Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

В. Г. Осмоловский

СРАВНЕНИЕ ДВУХ СПОСОБОВ УЧЕТА ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В ТЕРМОУПРУГОСТИ

§1. Введение.

Двуфазовая упругая среда при изменении внешних условий может скачкообразно менять свои состояния. Каждому из этих состояний отвечает своя плотность энергии – функция $F^{\pm}(M,u,x)$, где $M \in R^{m\times m}$, $u \in R^m$, $x \in \Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$, Ω – ограниченная область, $\partial\Omega \in C^2$, а значок $\pm$ отвечает фазам с индексами $\pm$ соответственно. Потенциальная энергия деформации зависит не только от поля смещений, но и от расположения каждой из фаз. Пусть $\chi(x)$, $x \in \Omega$ – характеристическая функция той части области Ω, в которой (в недеформированном состоянии) сосредоточена фаза с индексом $+$. Тогда функционал энергии деформации может быть записан в виде

$$I[u,\chi] = \int\limits_{\Omega} [\chi F^{+}(\dot u, u, x) + (1-\chi)F^{-}(\dot u, u, x)]\, dx, \tag{1.1}$$

где $\dot u = \dot u(x)$ – матрица первых производных вектор-функции $u(x)$. Под состоянием равновесия функционала (1.1) будем понимать такую пару $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$, на которой функционал (1.1) достигает своего наименьшего значения на множестве всех допустимых пар u, χ. Состояние равновесия назовем однофазным, если $\widehat{\chi} \equiv 0$ или $\widehat{\chi} \equiv 1$ и двуфазным в противном случае.

В теории термоупругости плотность энергии деформации зависит от дополнительного параметра – температуры $\tau \in R^1$. Если обе фазы двуфазной термоупругой среды являются однородными и изотропными, описываются одинаковыми законами Гука, но обладают разными коэффициентами объемного расши-

Работа поддержана фондом Университеты России, Госкомвузом по высшему образованию (НИИ МИОО НГУ 97-15-2.0-77), программой РФФИ “Научные школы”, грант No. 96-15-96121 и INTAS, грант No. 96-0835.

рения, то в квадратичном приближении плотности энергии деформации могут быть заданы в виде

$$\begin{gathered} F^{\pm}(M,\tau) = a\,\mathrm{sp}\,\xi^2 + b\,\mathrm{sp}^2\,\xi - c^{\pm}\tau\,\mathrm{sp}\,\xi, \\ \xi = \frac{1}{2}(M+M^*), \quad a,b,c^{\pm} > 0, \quad \tau\in R^1, \quad c^+ \neq c^-. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Функционал (1.1) для плотностей (1.2) определяется равенством

$$\begin{gathered} I[u,\chi,\tau] = \int\limits_{\Omega} [a\,\mathrm{sp}\,\xi^2 + b\,\mathrm{sp}^2\,\xi - c\tau\chi\,\mathrm{sp}\,\xi]\,dx, \\ c = c^+ - c^-, \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2}(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}). \end{gathered} \tag{1.3}$$

В качестве допустимых полей смещений и характеристических функций рассматривается следующее множество

$$\begin{gathered} u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \\ \chi \text{ -- измеримая характеристическая функция.} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Задача о минимуме функционала (1.3) на множестве (1.4) исследовалась в [1]. Там был в явном виде найден интервал температур, на котором существуют лишь однофазные состояния равновесия, а вне которого – лишь двуфазные. Доказано, что объем любой фазы является однозначной непрерывной функцией температуры (эта функция находится явно), что для каждого значения температуры, лежащего в зоне двуфазности, существует бесконечно много различных двуфазных состояний равновесия, выписываемых в явном виде.

Недостатком функционала (1.1) и его частного случая (1.3) на постановочном уровне является отсутствие учета поверхностной энергии, связанной с границей раздела фаз. Данная энергия пропорциональна площади границы раздела фаз.

Пусть для измеримой характеристической функции χ

$$\int\limits_{\Omega} |D\chi| \equiv \sup_{h\in C^1_0(\Omega,R^m),|h|\leqslant 1} \int\limits_{\Omega} \chi\,\mathrm{div}\,h\,dx < \infty. \tag{1.5}$$

Если неравенство (1.5) выполнено, то будем говорить, что $\chi \in BV(\Omega)$, а его левую часть назовем полной вариацией функции χ. Легко видеть, что в случае гладкости части границы носителя

χ, лежащей в области Ω, полная вариация χ совпадает с площадью этой части границы. Поэтому левая часть (1.5) является обощением площади границы раздела фаз.

В качестве модернизации функционала энергии (1.3), учитывающей поверхностную энергию границы раздела фаз, возьмем функционал

$$I[u,\chi,\tau]=\int\limits_{\Omega}[a\,\mathrm{sp}\,\xi^2+b\,\mathrm{sp}^2\,\xi-c\tau\chi\,\mathrm{sp}\,\xi]\,dx+\sigma\int\limits_{\Omega}|D\chi|,$$
$$\xi_{ij}=\frac{1}{2}(u^i_{x_j}+u^j_{x_i}), \tag{1.6}$$

определенный на множестве

$$u\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m),$$
$$\chi\in BV(\Omega)\text{ – характеристическая функция.} \tag{1.7}$$

Число σ в (1.6) (коэффициент поверхностного натяжения) считается положительным и фиксированным.

Исследованию вариационной задачи (1.6), (1.7) посвящены работы [2,3]. В них доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *При каждом $\tau\in R^1$ функционал (1.6) достигает на множестве (1.7) своего наименьшего значения. Существует такое $\tau_0>0$, что при $|\tau|<\tau_0$ множество всех состояний равновесия функционала (1.6) состоит из двух пар $\widehat{u}\equiv 0$, $\widehat{\chi}\equiv 0$ и $\widehat{u}\equiv 0$, $\widehat{\chi}\equiv 1$, а при $|\tau|>\tau_0$ существуют лишь двуфазные состояния равновесия. При $\tau=\pm\tau_0$ существуют как оба однофазных состояния равновесия ($\widehat{u}\equiv 0$, $\widehat{\chi}\equiv 0$ и $\widehat{u}\equiv 0$, $\widehat{\chi}\equiv 1$), так и хотя бы одно двуфазное. При $|\tau|>\tau_0$ пары $\widehat{u}\equiv 0$, $\widehat{\chi}\equiv 0$ и $\widehat{u}\equiv 0$, $\widehat{\chi}\equiv 1$ являются локальными минимумами функционала (1.6) относительно любых возмущений $\widehat{u}$ в классе $\overset{\circ}{W}{}^1_2$ и малых по $L_1(\Omega)$-норме возмущений функции $\widehat{\chi}$.*

Функционал (1.1) для более общих, чем (1.2) плотностей энергии может не достигать наименьшего значения на множестве допустимых векторных полей и характеристических функций. Добавка поверхностной энергии (последнее слагаемое в правой части (1.6)) исправляет этот недостаток [3]. Исследование примеров несуществования минимайзеров для функционала (1.1) привело к другому способу регуляризации этого функционала. К нему добавлялись интегралы от старших производных поля смещений и эта добавка интерпретировалась как штраф на образование границ раздела фаз. Такой подход рассматривался в [4–6].

Мы рассмотрим регуляризацию функционала (1.3) с помощью интеграла от старших производных вида

$$I[u,\chi,\tau] = \int\limits_{\Omega} [a \operatorname{sp} \xi^2 + b \operatorname{sp}^2 \xi - c\tau\chi \operatorname{sp} \xi]\, dx + \sigma\Big(\int\limits_{\Omega} |\Delta u|^2\, dx\Big)^{p/2}, \quad (1.8)$$

где $\sigma > 0$ и $p \in (0,1)$ фиксированы. Функционал (1.8) зададим на множестве

$$\begin{gathered} u \in W_2^2(\Omega, R^m) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m) = H, \\ \chi \text{ - измеримая характеристическая функция.} \end{gathered} \quad (1.9)$$

Наша цель – исследовать зависимость состояний равновесия функционала (1.8) от температуры и сравнить получившиеся результаты с теоремой 1.1. В этой работе будет доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. *При каждом $\tau \in R^1$ функционал (1.8) достигает на множестве (1.9) своего наименьшего значения. Существует такое $\tau_0 > 0$, что при $|\tau| < \tau_0$ множество всех состояний равновесия состоит из пар $\widehat{u} = 0$, $\widehat{\chi}$ – произвольная измеримая характеристическая функция,а при $|\tau| > \tau_0$ существуют лишь двуфазные состояния равновесия $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u} \neq 0$. При $\tau = \pm\tau_0$ множество всех состояний равновесия состоит из пар $\widehat{u} = 0$, $\widehat{\chi}$ – произвольная измеримая характеристическая функция и хотя бы одного двуфазного состояния равновесия $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u} \neq 0$. При $|\tau| > \tau_0$ каждая пара $\widehat{u} = 0$, $\widehat{\chi}$ – измеримая характеристическая функция является локальным минимумом функционала (1.8) на множестве (1.9) по отношению к малым возмущениям $\widehat{u}$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$ и произвольным возмущениям функции $\widehat{\chi}$.*

Мы видим, что регуляризации (1.6) и (1.8) на качественном уровне приводят к одинаковым результатам лишь при больших $|\tau|$, а при $|\tau| < \tau_0$ последнее слагаемое в (1.8) не может быть интерпретировано как штраф на возникновение границ раздела фаз.

Доказательство теоремы будет разбито на доказательство ряда лемм и содержится в дальнейших параграфах работы. Аналогичная программа для мартенситно-аустенитных фазовых переходов была реализована в [7]. При исследовании функционала

(1.8) мы будем следовать схеме, предложенной в [7]. Начиная с этого места через $I[u,\chi,\tau]$ мы будем обозначать только функционал (1.8) с фиксированными $\sigma > 0$ и $p \in (0,1)$.

§2. Теорема существования.

В пространствах H и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$ введем нормы

$$||u||_H = \left(\int\limits_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad ||u||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = \left(\int\limits_\Omega \operatorname{sp} \xi^2 \, dx \right)^{1/2}$$

эквивалентные стандартным нормам в W_2^2 и W_2^1 соответственно. Обозначим через μ наименьшую из возможных констант в неравенстве

$$||u||_{W_2^1} \leqslant \mu ||u||_H, \quad u \in H. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Функционал* (1.8) *достигает на множестве* (1.9) *своего наименьшего значения.*

Доказательство. Для произвольных u, χ из (1.9) очевидна оценка

$$\sigma ||u||_H^p + a||u||^2_{W_2^1} \leqslant I[u,\chi,\tau] + \frac{c^2\tau^2}{4b}|\Omega|. \tag{2.2}$$

Пусть u_n, χ_n, $n = 1, 2, \ldots$ – минимизирующая на множестве (1.9) последовательность для функционала (1.8)

$$I[u_n, \chi_n, \tau] \to \gamma(\tau) = \inf_{u,\chi \in (1.9)} I[u,\chi,\tau]. \tag{2.3}$$

Из (2.2) вытекает равномерная по n ограниченность последовательности $||u_n||_{W_2^2}$. Так как последовательность $||\chi_n||_{L_r}$ равномерно по n ограничена для любого r, то то пользуясь теоремой вложения пространства H в W_s^1 получим, что для некоторой подпоследовательности (сохраним за ней прежнее обозначение) u_n, χ_n

$$\begin{gathered}
u_n \to \widehat{u} \in H \quad \text{слабо в} \quad H, \\
a \operatorname{sp} \xi_n^2 + b \operatorname{sp}^2 \xi_n \to a \operatorname{sp} \widehat{\xi}^2 + b \operatorname{sp}^2 \widehat{\xi} \quad \text{в} \quad L_1, \\
\operatorname{sp} \xi_n \to \operatorname{sp} \widehat{\xi} \quad \text{в} \quad L_q(\Omega) \quad \text{с некоторым} \quad q > 1, \\
\xi_{nij} = \frac{1}{2}(u^i_{nx_j} + u^j_{nx_i}), \quad \widehat{\xi}_{ij} = \frac{1}{2}(\widehat{u}^i_{x_j} + \widehat{u}^j_{x_i}), \\
\chi_n \to \chi_0 \quad \text{слабо в} \quad L_{q'}(\Omega), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.
\end{gathered}$$

Поскольку норма в пространстве H слабо полунепрерывна снизу, а функция $f(t) = t^p$, $t \geqslant 0$ непрерывна и монотонно растет, то

$$||\widehat{u}||_H^p \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||u_n||_H^p.$$

Переходя в (2.3) к пределу, получим

$$I[\widehat{u}, \chi_0, \tau] \leqslant \gamma(\tau).$$

Функция χ_0 удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \chi_0(x) \leqslant 1$ при п.в. $x \in \Omega$, но не обязяна быть характеристической. Поэтому пара $\widehat{u}$, χ_0 вообще говоря не принадлежит множеству (1.9). Заменим функцию χ_0 на функцию $\widehat{\chi}$ по правилу

$$\begin{aligned} &\widehat{\chi}(x) = 1 \quad \text{при} \quad c\tau \operatorname{sp} \widehat{\xi} > 0, \\ &\widehat{\chi}(x) = 0 \quad \text{при} \quad c\tau \operatorname{sp} \widehat{\xi} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

При такой замене

$$I[\widehat{u}, \widehat{\chi}, \tau] \leqslant I[\widehat{u}, \chi_0, \tau] \leqslant \gamma(\tau).$$

Так как пара $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ лежит в множестве (1.9), то на ней функционал (1.8) достигает наименьшего значения.

Мы пока не беремся установить, как выглядят состояния равновесия функционала (1.8). Однако мы в состоянии описать некоторый класс локальных минимумов для этого функционала.

Лемма 2.3. *Пара $\widehat{u} = 0$, $\widehat{\chi}$ – произвольная характеристическая функция является локальным минимумом функционала* (1.8) *на множестве* (1.9) *по отношению к любым возмущениям функции $\widehat{\chi}$ и малым по норме пространства W_2^1 возмущениям функции $\widehat{u}$.*

Доказательство. Начнем с соотношений

$$\begin{aligned} &I[u, \chi, \tau] = \\ &= \sigma||u||_H^p + a||u||_{W_2^1}^2 + b\int_\Omega \operatorname{sp}^2\xi\, dx - c\tau\int_\Omega \chi \operatorname{sp}\xi\, dx \geqslant \\ &\geqslant \sigma||u||_H^p + a||u||_{W_2^1}^2 - |c\tau||\Omega|^{1/2}\Big(\int_\Omega \operatorname{sp}^2\xi\, dx\Big)^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

верных для любой пары u, χ из множества (1.9). Поскольку

$$\int\limits_\Omega \mathrm{sp}^2\,\xi\,dx = \int\limits_\Omega (\mathrm{div}\,u)^2\,dx = \int\limits_\Omega u^i_{x_i} u^j_{x_j}\,dx = \int\limits_\Omega u^i_{x_j} u^j_{x_i}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega (u^i_{x_j} u^i_{x_j})^{1/2} (u^j_{x_i} u^j_{x_i})^{1/2}\,dx \leqslant \int\limits_\Omega u^i_{x_j} u^i_{x_j}\,dx = \int\limits_\Omega \mathrm{sp}\,\xi^2\,dx = ||u||^2_{W^1_2},$$

то с помощью (2.1), (2.5) и последнего неравенства получим

$$I[u,\chi,\tau] \geqslant ||u||^p_{W^1_2}[\sigma\mu^{-p} + a||u||^{2-p}_{W^1_2} - |c\tau|\,|\Omega|\,||u||^{1-p}_{W^1_2}].$$

Учитывая, что $p \in (0,1)$, приходим к неравенству

$$I[u,\chi,\tau] > 0 = I[\widehat{u},\widehat{\chi},\tau],$$

справедливому для всех пар u, χ из (1.9) в которых $u \neq 0$ и имеет достаточно малую W^1_2 – норму.

§3. Оценка снизу нормы ненулевого равновесного поля смещений.

Лемма 3.1. *Пусть $\tau \neq 0$ и $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ – состояние равновесия фунционала* (1.8), *причем $\widehat{u} \neq 0$. Тогда*

$$||\widehat{u}||^{1-p}_{W^1_2} \geqslant \frac{\sigma}{|c\tau|\mu^p|\Omega|^{1/2}}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Перепишем очевидное неравенство $I[\widehat{u},\widehat{\chi},\tau] \leqslant I[0,\widehat{\chi},\tau]$ в развернутом виде

$$\begin{gathered}\sigma||\widehat{u}||^p_H + a||\widehat{u}||^2_{W^1_2} + b\int\limits_\Omega \mathrm{sp}^2\,\widehat{\xi}\,dx - c\tau\int\limits_\Omega \widehat{\chi}\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}\,dx \leqslant 0,\\ \widehat{\xi}_{ij} = \frac{1}{2}(\widehat{u}^i_{x_j} + \widehat{u}^j_{x_i}).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Огрубляя (3.2), получим

$$\sigma||\widehat{u}||^p_H + a||\widehat{u}||^2_{W^1_2} - |c\tau|\,||\widehat{\chi}||^{1/2}_{L_1}||\widehat{u}||_{W^1_2} \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Из (3.3) и (2.1) следуют соотношения

$$\begin{gathered}\sigma||\widehat{u}||^p_H \leqslant |c\tau|\,|\Omega|^{1/2}||\widehat{u}||^{1-p}_{W^1_2}||\widehat{u}||^p_{W^1_2} \leqslant\\ \leqslant |c\tau|\,|\Omega|^{1/2}||\widehat{u}||^{1-p}_{W^1_2}(\mu||\widehat{u}||_H)^p,\end{gathered} \tag{3.4}$$

из которых при $\tau \neq 0$, $\widehat{u} \neq 0$ получим (3.1).

Лемма 3.2. *Пусть $\tau \neq 0$ и $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ – состояние равновесия функционала* (1.8) *с $\widehat{u} \neq 0$. Тогда*

$$||\widehat{\chi}||_{L_1}^{\frac{1-p}{2}} \geqslant \frac{a\sigma}{|\Omega|^{1/2}|c\tau|^2}|\frac{c\tau}{a\mu}|^p, \quad ||1-\widehat{\chi}||_{L_1}^{\frac{1-p}{2}} \geqslant \frac{a\sigma}{|\Omega|^{1/2}|c\tau|^2}|\frac{c\tau}{a\mu}|^p. \quad (3.5)$$

Доказательство. Огрубляя неравенство (3.3), получим

$$a||\widehat{u}||_{W_2^1}^2 \leqslant |c\tau|\,||\widehat{\chi}||_{L_1}^{1/2}||\widehat{u}||_{W_2^1}. \quad (3.6)$$

Сокращая в (3.5) на ненулевой множитель и пользуясь (3.1), придем к оценке

$$\frac{\sigma}{|c\tau|\mu^p|\Omega|^{1/2}} \leqslant (|\frac{c\tau}{a}|\,||\widehat{\chi}||_{L_1}^{1/2})^{1-p},$$

из которой следует первое неравенство из (3.5).

Для функционала (1.8) при всех u, χ из множества (1.9) выполняется равенство

$$I[u,\chi,\tau] = I[u,1-\chi,-\tau]. \quad (3.7)$$

Поэтому из того факта, что пара $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ является состоянием равновесия для функционала $I[u,\chi,\tau]$ следует, что пара $\widehat{u}$, $1-\widehat{\chi}$ является состоянием равновесия для функционала $I[u,\chi,-\tau]$. Повторяя предыдущие рассуждения для состояния равновесия $\widehat{u}$, $1-\widehat{\chi}$, получим второе неравенство в (3.5).

§4. Зависимость состояний равновесия от температуры.

Начнем с описания состояний равновесия при малых $|\tau|$.

Лемма 4.1. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех $|\tau| < \varepsilon$ множество состояний равновесия состоит только из пар $\widehat{u} = 0$, $\widehat{\chi}$ – произвольная характеристическая функция.*

Доказательство. Из неравенства (3.6) следует оценка

$$a||\widehat{u}||_{W_2^1} \leqslant |c\tau|\,|\Omega|^{1/2}. \quad (4.1)$$

С помощью (4.1) и (3.4) получим

$$||\widehat{u}||_H^p \leqslant \frac{a}{\sigma}\mu^p(\frac{|c\tau|\,|\Omega|^{1/2}}{a})^{2-p}||\widehat{u}||_H^p. \quad (4.2)$$

При выполнении неравенства

$$\frac{a}{\sigma}\mu^p(\frac{|c\tau|}{a}|\Omega|^{1/2})^{2-p} < 1$$

соотношение (4.2) может выполняться лишь при $\widehat{u} = 0$.

В следующих двух леммах речь пойдет об описании множества состояний равновесия при больших $|\tau|$.

Лемма 4.2. *Пусть при $\tau = \tau_* \neq 0$ у функционала* (1.8) *существует состояние равновесия $\widehat{u}_*$, $\widehat{\chi}_*$ с $\widehat{u}_* \neq 0$. Тогда для всех τ с $|\tau| > |\tau_*|$ существуют лишь состояния равновесия $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u} \neq 0$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\tau_* > 0$. В противном случае нужно воспользоваться равенством (3.7) и заменить τ_* на $-\tau_*$, а функцию $\widehat{\chi}_*$ на $1 - \widehat{\chi}_*$. Из яного вида функционала (1.8) следует, что в качестве функции $\widehat{\chi}_*$ можно взять

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_*(x) = 1 \quad &\text{при} \quad c\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*(x) > 0, \\ \widehat{\chi}_*(x) = 0 \quad &\text{при} \quad c\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*(x) \leqslant 0, \\ \widehat{\xi}_{*ij} = &\frac{1}{2}(\widehat{u}^i_{*x_j} + \widehat{u}^j_{*x_i}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

(неоднозначность в выборе $\widehat{\chi}_*(x)$ возможна лишь для тех $x \in \Omega$, при которых $\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*(x) = 0$). Поскольку $\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_* = \mathrm{div}\,\widehat{u}_*$, $\widehat{u}_* \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m)$, то

$$\int\limits_\Omega \mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*\,dx = 0. \tag{4.4}$$

Так как $\widehat{u}_* \neq 0$, то и $\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_* \neq 0$. В противном случае

$$I[\widehat{u}_*, \widehat{\chi}_*, \tau_*] = \sigma||\widehat{u}_*||^p_H + a||\widehat{u}_*||^2_{W^1_2} > 0 = I[0, \chi, \tau_*]$$

для всех измеримых характеристических функций χ. Поэтому пара $\widehat{u}_*$, $\widehat{\chi}_*$ не может быть состоянием равновесия для функционала $I[u, \chi, \tau_*]$. Из неравенства $\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_* \neq 0$ и (4.3), (4.4) следует,что

$$c\int\limits_\Omega \widehat{\chi}_*\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*\,dx > 0. \tag{4.5}$$

Тогда для всех измеримых характеристических функций χ и $\tau > \tau_*$

$$I[\widehat{u}_*, \widehat{\chi}_*, \tau] < I[\widehat{u}_*, \widehat{\chi}_*, \tau_*] \leqslant I[0, \chi, \tau_*] = I[0, \chi, \tau].$$

Поэтому пара $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u}=0$ не может быть состоянием равновесия для функционала (1.8) при $\tau > \tau_*$.

Пара $\widehat{u}_*$, $1-\widehat{\chi}_*$ будет состоянием равновесия для функционала $I[u,\chi,-\tau_*]$. В силу (4.4), (4.5)

$$c\int\limits_{\Omega}(1-\widehat{\chi}_*)\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*\,dx = -c\int\limits_{\Omega}\widehat{\chi}_*\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_*\,dx < 0.$$

Тогда для всех измеримых характеристических функций χ и $\tau < -\tau_*$

$$I[\widehat{u}_*, 1-\widehat{\chi}_*, \tau] < I[\widehat{u}_*, 1-\widehat{\chi}_*, -\tau_*] \leqslant I[0,\chi,-\tau_*] = I[0,\chi,\tau].$$

Поэтому пара $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u}=0$ не может быть состоянием равновесия функционала (1.8) при $\tau < -\tau_*$.

Лемма 4.3. *Существует такое τ_*, что у функионала $I[u,\chi,\tau_*]$ есть состояние равновесия $\widehat{u}_*$, $\widehat{\chi}_*$ с $\widehat{u}_* \neq 0$.*

Доказательство. Фиксируем $u_0 \in H$ с $\operatorname{div} u_0 \neq 0$ и измеримую характеристическую функцию χ_0, для которой

$$c\int\limits_{\Omega}\chi_0 \operatorname{div} u_0\,dx > 0.$$

Так как интеграл от $\operatorname{div} u_0$ равен нулю, то такая функция χ_0 существует. Поскольку $I[u_0,\chi_0,\tau] \to -\infty$ при $\tau \to \infty$, то найдется такое τ_*, что для всех измеримых характеристических функций χ

$$I[u_0,\chi_0,\tau_*] < 0 = I[0,\chi,\tau_*].$$

Поэтому пара $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u}=0$ не может быть состоянием равновесия для функционала (1.8) при $\tau = \tau_*$.

Леммы 4.2–4.3 позволяют доказать существование положительного τ_0 из теоремы 1.2.

Лемма 4.4. *Существует такое $\tau_0 > 0$, что у функционала* (1.8) *при $|\tau| < \tau_0$ множество всех состояний равновесия состоит из пар $\widehat{u}=0$, $\widehat{\chi}$ – произвольная измеримая характеристическая функция, а при $|\tau| > \tau_0$ существуют лишь двуфазные состояния равновесия с ненулевым полем смещения.*

Доказательство. По лемме 4.3 существует такое τ_*, что у функционала (1.8) с $\tau = \tau_*$ имеется состояние равновесия $\widehat{u}_*$, $\widehat{\chi}_*$ с

$\widehat{u}_* \neq 0$. По лемме 4.2 у функционала (1.8) с $|\tau| > |\tau_*|$ существуют лишь состояния равновесия $\widehat{u}_\tau$, $\widehat{\chi}_\tau$ с $\widehat{u}_\tau \neq 0$. Поэтому τ_0 существует и $\tau_0 = \inf|\tau_*|$, где инфимум берется по всем τ_*, для которых у функционала (1.8) с $\tau = \tau_*$ есть состояние равновесия $\widehat{u}_*$, $\widehat{\chi}_*$ с $\widehat{u}_* \neq 0$. Двуфазность состояний равновесия функционала (1.8) при $|\tau| > \tau_0$ следует из леммы 3.2.

Из леммы 4.1 следует, что $\tau_0 > 0$. При $|\tau| < \tau_0$ у функционала (1.8) возможны лишь состояния равновесия $\widehat{u}_\tau$, $\widehat{\chi}_\tau$ с $\widehat{u}_\tau = 0$. Тогда $\widehat{\chi}_\tau$ – любая измеримая характеристическая функция.

Для описания множества состояний равновесия при $\tau = \pm\tau_0$ будет полезна следующая лемма.

Лемма 4.5. *Пусть $\widehat{u}_n$, $\widehat{\chi}_n$ – состояние равновесия для функционала* (1.8) *с $\tau = \tau_n$, $n = 1, 2, \dots$ и $\tau_n \to \tau' \neq 0$ при $n \to \infty$. Если для всех n выполняется соотношение $\widehat{u}_n = 0$ ($\widehat{u}_n \neq 0$), то у функционала* (1.8) *с $\tau = \tau'$ существует состояние равновесия $\widehat{u}'$, $\widehat{\chi}'$ с $\widehat{u}' = 0$ ($\widehat{u}' \neq 0$) соответственно.*

Доказательство. Для всех n и любых пар u, χ из множества (1.9) справедливо неравенство

$$I[\widehat{u}_n, \widehat{\chi}_n, \tau_n] \leqslant I[u, \chi, \tau_n]. \tag{4.6}$$

Из (4.6) и (2.2) следует равномерная по n ограниченность последовательности $||\widehat{u}_n||_H$. Как и в доказательстве леммы 2.1 выберем такую подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение) $\widehat{u}_n$, $\widehat{\chi}_n$, что

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}_n \to \widehat{u}' \quad \text{слабо в } H, \\
&a\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_n^2 + b\,\mathrm{sp}^2\,\widehat{\xi}_n \to a\,\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}'^2 + b\,\mathrm{sp}^2\,\widehat{\xi}' \quad \text{в } L_1(\Omega), \\
&\mathrm{sp}\,\widehat{\xi}_n \to \mathrm{sp}\,\widehat{\xi}' \quad \text{в } L_q(\Omega) \quad \text{с некоторым } q > 1, \\
&\widehat{\xi}_{nij} = \frac{1}{2}(\widehat{u}^i_{nx_j} + \widehat{u}^j_{nx_i}) \quad \widehat{\xi}'_{ij} = \frac{1}{2}(\widehat{u}'^i_{x_j} + \widehat{u}'^j_{x_i}), \\
&\widehat{\chi}_n \to \chi_0 \quad \text{слабо в } L_{q'}(\Omega), \quad 1/q' + 1/q = 1.
\end{aligned}$$

Совершив в (4.6) предельный переход так же как и в лемме 2.1, получим

$$I[\widehat{u}', \chi_0, \tau'] \leqslant I[u, \chi, \tau]. \tag{4.7}$$

Функция χ_0 удовлетворяет при почти всех $x \in \Omega$ неравенствам $0 \leqslant \chi_0(x) \leqslant 1$, но не обязана быть характеристической. Производя ее замену на $\widehat{\chi}`$ по указанному в лемме 2.1 (см.(2.4)) правилу, получим

$$I[\widehat{u}`, \widehat{\chi}`, \tau`] \leqslant I[u, \chi, \tau`] \tag{4.8}$$

и пара $\widehat{u}`$, $\widehat{\chi}`$ лежит в множестве (1.9). Таким образом, пара $\widehat{u}`$, $\widehat{\chi}`$ – состояние равновесия функционала (1.8) с $\tau = \tau`$. Если $\widehat{u}_n = 0$ для всех $n$, то и $\widehat{u}` = 0$. Если $\widehat{u}_n \neq 0$ для всех n, то в силу леммы 3.1 и предположения $\tau` \neq 0$ следует равномерная по $n$ оценка снизу положительной константой величин $||\widehat{u}_n||_{W_2^1}$. Эта оценка выдерживает предельный переход. Поэтому $\widehat{u}` \neq 0$.

Обратимся к последней лемме, описывающей состояния равновесия фунционала (1.8) при $\tau = \pm\tau_0$.

Лемма 4.6. *При $\tau = \pm\tau_0$ множество всех состояний равновесия функционала (1.8) состоит из пар $\widehat{u} = 0$, $\widehat{\chi}$ – произвольная измеримая характеристическая функция и хотя бы одного двуфазного состояния равновесия $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ с $\widehat{u} \neq 0$.*

Доказательство. Для доказательства этой леммы нужно воспользоваться леммой 4.5, выбрав сначала последовательность $\tau_n \to \tau_0$ ($\tau_n \to -\tau_0$) с $|\tau_n| < \tau_0$, а затем с $|\tau_n| > \tau_0$. Двуфазность состояния равновесия с ненулевым полем смещения следует из леммы 3.2.

Литература

1. В. Г. Осмоловский, *Теорема существования и точные решения в вариационной задаче о высокотемпературных фазовых переходах при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения.* Проблемы математического анализа, вып. 15, 1995, с.201–212.
2. В. Г. Осмоловский, *Зависимость состояний равновесия двуфазной среды от коэффициента поверхностного натяжения и температуры.* — Записки научных семинаров ПОМИ **213** (1994), 131–150.
3. Н. Ф. Морозов, В. Г. Осмоловский, *О постановке и теореме существования для вариацонной задачи о фазовых переходах в механике сплошных сред.* — Журнал прикладной математики и механики **58, No. 5** (1994), 125–132.
4. R. V. Kohn, S. Muller, *Branching of twins near an austenite-twinned-martensite interface.* — Phil. Magazine, A. **66, No. 5** (1992), 697–715.
5. S. Muller, *Singular perturbations as a selection criterion for periodic minimizing sequences.* Calc. Var. 1, 1993, 169–204.
6. R. V .Kohn, S. Muller, *Surface energy and microstructure in coherent phase transitions.* — Comm. on Pure and Appl. Math **47** (1994), 405–435.

7. В. Г. Осмоловский, *Сравнение двух способов учета поверхностной энергии в вариационных задачах о фазовых переходах в механике сплошных сред.* Проблемы математического анализа, вып. 18, 1998, (в печати).

Osmolovskii V. G. Matching of two modes of the registration of surface energy for a problem about phase transitions in a thermoelasticity.

In the present paper matching two modes of the registration of a ourface energy in a problem about phase transitions in the theory of a thermoelasticity will be arried out. In the first mode the surface energy is considered of a proportional interfacial area of phases. In the second case the surface energy is taken into account by an indirect fashion, as an integral from highiv derivatives of a field of displacements. The likenesses and differences of association of equilibrium states from parameters for two different of a regularization are become clear.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 января 1998 г.