известно, (c) вытекает из условия (a). В этом случае, как показано в [2], теоремы 1–3 справедливы. Заметим, что условия (aaa), (bbb), (d) и (dd) необходимы для выполнения условия (ccc) в соответствующих теоремах.

Общие замечания

Пространство B называется *локально равномерно выпуклым*, если из условий $\|x\| = \|x_n\| = 1, \lim\limits_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0; B$ называется *равномерно выпуклым*, если из условий $\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Для $R > 0$ рассмотрим функцию

$$\delta_R(\epsilon) = \inf\{R - \frac{\|x+y\|}{2}; \|x\| = \|y\| = R, \|x - y\| = \epsilon\}, \quad 0 \leqslant \epsilon \leqslant 2R.$$

Заметим, что $\delta_R(\epsilon) = R\delta_1(\frac{\epsilon}{R})$. Функция $\delta(\epsilon) \equiv \delta_1(\epsilon)$ называется *модулем выпуклости* пространства B. Модуль выпуклости не убывает и непрерывен на любом отрезке $[0, 2-\rho], 0 < \rho < 2$. Однако, точка $\epsilon = 2$ может оказаться точкой разрыва модуля выпуклости. В частности, можно построить пример локально равномерно выпуклого пространства, для которого $\delta(\epsilon) = 0$, если $0 \leqslant \epsilon < 2$, $\delta(2) = 1$ [9]. В то же время модуль выпуклости равномерно выпуклого пространства, как нетрудно видеть, непрерывен.

Пусть (U_m) – последовательность вполне непрерывных операторов на пространстве B, удовлетворяющая условию

$$\lim_{m\to\infty} \|x - U_m(x)\| = 0 \qquad (\forall x \in B).$$

Нам понадобится следующий хорошо известный критерий относительной компактности ограниченного подмножества пространства B [5].

Лемма 1. *Пусть K – ограниченное подмножество пространства B. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *K относительно компактно.*

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in K} \|x - U_m(x)\| = 0.$

Доказательство теорем 2–3 для случая $B = L_p, 1 < p < \infty$ в работе [1] было основано на наблюдении, что для некоторой специальным образом построенной последовательности операторов (U_m) условие (ii) леммы 1 может быть заменено на следующее:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in K} (\|x\| - \|U_m(x)\|) = 0.$$

Основным моментом в настоящей работе является построение последовательности (U_m) с аналогичным свойством для произвольного сепарабельного строго нормированного пространства с непрерывным модулем выпуклости. Отметим, что, в отличие от случая $B = L_p$, операторы U_m, которые будут построены ниже, являются нелинейными.

В дальнейшем используются следующие обозначения. $B(a; R)$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке a; $d(a, b) := \|a - b\|$ – расстояние между элементами a и b; $d(a, A) := \inf\{d(a, a'); a' \in A\}$ – расстояние от элемента a до множества A; $A^\epsilon := \{a' \in B; \exists a \in A, d(a', a) \leqslant \epsilon\}$ – замкнутая ϵ – окрестность множества A; $h(A_1, A_2) := \inf\{\epsilon > 0; A_1 \subset A_2^\epsilon, A_2 \subset A_1^\epsilon\}$ – хаусдорфово расстояние между непустыми ограниченными множествами A_1 и A_2.

Заметим,что для выпуклых тел A_1, A_2 (т.е. выпуклых замкнутых ограниченных множеств с непустой внутренностью) имеет место равенство $h(A_1, A_2) = h(\partial A_1, \partial A_2)$, где ∂A обозначает границу тела A.

Вспомогательные леммы

В этом пункте устанавливается несколько лемм, которые служат для доказательства непрерывности операторов U_m, построенных в следующем пункте.

Пусть $\{A_n; n = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность непустых подмножеств пространства B. Введём обозначение

$$\mathrm{Lim}\{A_n\} := \{a \in B; \exists\{a_{n_j}\}, a_{n_j} \in A_{n_j}, \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a\}.$$

Отметим некоторые очевидные свойства множества $\mathrm{Lim}\{A_n\}$.

1) $\mathrm{Lim}\{A_n\}$ – замкнутое подмножество B;
2) для любой подпоследовательности $\{n_j; j = 1, 2, ...\}$ $\mathrm{Lim}\{A_{n_j}\} \subset \mathrm{Lim}\{A_n\}$;
3) если $A_n \subset A'_n$ для всех достаточно больших n, то $\mathrm{Lim}\{A_n\} \subset \mathrm{Lim}\{A'_n\}$;
4) если для некоторого $N \in \mathcal{N}$ множество $\bigcup\limits_{n \geqslant N} A_n$ относительно компактно, то $\mathrm{Lim}\{A_n\}$ – компактное подмножество B.

Лемма 2. *Пусть* $\{A_n; n = 1, 2, ...\}$ *– последовательность непустых подмножеств пространства* B, A *– непустое замкнутое подмножество* B. *Из условия* (i) $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ *следует* (ii) $\mathrm{Lim}\{A_n\} = A$.

Доказательство. Из условия (i) следует, что $A' \equiv \mathrm{Lim}\{A_n\} \neq \emptyset$.

1) Покажем, что $A' \subset A$. Пусть $a \in A', a_{n_j} \in A_{n_j}, j = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = a$. Допустим, что $a \notin A$. Так как A замкнуто, то $\epsilon := d(a, A) > 0$. В то же время $\exists j_\epsilon$ такое, что $d(a_{n_j}, a) < \frac{\epsilon}{2}$ при $j \geqslant \supset_\epsilon$. Следовательно, $A_{n_j} \not\subset A^{\frac{\epsilon}{2}}$, что противоречит условию (i).

2) Покажем, что $A \subset A'$. Допустим, что $\exists a \in A, a \notin A'$. Так как A' замкнуто, то $\epsilon := d(a, A) > 0$. В то же время из условия (i) следует, что для любого $j = 1, 2, \ldots$ найдётся множество A_{n_j} такое, что $B(a; \frac{\epsilon}{j}) \cap A_{n_j} \neq \emptyset$, т.е. $\exists a_{n_j} \in B(a; \frac{\epsilon}{j}) \cap A_{n_j}$. Очевидно, $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = a$, следовательно, $a \in \mathrm{Lim}\{A_{n_j}\} \subset A'$, что противоречит предположению $\epsilon > 0$.

Лемма 3. *Пусть A – компактное подмножество B, $\{A_n\}$ – последовательность непустых подмножеств B, удовлетворяющая условию:*

$$\bigcup_{n\geqslant N} A_n \text{ относительно компактно для некоторого } N \in \mathcal{N}.$$

Следующие утверждения эквивалентны

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$.

(ii) $\operatorname{Lim}\{A_{n_j}\} = A$ *для любой подпоследовательности* $\{n_j\}$ *последовательности натуральных чисел.*

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из леммы 2. Покажем, что (ii) $\Rightarrow$ (i). Допустим, что (i) не выполняется. Возможны два случая.

1) $\exists\epsilon > 0, \exists n_j \to \infty, \exists a_{n_j} \in A_{n_j}$ такие, что $d(a_{n_j}, A) \geqslant \epsilon$. В силу условия леммы из последовательности a_{n_j} можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу $a \in B$, а из условия (ii) следует, что $a \in A$. С другой стороны, $d(a, A) \geqslant \epsilon$ – противоречие.

2) $\exists\epsilon > 0, \exists n_j \to \infty, \exists a_{n_j} \in A$ такие, что $d(a_{n_j}, A_{n_j}) \geqslant \epsilon$. Так как множество A компактно, то из последовательности $\{a_{n_j}\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу $a \in A$. С другой стороны, если $b \in \operatorname{Lim}\{A_{n_j}\}$, то из предположения этого пункта следует, что $d(a, b) \geqslant \epsilon$ и поэтому из условия (ii) получаем, что $d(a, A) \geqslant \epsilon$ – противоречие.

Лемма 4. *Пусть L – конечномерное подпространство B, h_L – индуцированная на нём метрика Хаусдорфа; A, A_n – выпуклые тела в B такие, что* $\operatorname{Int}(A) \cap L \neq \emptyset$ *и* $A_n \cap \ddot{Л} \neq \emptyset$ *для достаточно больших $n \in \mathcal{N}$. Из условия* (i) $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ *следует* (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} h_L(A_n \cap L, A \cap L) = 0$.

Доказательство. Обозначим $K_n = A_n \cap L, K = A \cap L$. Из условий леммы следует, что K – компактное выпуклое тело в L и, кроме того, найдётся $N \in \mathcal{N}$ такое, что K_n – компактное выпуклое тело в L при $n \geqslant N$ и множество $\bigcup\limits_{n\geqslant N} K_n$ относительно компактно. Согласно лемме 3 достаточно проверить, что для любой подпоследовательности натуральных чисел $\{n_j\}$ $\operatorname{Lim}\{K_{n_j}\} \equiv K' = K$.

Включение $K' \subset K$ вытекает из леммы 2 и очевидного включения $\mathrm{Lim}\{A_{n_j} \cap L\} \subset \mathrm{Lim}\{A_{n_j}\} \cap L$. Покажем, что $K \subset K'$. Поскольку K, K' – замкнутые множества, то достаточно проверить, что $\mathrm{Int}(A) \cap L \subset K'$. Пусть $a \in \mathrm{Int}(A) \cap L, \epsilon := d(a, \partial A) > 0$. Поскольку расстояние Хаусдорфа между выпуклыми телами равно расстоянию Хаусдорфа между их границами, то из условия (i) вытекает, что для достаточно больших значений n $a \notin (\partial A_n)^{\frac{\epsilon}{2}}$ и в то же время $a \in (A_n)^{\frac{\epsilon}{2}}$, т.е. a – внутренняя точка множества A_n, в частности, a – внутренняя для множеств A_{n_j} при достаточно большом значении индекса j. Так как $a \in L$, то $a \in K_{n_j}$ для этих значений j, следовательно, $a \in K'$.

Замечание 1. В [6, с. 146, теорема 14.3] имеется доказательство леммы 4 для случая, когда B – конечномерное евклидово пространство, которое в принципе может быть использовано для получения оценок скорости сходимости в лемме 4. Однако, оно существенно опирается как на на конечномерность B так и на евклидовость нормы.

Пусть B – строго нормированное банахово пространство, L – конечномерное подпространство пространства B, x^L – элемент наилучшего приближения x в L. Если $x^L \neq 0$, то обозначим через x^* точку пересечения луча $\{t\, x^L;\, t > 0\}$ с границей шара $B(x; \|x\|)$. Рассмотрим оператор $W_L : B \to L$,

$$W_L(x) = \begin{cases} 0, & x^L = 0 \\ x^*, & x^L \neq 0. \end{cases}$$

Лемма 5. *Оператор W_L вполне непрерывен.*

Доказательство. Так как $\dim L < \infty$, то достаточно доказать непрерывность оператора W_L. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и непрерывности оператора $x \to x^L$ вытекают соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} h(B(x_n; \|x_n\|), B(x; \|x\|)) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^L = x^L$. Представим $W_L(x_n)$ и $W_L(x)$ в виде $W_L(x_n) = t_n\, x_n^L, W_L(x) = t\, x^L$. Последовательность $\{t_n\}$, очевидно, ограниченна, следовательно, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_j}\}$, $\lim\limits_{j\to\infty} t_{n_j} = s$. Для доказательства леммы достаточно убедиться, что $s = t$ независимо от выбора подпоследовательности $\{t_{n_j}\}$. Если $x^L = 0$, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} W_L(x_n) = 0$ вытекает из ограниченности последовательности $\{t_n\}$. Пусть $x^L \neq 0$. Согласно лемме 4 $\lim\limits_{n\to\infty} h_L(B(x_n;\|x_n\|)\cap L,\, B(x;\|x\|)\cap L) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} h_L(\partial_L(B(x_n;\|x_n\|)\cap L),\, \partial_L(B(x;\|x\|)\cap L)) = 0$. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} t\,x^L_{n_j} = s\,x^L$ и $t\,x^L_{n_j} \in \partial_L(B(x_n;\|x_n\|)\cap L)$, то $s\,x^L \in \partial_L(B(x;\|x\|)\cap L)$ согласно лемме 2, следовательно, $s = t$.

Относительная компактность множества и семейства вероятностных мер. В этом пункте B – сепарабельное строго нормированное пространство с непрерывным модулем выпуклости.

Пусть (L_m) – последовательность линейных подпространств пространства B, удовлетворяющая следующим условиям.

1) $L_m \subset L_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots,$
2) $\dim L_m = m, \quad m = 1, 2, \dots,$
3) $(\bigcup\limits_{m\geqslant 1} L_m)^- = B$.

Рассмотрим оператор $V_m : B \to B$, $V_m(x) = \frac{W_m(x)}{2}$.

Лемма 6. *Последовательность операторов (V_m) обладает следующими свойствами.*

1) $V_m(x) \in L_m$ *и если* $x \in L_m$, *то* $V_m(x) = x$;
2) V_m – *вполне непрерывный оператор;*
3) $\|V_m(x)\| \leqslant \|x\| \quad$ *для любого* $x \in B$;
4) $\lim\limits_{m\to\infty} \|V_m(x)\| = \|x\|$, $(\forall x \in B)$;
5) $\|x - V_m(x)\| \leqslant \|x\|\,(1 - \delta(\frac{2\|V_m(x)\|}{\|x\|}))$, $(x \in B,\ x \neq 0)$;
6) $\lim\limits_{m\to\infty} \|x - V_m(x)\| = 0$, $(\forall x \in B)$.

Доказательство. Свойства 1) и 3) очевидны, а 2) следует из леммы 5. Последовательность $(\|W_m(x)\|)$ ограниченна и для любой подпоследовательности $\{m_j\}$ такой, что $(\|W_{m_j}(x)\|)$ сходится, как нетрудно видеть, $\lim\limits_{j\to\infty} \|W_{m_j}(x)\| = 2\,\|x\|$. Отсюда следует 4).

5) Если $V_m(x) = 0$, то неравенство 5) вытекает из равенства $\delta(0) = 0$. Пусть $V_m(x) \neq 0$. Из рассмотрения пересечения шара $B(x;\|x\|)$ с двумерной плоскостью, натянутой на векторы x, $V_m(x)$, и определения функции δ_R имеем

$$\|x - V_m(x)\| \leqslant \|x\| - \delta_{\|x\|}(\|W_m(x)\|) = \|x\|\,(1 - \delta(\frac{2\|V_m(x)\|}{\|x\|})).$$

6) Если $x = 0$, то 6) следует из 1), а если $x \neq 0$, то из 5), 4) и того факта, что для строго нормированного пространства $\delta(2) = 1$.

Лемма 7. *Пусть K – ограниченное подмножество B. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *K – относительно компактно.*

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in K}(\|x\| - \|V_m(x)\|) = 0$.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из леммы 1 и равномерной непрерывности функции $\|\cdot\|$ на компакте K^-. Покажем, что (ii) $\Rightarrow$ (i). Достаточно проверить, что для любого $\epsilon > 0$ множество $K_\epsilon := K \setminus B(0;\epsilon)$ относительно компактно. На множестве K_ϵ соотношение (ii) эквивалентно соотношению $\lim\limits_{m\to\infty} \inf\limits_{x\in K_\epsilon} \frac{\|V_m(x)\|}{\|x\|} = 1$. Пусть $C := \sup\limits_{x\in K} \|x\|$. Из неравенства 5) леммы 6, непрерывности и монотонности модуля выпуклости имеем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in K_\epsilon} \|x - V_m(x)\| \leqslant \lim_{m\to\infty} C\,(1 - \inf_{x\in K_\epsilon} \delta(\frac{2\|V_m(x)\|}{\|x\|})) =$$

$$= C\,(1 - \delta(\lim_{m\to\infty} \inf_{x\in K_\epsilon} \frac{2\|V_m(x)\|}{\|x\|})) = 0.$$

Из полученного соотношения и леммы 1 следует, что множество K_ϵ относительно компактно.

Заметим, что последовательность $\{\|V_m(x)\|; m = 1, 2, ...\}$ не является, вообще говоря, монотонной, а свойство монотонности понадобится нам для доказательства основных теорем. Поэтому рассмотрим последовательность операторов (U_m) и последовательность множеств (A_m), определённые следующим образом.

$$U_1(x) = V_1(x),\ A_1 = \{x \in B;\ \|V_2(x)\| > \|U_1(x)\|\};$$

$$U_m(x) = \begin{cases} V_m(x), & x \in A_{m-1} \\ U_{m-1}(x), & x \in A_{m-1}^c \end{cases},$$

$$A_m = \{x \in B;\ \|V_{m+1}(x)\| > \|U_m(x)\|\}, m = 2, 3, \ldots .$$

Нетрудно видеть, что множества A_m открыты, а операторы U_m вполне непрерывны. Кроме того очевидны соотношения

$$\|V_m(x)\| \leqslant \|U_m(x)\| \leqslant \|U_{m+1}(x)\| \leqslant \|x\|\ (\forall x \in B,\ m = 1, 2, ...), \tag{1}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|U_m(x)\| = \|x\|\ (\forall x \in B). \tag{2}$$

Лемма 8. *Пусть K – ограниченное подмножество B. Следующие утверждения эквивалентны*

(i) *K относительно компактно.*

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{x\in K} (\|x\| - \|U_m(x)\|) = 0.$

Доказательство. Из определения оператора U_m следует, что для любого $x \in B$ найдётся такое $m' = m'(x) \in \{1, ..., m\}$, что $U_m(x) = V_{m'}(x)$. Из неравенства 5) леммы 6 имеем для $x \in B$, $x \neq 0$

$$\|x - U_m(x)\| = \|x - V_{m'}(x)\| \leqslant \|x\| \,(1 - \delta(\frac{2\,\|V_{m'}(x)\|}{\|x\|})) =$$

$$= \|x\| \,(1 - \delta(\frac{2\,\|U_m(x)\|}{\|x\|})). \tag{3}$$

Из неравенства (3) и соотношения (2) следует, что последовательность (U_m) удовлетворяет условиям леммы 1. Доказательство леммы 8 получается заменой V_m на U_m в доказательстве леммы 7 и использованием неравенства (3).

Лемма 9. *Для относительной компактности ограниченного множества $K \in B$ необходимо, чтобы для любой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ и достаточно, чтобы для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ выполнялось соотношение:*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in K} |\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_m(x)\|)| = 0.$$

Доказательство. Необходимость вытекает из равномерной непрерывности функции $\varphi(\|\cdot\|)$ на компакте K^-, а достаточность – из леммы 8 и равномерной непрерывности функции φ^{-1} на компакте $\varphi(\|K^-\|)$.

Из леммы 9 и критерия Прохорова получаем следующие условия относительной компактности семейства борелевских вероятностных мер на сепарабельном строго нормированном пространстве с непрерывным модулем выпуклости.

Теорема 4. *Пусть (μ_α) – семейство борелевских вероятностных мер на пространстве B. Для относительной компактности семейства (μ_α) необходимо, чтобы для любой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ и до-*

статочно, чтобы для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ выполнялись соотношения:

1) $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\alpha} \mu_\alpha(\|x\| > r) = 0,$

2) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\alpha} \mu_\alpha\{|\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_m(x)\|)| \geqslant \epsilon\} = 0 \quad (\forall\epsilon > 0).$

Следствие 1. *В условиях теоремы 4 для относительной компактности семейства (μ_α) достаточно, чтобы для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ выполнялись соотношения:*

1) $\sup\limits_{\alpha} |\int \varphi(\|x\|)\mu_\alpha(dx)| < \infty,$

2) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\alpha} |\int (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_m(x)\|))\mu_\alpha(dx)| = 0.$

Для доказательства следствия 1 достаточно воспользоваться теоремой 4 и неравенством Чебышёва, рассмотрев отдельно случай возрастающей и убывающей функции φ.

Замечание 2. В теореме 4 операторы U_m, очевидно, можно заменить на V_m.

Доказательство теорем 1–3

Заметим, что теорема 3 является частным случаем теоремы 2, а теорема 1 следует из теоремы 2, если в качестве φ взять какую-нибудь функцию из $\mathcal{M}_b$, например, $\varphi(t) = \arctan(t)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть в условиях теоремы 2 φ – строго возрастающая функция, а ϵ – произвольное положительное число. Рассмотрим меры $\nu_n = \mu_n U_m^{-1}$, $\nu = \mu U_m^{-1}$. Так как $\dim L_m < \infty$, то из условия (aaa) и теоремы Леви следует, что последовательность (ν_n) слабо сходится к ν, а так как $\mathcal{M}(\bar\nu) \subset \mathcal{M}(\bar\mu)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi(\|x\|)\nu_n(dx) = \int \varphi(\|x\|)\nu(dx)$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(\|U_m(x)\|)\mu_n(dx) = \int \varphi(\|U_m(x)\|)\mu(dx)\,. \tag{5}$$

Поскольку $\varphi(\|U_m(x)\|) \uparrow \varphi(\|x\|)$, то по теореме о монотонной сходимости найдётся такое $m_0 \in \mathcal{N}$, что

$$\int (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_{m_0}(x)\|))\mu(dx) < \epsilon.$$

Тогда из условия (d) и соотношения (5) следует, что найдётся такое $n_0 \in \mathcal{N}$, что

$$\int (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_{m_0}(x)\|))\mu_n(dx) < \epsilon \tag{6}$$

при $n \geqslant n_0$. Из монотонности последовательности $(\|U_m(x)\|)$ следует, что неравенство (6) остаётся справедливым после замены в нём m_0 на $m > m_0$. Для $n = 1, ..., n_0 - 1$ точно так же, как для меры μ, найдём такое m_n, что при $m \geqslant m_n$

$$\int (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_m(x)\|))\mu_n(dx) < \epsilon.$$

Положим $m_\epsilon = \max\{m_0, m_1, \dots, m_{n_0-1}\}$. Тогда при $m \geqslant m_\epsilon$

$$\sup_n \int (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|U_m(x)\|))\mu_n(dx) < \epsilon.$$

Следовательно, выполнено условие 2) следствия 2. Выполнение условия 1) непосредственно вытекает из условия (d).

Случай убывающей функции $\varphi \in \mathcal{M}(\bar{\mu})$ сводится к рассмотренному выше, если положить $\tilde{\varphi} = -\varphi$.

В качестве следствия доказанных теорем получаем результаты, анонсированные в [8].

Следствие 2. *Пусть B – сепарабельное равномерно выпуклое пространство. Тогда имеют место теоремы* 1–3.

Замечание 3. Если отказаться от требования сепарабельности пространства B, то теоремы 1–3 сохраняют свою силу, если ограничиться рассмотрением радоновых вероятностных мер μ_n, μ. Действительно, если B_0 – наименьшее замкнутое линейное подпространство B, содержащее носители мер μ, μ_n, $n \in \mathcal{N}$, с индуцированной нормой из B, то B_0 – сепарабельное строго нормированное пространство с непрерывным модулем выпуклости. При этом слабая сходимость последовательности (μ_n) к μ эквивалентна слабой сходимости последовательности сужений этих мер на B_0. Выполнение условия (aaa) для сужений мер на B_0 следует из его выполнения для исходных мер и теоремы Хана–Банаха, а выполнение остальных условий следует из выполнения их для исходных мер и очевидного включения: $\mathcal{M}(\bar{\mu}) \subset \mathcal{M}(\bar{\mu}_0)$, где $\bar{\mu}_0$ – последовательность сужений мер μ_n на B_0.

Следствие 3. *Строго нормированное банахово пространство с непрерывным модулем выпуклости обладает H-свойством.*

Доказательство. Для доказательства следствия 3 достаточно в теореме 1 в качестве мер μ_n, μ рассмотреть δ – меры, сосредоточенные на элементах x_n и x соответственно.

Пусть B – пространство с базисом $\{e_k\}_1^\infty$ и сопряжённой системой $\{f_k\}_1^\infty \subset B'$; $L_m = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_m\}$, $P_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) e_k$, $m = 1, 2, ..., x \in B$. Операторы P_m вполне непрерывны и удовлетворяют условиям леммы 1. Если $P_m(x) \neq 0$, то обозначим через x_m^* точку пересечения луча $\{t\, P_m(x);\, t > 0\}$ ц границей шара $B(x; \|x\|)$. Рассмотрим оператор $\tilde{W}_m : B \to L_m$,

$$\tilde{W}_m(x) = \begin{cases} 0, & P_m(x) = 0, \\ x_m^*, & P_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Построим операторы $\tilde{V}_m$ и $\tilde{U}_m$ таким же образом, как были построены операторы V_m и U_m. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|\tilde{W}_m(x)\| = 2\,\|x\|$ для каждого $x \in B$. Аналогично доказательству леммы 5 доказывается полная непрерывность оператора $\tilde{W}_m$. Внимательно просматривая доказательства остальных утверждений этой статьи, можно заметить, что их заключения останутся справедливыми, если дополнительно потребовать выполнения следующих условий:

(δ_1) модуль выпуклости пространства B непрерывен;

(δ_2) $\delta(2) = 1$.

Таким образом получаем следующие результаты.

Следствие 4. *Пусть B – банахово пространство с базисом, удовлетворяющее условиям (δ_1)–(δ_2). Тогда имеют место теоремы* 1–3.

Следствие 5. *Банахово пространство с базисом, удовлетворяющее условиям (δ_1)–(δ_2), обладает H-свойством.*

Литература

1. А. Н. Баушев, *О слабой сходимости гауссовских мер.* — Теория вероятн. и её примен. **32, No. 4** (1987), 734–742.
2. А. Н. Баушев, *О слабой сходимости вероятностных мер в пространствах Лебега.* — Вестник СПбГУ **1, No. 4** (1994), 15–20.

3. А. Н. Баушев, *О слабой сходимости вероятностных мер в пространствах Орлича.* — Теория вероятн. и её примен. **40, No. 3** (1995), 495–507.
4. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Москва, Наука, 1977, 352.
5. Н. Данфорд, И. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* Москва, ИЛ, 1962, 897.
6. К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества.* Москва, Наука, 1985, 335.
7. В. Д. Мильман, *Геометрическая теория пространств Банаха. Часть 2. Геометрия единичной сферы.* — Успехи матем. наук **26, No. 6(162)** (1971), 73–150.
8. A. N. Baushev, *On weak convergence of probability measures.* Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics. Abstr. of Comm. St. Petersburg, 1998, 31–32.
9. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, vol. 2, function spaces.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1979, 243.

Baushev A. N. On the weak convergence of probability measures in a Banach space.

Necessary and sufficient conditions for the weak convergence of Borel probability measures in a separable strictly normed Banach space with continuous modulus of convexity are derived. These conditions consist in simultanious convergence of the distribution functions of the norm and of all linear continuous functionals with respect to the sequence of distributions under consideration.

Санкт-Петербургский государственный
университет Путей Сообщения,
кафедра прикладной математики

Поступило 10 июля 1999 г.