Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

Г. В. Кузьмина

О СВЯЗИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

При решении ряда задач для неналегающих областей рассматривалось разбиение римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ или области на $\overline{\mathbb{C}}$ на объекты специального вида: двуугольники или треугольники с вершинами в отмеченных точках. Общая теорема, устанавливающая возможность такого подхода, впервые была получена Е. Г. Емельяновым [1], простое доказательство указано в [2]. О различных приложениях, см. например, [1, 2, 3].

В данной работе, как и в [2], используется прямая связь между различными задачами о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих односвязных областей, при этом допустимые системы областей рассматриваемых задач конструируются определенным образом из круговых областей надлежащих квадратичных дифференциалов и "половинок" этих областей. Возможность такого построения непосредственно вытекает из основных результатов метода экстремальной метрики. При помощи описанной конструкции, а также результатов теории задач об экстремальном разбиении решается задача о максимуме произведения конформных радиусов для систем чередующихся точек, лежащих на концентрических окружностях. Полученный результат дополняет известную теорему В. Н. Дубинина [4]. Тот же подход применяется к задаче о максимуме произведения конформных радиусов трех неналегающих областей в круге.

§1. Задача о максимуме произведения конформных радиусов для точек на концентрических окружностях

1. Пусть a_k и b_j, k, $j = 1, \dots, n$, – система попарно различных точек, расположенных соответственно на окружностях $|z| = 1/r$ и $|z| = r$. Будем называть эти точки чередующимися, если внутри каждого из углов, образованного лучами, выходящими из начала

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 97-01-00259).

координат и проходящими через соседние из точек a_k (или b_j), лежит одна и только одна из точек b_j (или a_k). Полагая $a_k = 1/r\, e^{i\pi\varphi_k}$, $b_j = re^{i\pi\psi_j}$, будем считать, что

$$\varphi_1 < \psi_1 < \varphi_2 < \psi_2 \dots < \varphi_n < \psi_n < \varphi_{n+1} (= \varphi_1 + 2).$$

Систему чередующихся точек a_k и b_j будем называть правильной, если каждая из точек b_j (и каждая из точек a_k) лежит на биссектрисе угла, образованного лучами, выходящими из начала координат и проходящими через точки a_j и a_{j+1} (соответственно, через точки b_{k-1} и b_k).

Через $R(D,a)$ обозначаем конформный радиус односвязной области D относительно точки $a \in D$. Рассмотрим задачу о максимуме произведения

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_k^{(1)}, a_k) R(D_k^{(2)}, b_k) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}$ всех систем неналегающих односвязных областей $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, где $a_k \in D_k^{(1)}$, $b_k \in D_k^{(2)}$, $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ – система чередующихся точек, лежащих соответственно на окружностях $|z| = 1/r$ и $|z| = r$, r – фиксированное число. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $r > 0$ фиксировано. В семействе $\mathcal{D}$ справедливо точное неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_k^{(1)}, a_k) R(D_k^{(2)}, b_k) \leqslant \frac{1}{n^{2n}} H^{-2n}\left(\operatorname{arctg} \frac{2r^n}{1 - r^{2n}}\right). \tag{2}$$

Здесь $H(\omega) = \operatorname{cap} E(0, e^{i\omega}, e^{-i\omega})$, где $E(0, e^{i\omega}, e^{-i\omega})$ – континуум наименьшей емкости, содержащий указанные точки. Равенство в (2) достигается только для правильных систем чередующихся точек a_k^*, b_k^*:

$$a_k^* = 1/re^{i\pi\varphi_k^*}, \quad b_k^* = re^{i\pi\psi_k^*}, \quad \text{где} \ \ \varphi_k^* = \varphi_1^* + 2k/n,$$
$$\psi_k^* = \psi_1^* + 2k/n = \varphi_1^* + (2k+1)/n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $\varphi_1^* = 0$. Экстремальной системой областей $D_k^{(1)^*}$, $D_k^{(2)^*}$, $k = 1, \dots, n$, в случае $r \neq 1$ является только система круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^{n-2}(z^n + 1/\mu^n)(z^n - \mu^n)}{(z^n - 1/r^n)^2 (z^n + r^n)^2} dz^2,$$

где μ, $0<\mu<1$, – решение уравнения

$$4\pi^2\frac{r^n(1/r^n+1/\mu^n)(1/r^n-\mu^n)}{n^2(1/r^n+r^n)^2}=1,$$

в случае $r=1$ указанной системой является только система углов $-\pi/(2n)<\arg z-\varphi_k^*<\pi/(2n)$ и $-\pi/(2n)<\arg z-\psi_k^*<\pi/(2n)$, $k=1,\dots,n$.

2. Пусть $\mathcal{D}^{(4)}$ – семейство всех четверок неналегающих областей D_1, D_2, D_3, D_4 на $\overline{\mathbb{C}}$, содержащих соответственно точки $-1/r$, $1/r$, $re^{i\alpha}$, $re^{-i\alpha}$, где r – положительное число, $\alpha\in(0,\pi)$. При доказательстве теоремы 1 существенно используется

Теорема 2. *Максимум произведения*

$$\prod_{k=1}^{4}R(D_k,c_k) \tag{3}$$

в семействе $\mathcal{D}^{(4)}$ при любом фиксированном $r>0$ и $\alpha\in(0,\pi)$ достигается только при $\alpha=\pi/2$ и имеет место точное неравенство

$$\prod_{k=1}^{4}R(D_k,c_k)\leqslant 4^{-2}H^{-4}\left(\operatorname{arctg}\frac{2r^2}{1-r^4}\right),$$

где $H(\omega)=\operatorname{cap}E(0,e^{i\omega},e^{-i\omega})$, $E(0,e^{i\omega},e^{-i\omega})$ – континуум наименьшей емкости, содержащий указанные точки. Экстремальной системой областей D_k^*, $k=1,\dots,4$, при $r\neq1$ является только система круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2=-\frac{(z^2-\mu^2)(z^2+1/\mu^2)}{(z^2-1/r^2)^2(z^2+r^2)^2}dz^2,$$

где μ, $0<\mu<1$, удовлетворяет уравнению

$$\pi^2\frac{r^2(1/r^2-\mu^2)(1/r^2+1/\mu^2)}{(1/r^2+r^2)^2}=1,$$

при $r=1$ указанной системой служит только система углов $-\pi/4<\arg z-\pi(k-1)/2<\pi/4$, $k=1,\dots,4$.

Экстремальные конфигурации теоремы 2 в случаях $r<1$, $r=1$ и $r>1$ изображены соответственно на рис. 1, 2 и 3.

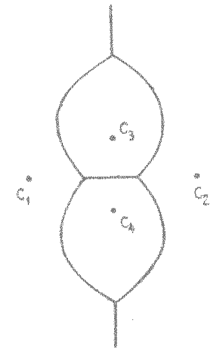

Рис. 1

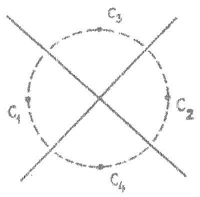

Рис. 2

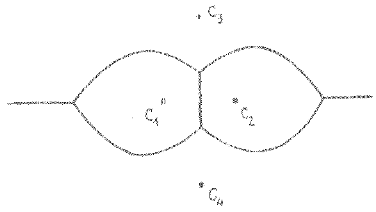

Рис. 3.

Доказательство. Достаточно рассматривать случай $0 < r \leqslant 1$, $\alpha \in (0, \pi/2]$, так как каждый из остальных случаев сводится к нему при помощи одного из преобразований $z \to \pm 1/z$ или $z \to -z$. Используем теорему в [5] о максимуме произведения конформных радиусов $R(D_k, c_k)$ четырех неналегающих областей D_k, $k = 1, \dots, 4$, при любом фиксированном значении $\lambda = \lambda(c_1, c_2, c_3, c_4)$ ангармонического отношения четверки точек c_k. По теореме 1 в [5], справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{4} R(D_k, c_k) \leqslant \mathcal{F},$$

где

$$\mathcal{F} = 4^{-10/3} |1 - a^2|^{4/3} \operatorname{cap}^{-4} E(-1, 1, a) \Big\{ \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |c_k - c_l| \Big\}^{2/3},$$

и при надлежащей нумерации точек c_k

$$\lambda = \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} : \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2}, \quad a = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1},$$

$E(-1, 1, a)$ – континуум наименьшей емкости, содержащий точки $-1, 1, a$.

Полагая в рассматриваемом случае $c_1 = -1/r$, $c_2 = 1/r$, $c_3 = re^{i\alpha}$, $c_4 = re^{-i\alpha}$, имеем

$$\lambda = \frac{re^{i\lambda} + 1/r}{re^{i\alpha} - 1/r} : \frac{re^{-i\alpha} + 1/r}{re^{-i\alpha} - 1/r} = \frac{1 + r^2 e^{i\alpha}}{1 + r^2 e^{-i\alpha}} \cdot \frac{1 - r^2 e^{-i\alpha}}{1 - r^2 e^{i\alpha}} = \exp(2i\omega),$$

где

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{2r^2 \sin\alpha}{1 - r^4}, \tag{4}$$

$$a = \frac{e^{2i\omega} + 1}{e^{2i\omega} - 1} = -i \operatorname{ctg}\omega,$$

$$\operatorname{cap} E(-1, 1, a) = \operatorname{cap} E(-1, 1, i\operatorname{ctg}\omega) = \frac{1}{\sin\omega} \operatorname{cap} E(0, e^{i\omega}, e^{-i\omega}),$$

$$\prod_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |c_k - c_l| = 4r^{-4} \sin\alpha (1 - 2r^2 \cos 2\alpha + r^8).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 4^{-10/3} \sin^{4/3}\omega \operatorname{cap}^{-4} E(0, e^{i\omega}, e^{-i\omega}) \\ &\cdot \left\{4r^{-4} \sin\alpha (1 - 2r^4 \cos 2\alpha + r^8)\right\}^{2/3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (4) получаем

$$\sin\omega = \frac{2r^2 \sin\alpha}{\sqrt{1 - 2r^4 \cos 2\alpha + r^8}}, \quad \cos\omega = \frac{1 - r^4}{\sqrt{1 - 2r^4 \cos 2\alpha + r^8}},$$

откуда $\sin^2\omega (1 - 2r^4 \cos 2\alpha + r^8) = 4r^4 \sin^2\alpha$ и (5) принимает вид

$$\mathcal{F} = 4^{-2} H^{-4}(\omega) \sin^2\alpha.$$

Исследуем $\mathcal{F}$ как функцию от α при фиксированном r. Пусть $0 < r < 1$. Полагая

$$\mathcal{F}_1 = H^{-2}(\omega) \sin\alpha,$$

находим

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1} \frac{d\mathcal{F}_1}{d\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 2 \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} \frac{d\omega}{d\alpha}.$$

Используя равенства

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{2r^2(1 - r^4)\cos\alpha}{1 - 2r^4 \cos 2\alpha + r^8} = \operatorname{ctg}\alpha \sin\omega \cos\omega,$$

получаем

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1} \frac{d\mathcal{F}_1}{d\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \left[1 - 2 \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} \sin\omega \cos\omega\right].$$

Задача о континууме наменьшей емкости $E(0, e^{i\omega}, e^{-i\omega})$ достаточно хорошо изучена. По замечанию 1.4 в [6],

$$\frac{1}{H(\omega)}\,\frac{dH(\omega)}{d\omega} = \frac{\cos\omega - c(\omega)}{\sin\omega},$$

где при $0 < \omega < \pi/2$, $c(\omega)$, $0 < c(\omega) < 1$, – общая точка трех аналитических дуг, образующих $E(0, e^{i\omega}, e^{-i\omega})$, $c(0) = 1$, $c(\pi/2) = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1}\,\frac{d\mathcal{F}_1}{d\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\left[1 - 2(\cos\omega - c(\omega))\cos\omega\right].$$

Обозначая выражение в квадратных скобках через $h(\omega)$, имеем

$$h(\omega) = \sin^2\omega - \cos^2\omega + 2c(\omega)\cos\omega > 0 \quad \text{при} \quad \pi/4 \leqslant \omega < \pi/2.$$

По замечанию 1.5 в [6], $c(\omega)/\cos\omega$ – строго убывающая функция при $0 < \omega < \pi/2$. При этом

$$\frac{c(\omega)}{\cos(\omega)} = \frac{2}{3} \quad \text{при} \quad \omega = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{c(\omega)}{\cos(\omega)} = \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad \omega = \omega_0 = \pi/2 - 0,1574\ldots$$

(см. замечание 1.1 и теорему 2.3 в [6]). Следовательно, при $0 < \omega \leqslant \pi/6$

$$h(\omega) > 1 - 2\cos^2\omega + \frac{4}{3}\cos^2\omega = 1 - \frac{2}{3}\cos^2\omega > 0,$$

а при $\pi/6 < \omega < \pi/4$

$$h(\omega) > 1 - 2\cos^2\omega + \frac{2}{3}\cos^2\omega = 1 - \frac{4}{3}\cos^2\omega > 0.$$

Поэтому $\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha} > 0$ при $0 < \alpha < \pi/2$. В случае $r = 1$ $\omega = \pi/2$ и $\mathcal{F} = \sin^2\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Итак, при любом фиксированном $r \in (0, 1]$ $\mathcal{F}$ является возрастающей функцией от α при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ и наибольшее значение этой функции равно

$$\mathcal{F}^* = 4^{-2}H^{-4}(\omega^*), \quad \text{где} \quad \omega^* = \operatorname{arctg}\frac{2r^2}{1 - r^4}.$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $r > 0$ и фиксировано. Пусть a_k, b_k – некоторая система чередующихся точек, определенная в условиях теоремы 1, и пусть $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$, где $a_k \in D_k^{(1)}$, $b_k \in D_k^{(2)}$, $k = 1, \ldots, n$, – система областей, для которых достигается максимум произведения (1) для указанной системы точек. Если a_k, b_k образуют правильную систему чередующихся точек, то для областей, указанных в формулировке теоремы 1, в (2) имеет место равенство. Пусть точки a_k, b_k этим свойством не обладают. Предположим, для определенности, что точки b_k не образуют систему равностоящих точек на окружности $|z| = r$.

Пусть Δ_k – угол, ограниченный лучами, проходящими через точки a_k и a_{k+1}:

$$\Delta_k = \{\, z : \pi\varphi_k < \arg z < \pi\varphi_{k+1} \,\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

В силу условий теоремы, $b_k \in \Delta_k$. Пусть

$$2\lambda_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k.$$

Тогда $2\pi\lambda_k$ – внутренний угол области Δ_k в точке $z = 0$. При отображении

$$w = f_k(z) = (ze^{-i\pi\varphi_k})^{1/(2\lambda_k)}$$

углу Δ_k соответствует верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а точки a_k, a_{k+1} и b_k переходят соответственно в точки $w_k^{(1)} = 1/\rho_k$, $w_k^{(2)} = -1/\rho_k$ и $w_k^{(3)} = \rho_k\, e^{i\pi\delta_k}$, где $\rho_k = r^{1/(2\lambda_k)}$, $\delta_k = \frac{\psi_k - \varphi_k}{2\lambda_k} \in (0, 1)$. Обратимся к задаче о максимуме произведения

$$\prod_{j=1}^{4} R(\mathcal{D}_k^{(j)}, w_k^{(j)}) \tag{6}$$

в семействе всех неналегающих односвязных областей $\mathcal{D}_k^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, на $\overline{\mathbb{C}}$, где $w_k^{(j)} \in \mathcal{D}_k^{(j)}$ ($w_k^{(4)} = \overline{w_k^{(3)}}$). Пусть $\mathcal{D}_k^{(j)^*}$, $j = 1, 2, 3, 4$, – экстремальная система областей этой задачи, $\rho_k^*(w)|dw|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей указанный максимум. Нетрудно убедиться, что метрика $\rho_k(z)|dz|$, заданная на $\overline{\mathbb{C}'} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ условием

$$\rho(z)|dz| = \begin{cases} \rho_k^*(f_k(z))|f'(z)|\,|dz| & \text{при } \ z \in \Delta_k \setminus b_k, \quad k = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{при остальных } z \in \overline{\mathbb{C}'}, \end{cases}$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей максимум произведения (1) в семействе $\mathcal{D}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_k^{(1)}, a_k) R(D_k^{(2)}, b_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|f_k'(a_k) f_k'(a_{k+1})|^{1/2} |f_k'(b_k)|}$$

$$\cdot \left[R(\mathcal{D}_k^{(1)^*}, w_k^{(1)}) R(\mathcal{D}_k^{(2)^*}, w_k^{(2)}) \right]^{1/2} R(\mathcal{D}_k^{(3)^*}, w_k^{(3)}). \qquad (7)$$

Ввиду симметрии областей $\mathcal{D}_k^{(j)^*}$ и равенства

$$|f'(a_k) f'(a_{k+1}|^{1/2} \, |f_k'(b_k)| = \frac{1}{4\lambda_k^2},$$

(7) можем записать в виде

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_k^{(1)}, a_k) R(D_k^{(2)}, b_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} 4\lambda_k^2 \left\{ \prod_{j=1}^{4} R(\mathcal{D}_k^{(j)^*}, w_k^{(j)}) \right\}^{1/2}. \qquad (8)$$

Точки $w_k^{(j)}$ и области $\mathcal{D}_k^{(j)^*}$, $j = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют условиям теоремы 2. В силу этой теоремы, имеем неравенство

$$\prod_{j=1}^{4} R(\mathcal{D}_k^{(j)^*}, w_k^{(j)}) \leqslant 4^{-2} H^{-4} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\rho_k^2}{1 - \rho_k^4} \right), \qquad (9)$$

и равенство в (9) достигается только в случае $\delta_k = 1/2$, т.е. $w_k^{(3)} = i\rho_k$, $w_k^{(4)} = -i\rho_k$. Обозначим экстремальную четверку областей теоремы 1 для точек $1/\rho_k$, $-1/\rho_k$, $i\rho_k$, $-i\rho_k$ через $\mathcal{D}_{k,1}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Из (8) и (9) получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_k^{(1)}, a_k) R(D_k^{(2)}, b_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^2 H^{-2} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\rho_k^2}{1 - \rho_k^4} \right), \quad \rho_k = r^{1/(2\lambda_k)}. \qquad (10)$$

Пусть $z = g_k(w)$ – отображение верхней полуплоскости H на угол Δ_k, обратное к $w = f_k(z)$, и пусть $\mathcal{D}_{k,1}^{(1)^+} = \mathcal{D}_{k,1}^{(1)} \cap H$, $\mathcal{D}_{k,1}^{(2)^+} = \mathcal{D}_{k,1}^{(2)} \cap H$. Равенство в (10) имеет место только в том случае когда $b_k = b_{k,1}$, где точки $b_{k,1}$, $k = 1, \ldots, n$, лежат на биссектрисах углов Δ_k:

$$b_{k,1} = g_k(i\rho_k) = r\, e^{i\pi\psi_{k,1}} = re^{i\pi(\varphi_k + \varphi_{k+1})/2},$$

а областями $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ служат области $D_{k,1}^{(1)}$, $D_{k,1}^{(2)}$, соответствующие областям $\mathcal{D}_{k,1}^{(j)}$ при отображениях $z = g_k(w) : D_{k,1}^{(2)} = g_k(\mathcal{D}_{k,1}^{(3)})$, $D_{k,1}^{(1)} = \operatorname{Int}\{g_k(\overline{\mathcal{D}_{k,1}^{(1)+}}) \cap g_{k-1}(\overline{\mathcal{D}_{k,1}^{(1)+}})\}$ (через $\overline{D}$ обозначается замыкание области D).

Обозначим максимум произведения (1) для системы точек a_k, b_k через $\mathcal{M}(\{a_k\},\{b_k\})$ и пусть

$$\mathcal{F}(\{\lambda_k\}) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^2 H^{-2}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\rho_k^2}{1-\rho_k^4}\right), \quad \text{где} \quad \rho_k = r^{1(2\lambda_k)}.$$

Поскольку области $D_{k,1}^{(1)}$ и $D_{k,1}^{(2)}$ образуют допустимую систему областей задачи о $\mathcal{M}(\{a_k\},\{b_{k,1}\})$, то в силу (10) имеем неравенства

$$\mathcal{M}(\{a_k\},\{b_k\}) \leqslant \mathcal{F}(\{\lambda_k\}) \leqslant \mathcal{M}(\{a_k\},\{b_{k,1}\}).$$

Если $\lambda_k = \frac{1}{n}$ при всех $k = 1,\dots,n$, то $\varphi_k = \varphi_1 + 2\pi k/n$ и $\psi_{k,1} = \varphi_1 + (2k+1)\pi/n$ при всех k, где $\psi_{k,1} = \arg b_{k,1}$, следовательно, точки a_k, $b_{k,1}$ образуют правильную систему.

Если среди λ_k имеются различные числа, то продолжим начатый процесс. Именно, пусть $\Delta_{k,1}$ – угол, ограниченный лучами, проходящими через точки $b_{k,1}$ и $b_{k+1,1}$:

$$\Delta_{k,1} = \{\, z : \pi\psi_{k,1} < \arg z < \pi\psi_{k+1,1} \,\}, \quad a_{k+1} \in \Delta_{k,1},$$

и пусть

$$2\lambda_{k,1} = \psi_{k+1,1} - \psi_{k,1} = \lambda_{k+1} + \lambda_k.$$

При отображении

$$w = f_{k,1}(z) = \left(ze^{-\pi\psi_{k,1}}\right)^{1/(2\lambda_{k,1})}$$

углу $\Delta_{k,1}$ соответствует верхняя полуплоскость, а точкам $b_{k,1}$, $b_{k+1,1}$ и a_{k+1} – точки $w_{k,1}^{(1)} = \rho_{k,1}$, $w_{k,1}^{(2)} = -\rho_{k,1}$ и $w_{k,1}^{(3)} = 1/\rho_{k,1}e^{i\pi\delta_{k,1}}$, где $\rho_{k,1} = r^{1/(2\lambda_{k,1})}$, $\delta_{k,1} = \frac{\lambda_k}{2\lambda_{k,1}} \in (0,1)$. Обратимся вновь к задаче о максимуме произведения конформных радиусов в семействе всех четверок неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}$, содержащих соответственно точки $w_{k,1}^{(1)}$, $w_{k,1}^{(2)}$, $w_{k,1}^{(3)}$ и $w_{k,1}^{(4)} = \overline{w_{k,1}^{(3)}}$. Обозначая через $\mathcal{D}_{k,1}^{(j)*}$, $j = 1,\dots,4$, экстремальную четверку областей этой задачи и используя экстремально-метрические соображения так же, как они использовались ранее, получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_{k,1}^{(1)}, a_k) R(D_{k,1}^{(2)}, b_{k,1}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} 4\lambda_{k,1}^{2} \left\{ \prod_{j=1}^{4} R(\mathcal{D}_{k,1}^{(j)^*}, w_{k,1}^{(j)}) \right\}^{1/2}. \quad (11)$$

Здесь $D_{k,1}^{(1)}$, $D_{k,1}^{(2)}$ – экстремальная система областей для системы точек a_k, $b_{k,1}$. В силу теоремы 2, для точек $w_{k,1}^{(j)}$, где $\delta_{k,1}$ – любое, $\delta_{k,1} \in (0,1)$, справедливо неравенство

$$\prod_{j=1}^{4} R(\mathcal{D}_{k,1}^{(j)^*}, w_{k,1}^{(j)}) \leqslant 4^{-2} H^{-4} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\rho_{k,1}^{2}}{1-\rho_{k,1}^{4}} \right), \quad \rho_{k,1} = r^{1/(2\lambda_{k,1})}, \quad (12)$$

и равенство в (12) достигается только в случае $\delta_{k,1} = 1/2$, т.е. только для четверки точек $\rho_{k,1}$, $-\rho_{k,1}$, $i/\rho_{k,1}$, $-i/\rho_{k,1}$. Из (11) и (12) получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_{k,1}^{(1)}, a_k) R(D_{k,1}^{(2)}, b_{k,1}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k,1}^{2} H^{-4} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\rho_{k,1}^{2}}{1-\rho_{k,1}^{4}} \right) \quad (13)$$

и ясно, что равенство в (13) достигается только для систем точек $a_{k,1}$, $b_{k,1}$, где точки $a_{k,1}$ лежат на биссектрисах углов $\Delta_{k,1}$. Таким образом, на 2-ом шаге получаем неравенства

$$\mathcal{M}(\{a_k\}, \{b_{k,1}\}) \leqslant \mathcal{F}(\{\lambda_{k,1}\}) \leqslant \mathcal{M}(\{a_{k,1}\}, \{b_{k,1}\}).$$

Продолжая процесс, на m-ом шаге приходим к неравенствам

$$\mathcal{M}(\{a_{k,\nu}\}, \{b_{k,\mu}\}) \leqslant \mathcal{F}(\{\lambda_{k,m-1}\}) \leqslant \mathcal{M}(\{a_{k,\nu'}\}, \{b_{k,\mu'}\}),$$

где $\nu = \mu = \nu' = l-1$, $\mu' = l$, если $m = 2l-1$, $\nu = l-1$, $\mu = \nu' = \mu' = l$, если $m = 2l$,

$$2\lambda_{k,m} = \lambda_{k,m-1} + \lambda_{k-1,m-1}, \quad \text{если } m \text{ четное },$$
$$2\lambda_{k,m} = \lambda_{k+1,m-1} + \lambda_{k,m-1}, \quad \text{если } m \text{ нечетное },$$

Итак, если исходная система точек a_k, b_k не является правильной, то на каждом шаге описанного процесса мы получаем систему точек $a_{k,\nu}$, $b_{k,\mu}$ с бóльшим значением максимума произведения (1). Если процесс заканчивается через конечное число шагов, то мы приходим к правильной системе чередующихся точек $a_{k,\nu}$, $b_{k,\mu}$. Если же процесс неограниченно продолжается, то приведенные рекуррентные соотношения для $\lambda_{k,m}$ показывают, что при $m \to \infty$ $\lambda_{k,m} \to 1/n$, при этом точки $a_{k,\nu}$, $b_{k,\mu}$ стремятся к правильному распределению. Этим теорема 1 доказана.

Замечание 1. В случае $r = 1$ теорема 1 сводится к утверждению, что для произвольных точек $c_1, \dots, c_m$ на окружности $|z| = 1$ в случае четного m справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{m} R(D_k, c_k) \leqslant \left(\frac{4}{m}\right)^m \tag{14}$$

с указанием всех случаев равенства в (14). Этот результат известен: в случае любого $m \geqslant 3$ это утверждение представляет собой известную теорему В. Н. Дубинина [4].

§2. Задача о максимуме произведения конформных радиусов трех областей в круге

1. Из известного результата М. А. Лаврентьева следует, что для любых точек c_1, $c_2 \in U$, где $U = \{z : |z| < 1\}$, и любых неналегающих односвязных областей D_1, $D_2 \subset U$, $c_1 \in D_1$, $c_2 \in D_2$, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{2} R(D_k, c_k) \leqslant \frac{4\rho_0^2(1-\rho_0^2)^2}{(1+\rho_0^2)^2} = 0,3606\dots, \tag{15}$$

где $\rho_0^2 = \sqrt{5} - 2$. Равенство в (15) имеет только в случае, когда $c_1 + c_2 = 0$, $|c_1| = \rho_0$, а области D_1, D_2 – соответствующие полукруги.

Аналогичная задача для трех областей в круге U до настоящего времени оставалась нерешенной.

Теорема 3. *Пусть c_1, c_2, c_3 – любые точки круга U. В семействе всех троек неналегающих односвязных областей D_k в круге U, $c_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$, имеет место точное неравенство*

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{r_0^3(1-r_0^3)^3}{(1+r_0^3)^3} = 0,1440\dots, \tag{16}$$

где $r_0^3 = \sqrt{10} - 3$. Равенство в (16) реализуется только в том случае, когда точки c_k являются концами трех отрезков длины r_0, выходящих из начала под равными углами друг к другу, а областями

D_k служат круговые секторы раствора $2\pi/3$, содержащие точки c_k на своих биссектрисах.

При доказательстве теоремы 3 используется следующее простое утверждение.

Лемма. *Экстремальная тройка точек c_1, c_2, c_3 рассматриваемой задачи удовлетворяет условию*

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть c_1, c_2, c_3 и D_1, D_2, D_3 – экстремальные система точек и система областей. Пусть при дробно-линейном отображении $f(z) = (z+a)/(1+\overline{a}z)$ круга U в себя точки c_k и области D_k переходят в точки c_k' и области D_k'. Имеем

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k', c_k') = \prod_{k=1}^{3} |f'(c_k)| R(D_k, c_k) \leqslant \prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k).$$

Так как

$$\prod_{k=1}^{3} |f'(c_k)| = \prod_{k=1}^{3} \frac{|1-a^2|}{|1+\overline{a}c_k|^2} = 1 - 2\operatorname{Re}\{\overline{a}(c_1+c_2+c_3)\} + O(a^2),$$

и $\arg a$ можно выбрать произвольно, то справедливо равенство (17).

2. Доказательство теоремы 3. Остановимся лишь на основных моментах доказательства. Пусть c_1, c_2, c_3 – система точек и D_1, D_2, D_3, $c_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$, – система областей, для которых достигается максимум произведения

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) \tag{18}$$

в расматриваемом семействе.

Прежде всего покажем, что c_1, c_2, c_3 не могут лежать на одном диаметре. Действительно, пусть все точки c_k лежат на интервале $(-1, 1)$. В силу условия (17) можем считать, что

$$c_1 = r_1, \quad c_2 = -r_2, \quad c_3 = -r_3, \quad r_k \geqslant 0, \quad r_1 = r_2 + r_3, \quad r_2 < r_3. \tag{19}$$

При отображении

$$w = f(z) = -\frac{z+i}{z-i}$$

точкам c_k соответствуют точки w_k правой полуокружности $|w| = 1$, $\operatorname{Re} w > 0$, а точкам c'_k, симметричным с c_k относительно окружности $|z| = 1$, соответствуют точки w'_k, симметричные с w_k относительно мнимой w-оси. По теореме В. Н. Дубинина [4] для конформных радиусов f-образов областей D_k и D'_k, где D'_k-область, симметричная с D_k относительно окружности $|z| = 1$, имеем

$$\prod_{k=1}^{3} R(f(D_k), w_k) R(f(D'_k), w'_k) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6 \tag{20}$$

и ясно, что равенство в (20) достигается только в случае симметрии областей $f(D_k)$ и $f(D'_k)$ относительно мнимой оси. Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{3} R(f(D_k), w_k) = \prod_{k=1}^{3} R(D_k, w_k)|f'(c_k)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

откуда

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{8} \prod_{k=1}^{3} (1 + r_k^2). \tag{21}$$

Используя (19), находим

$$\prod_{k=1}^{3} (1 + r_k^2) = (1 + r_1^2)(1 + r_2^2 + r_3^2 + r_2^2 r_3^2)$$

$$= (1 + r_1^2)(1 + r_1^2 - 2r_2 r_3 + r_2^2 r_3^2) \leqslant (1 + r_1^2)^2.$$

При $r_1^2 \leqslant 0,9$ из (21) теперь получаем

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3,61 < 0,1440.$$

Пусть теперь $r_1^2 > 0,9$. Рассматривая отображения $f_k(z) = (z - c_k)/(1 - c_k z)$, очевидно, имеем

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) < \prod_{k=1}^{3} R(U, c_k) = \prod_{k=1}^{3} |f'_k(c_k)|^{-1}$$

$$= \prod_{k=1}^{3}(1 - r_k^2) < 1 - r_1^2 < 0,1440.$$

Следовательно, точки c_k не лежат на одном диаметре. Очевидно также, что $c_k \neq 0$ при $k = 1, 2, 3$.

Итак, в силу леммы §2.1 достаточно считать, что

$$c_1 = r_1, \quad c_2 = r_2 e^{i\lambda_1\pi}, \quad c_3 = r_3 e^{i(\lambda_1+\lambda_2)\pi} = r_3 e^{-i\lambda_3\pi},$$

где $0 < r_k < 1$, $0 < \lambda_k < 1$ при $k = 1, 2, 3$, и выполняются условия

$$\begin{gathered} r_1 + r_2 \cos \pi\lambda_1 + r_3 \cos \pi\lambda_3 = 0, \\ r_2 \sin \pi\lambda_2 = r_3 \sin \pi\lambda_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2. \end{gathered} \tag{22}$$

Пусть Δ_k, $k = 1, 2, 3$, – сектор круга U раствора $\pi\lambda_k$, граничные радиусы которого содержат точки c_k и c_{k+1} ($c_4 = c_1$), Δ'_k – область, симметричная с Δ_k относительно окружности $|z| = 1$. Пусть

$$f_1(z) = z^{1/\lambda_1}, \quad f_2(z) = (e^{-i\lambda_1\pi} z)^{1/\lambda_2}, \quad f_3(z) = (e^{i\lambda_3\pi} z)^{1/\lambda_3}$$

– отображения соответствующих углов на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. При отображении $f_k(z)$ сектору Δ_k соответствует верхний полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$, а точкам c_k и c_{k+1} – точки $w_{k,1} = \rho_{k,1}$ и $w_{k,2} = -\rho_{k,2}$, где

$$\rho_{k,1} = r_k^{1/\lambda_k}, \quad \rho_{k,2} = r_{k+1}^{1/\lambda_k}.$$

Рассмотрим задачу о максимуме произведения

$$\prod_{j=1}^{2} R(\mathcal{D}_{k,j}, w_{k,j}) R(\mathcal{D}'_{k,j}, 1/w_{k,j})$$

в семействе всех систем $\mathcal{D}_{k,1}$, $\mathcal{D}_{k,2}$, $\mathcal{D}'_{k,1}$, $\mathcal{D}'_{k,2}$ неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}$, где $w_{k,j} \in \mathcal{D}_{k,j}$, $1/w_{k,j} \in \mathcal{D}'_{k,j}$, $j = 1, 2$. Пусть $\mathcal{D}^*_{k,1}$, $\mathcal{D}^*_{k,2}$, $\mathcal{D}'^*_{k,1}$, $\mathcal{D}'^*_{k,1}$ – экстремальная система областей этой задачи и пусть $\rho^*_k(w)|dw|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей указанный максимум. Тогда метрика $\rho(z)|dz|$, заданная в области $U \setminus \{c_1, c_2, c_3\}$ условием

$$\rho(z)|dz| = \begin{cases} \rho^*_k(f_k(z))|f'_k(z)|\,|dz| & \text{при } z \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{при остальных } z \in U \setminus \{c_1, c_2, c_3\}, \end{cases}$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей максимум произведения (18) в рассматриваемом семействе систем областей.

Как нетрудно убедиться, имеет место равенство

$$\prod_{j=1}^{2} R(\mathcal{D}^*_{k,j}, w_{k,j}) R(\mathcal{D}'^*_{k,j}, 1/w_{k,j})$$

$$= \frac{(\rho_{k,1}+\rho_{k,2})^4[(1-\rho^2_{k,1})(1-\rho^2_{k,2})]^2}{\rho^2_{k,1}\rho^2_{k,2}(1+\rho_{k,1}\rho_{k,2})^4}, \quad k=1,2,3. \tag{23}$$

Так как область $\mathcal{D}'^*_{k,j}$ симметрична с $\mathcal{D}^*_{k,j}$ относительно окружности $|w|=1$, то $R(\mathcal{D}'^*_{k,j}, 1/w_{k,j}) = 1/\rho^2_{k,j} R(\mathcal{D}^*_{k,j}, w_{k,j})$ и из (22) получаем

$$\mathcal{F}_k := \prod_{j=1}^{2} R(\mathcal{D}^*_{k,j}, w_{k,j})$$

$$= \frac{(\rho_{k,1}+\rho_{k,2})^2(1-\rho^2_{k,1})(1-\rho^2_{k,2})}{(1+\rho_{k,1}\rho_{k,2})^2}, \quad k=1,2,3. \tag{24}$$

В силу указанных выше экстремально-метрических соображений имеем неравенство

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) \leqslant \prod_{k=1}^{3} |f'_k(c_k)\, f'_k(c_{k+1})|^{-1/2} \mathcal{F}_k^{1/2},$$

следовательно,

$$\prod_{k=1}^{3} R(D_k, c_k) \leqslant \mathcal{F},$$

где

$$\mathcal{F} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 r_1^{1-\frac{1}{2}(1/\lambda_1+1/\lambda_3)}$$

$$\cdot r_2^{1-\frac{1}{2}(1/\lambda_2+1/\lambda_1)}\, r_3^{1-\frac{1}{2}(1/\lambda_3+1/\lambda_2)} [\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3]^{1/2}, \tag{25}$$

$\mathcal{F}_k$, $k=1,2,3$, определяются равенствами (24).

Таким образом, доказательство теоремы 3 свелось к исследованию функции $\mathcal{F}$ при условиях (22) и к доказательству, что наибольшее значение этой функции при указанных условиях достигается в случае

$$\lambda_k = 2\pi/3, \quad r_k = \left[\sqrt{10}-3\right]^{1/3} \quad \text{при} \quad k=1,2,3.$$

Эта часть доказательства не представляет принципиальных затруднений, но связана с громоздкими выкладками. Мы предполагаем опубликовать полное доказательство в серии "Препринты ПОМИ"*)

Литература

1. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.
2. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 72–95.
3. А. Ю. Солынин, *Решение одной изопериметрической задачи Полиа–Сеге,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 140–153.
4. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.
5. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
6. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. МИАН **139** (1980), 1–240.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 5 ноября 1998 г.

*)После окончания работы над статьей автор получил препринт Е. В. Костюченко "Задача об экстремальном разбиении круга на три неналегающие области", Владивосток, 1998 (Препринт ДВО РАН. Институт прикладной математики; No. 18). В этом препринте кратко излагаются основные моменты доказательства теоремы 3. Доказательство, предложенное Е. В. Костюченко, основывается на принципиально других соображениях и использует вычисления на ЭВМ.