Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

С. Е. Козлов

СВЯЗНОСТИ ЛЕВИ–ЧИВИТА НА ВЫРОЖДЕННЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Введение. В физике при построении теорий объединенных взаимодействий, включающих гравитацию, использовались модели более чем четырехмерных гладких многообразий M^n ($n > 4$), снабженных некоторыми дополнительными структурами. При этом на таких многообразиях возникали слоения со слоями, изометричными четырехмерному пространству Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$ (см. [1]). Одна из первых попыток построения пятимерной теории, объединяющей ОТО Эйнштейна и теорию электромагнетизма принадлежит (Калуца [2], 1921). Ряд авторов, в частности, Р.И.Пименов [3], использовали математическую структуру, получившую название *полуримановой геометрии*. В наиболее полной работе [3] для такой структуры дано аксиоматическое определение, предполагающее выполнение семи аксиом ([3], 3, §1). Помимо того, что сами по себе эти аксиомы достаточно сложны, их формулировки включают названия объектов, в свою очередь определяемых аксиоматически. Обзор работ по полуримановой геометрии можно найти в [3], 3, §2.

На гладком многообразии M рассмотрим вырожденное скалярное произведение g постоянной сигнатуры. Под вырожденностью понимается, что

$$T_x^{\perp} M := \mathrm{rad}\, T_x M = \{X \in T_x M \,|\, g(X,Y) = 0,\ \forall Y \in T_x M\} \neq 0. \quad (1)$$

Пусть сигнатура формы g есть $(0\cdots0;+\cdots+;-\cdots-)$, где количество нулей равно $p \in [1,n)$, количество плюсов q_+, количество минусов q_-, $q = q_+ + q_-$, $p + q = n = \dim M$. Такое многообразие естественно назвать *вырожденным псевдоримановым многообразием*. На касательном пространстве $T_x M$ такого многообразия индуцирована структура (см. п.1.2), близкая к структуре полуевклидова пространства (см. [3], с.44), возникающей на касательных пространствах, полуримановых многообразий.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00431.

Если $q_+ = 1$, $q_- \geqslant 1$, то в терминологии работы [4], касательное пространство T_xM наделяется отношением причинности метрической линейной кинематики (см. п.1.4.), как и в случае псевдориманова многообразия типа $(+ - --)$ общей теории относительности.

В настоящей заметке сформулированы необходимые и достаточные условия существования связности Леви–Чивита на многообразиях с вырожденной метрикой. В случае выполнения этих условий полностью описано семейство таких связностей и доказаны некоторые их свойства.

1.1. Для удобства читателя напомним определение полуевклидова пространства. Пусть в векторном пространстве E^n выделено подпространство $E^p \subset E^n$, $p \in [1, n)$, и в факторпространстве $\overline{E}^{n-p} = E^n/E^p$ задана невырожденная, симметричная, билинейная форма $\overline{g} : \overline{E}^{n-p} \times \overline{E}^{n-p} \to \mathbb{R}$, а в слое E^p задана аналогичная форма $g_0 : E^p \times E^p \to \mathbb{R}$. Тогда структура $((E^n, E^p), (\overline{g}, g_0))$ называется полуевклидовым пространством.

1.2. Пусть M^n есть вырожденное псевдориманово пространство типа (p, q) и $x \in M^n$. Форма g индуцирует в пространстве

$$\overline{T}_xM := T_xM/T_x^\perp M \tag{2}$$

невырожденное скалярное произведение $\overline{g}$ ([5], 3, 2.7). При этом для элементов $\overline{X} = X + T_x^\perp M$, $\overline{Y} = Y + T_x^\perp M$, $X, Y \in T_xM$ факторпространства $\overline{T}_xM$

$$\overline{g}(\overline{X}, \overline{Y}) = \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle := \langle X, Y \rangle. \tag{3}$$

Пространство T_xM канонически изометрично прямой ортогональной сумме ([5], 3, 2.6, 3, 2.7)

$$T_xM = \overline{T}_xM \oplus T_x^\perp M. \tag{4}$$

Таким образом, на пространстве T_xM возникает структура $\big((T_xM, T_x^\perp M), (\overline{g}, 0)\big)$ несколько более простая, чем структура полуевклидова пространства, определенная в 1.1.

1.3. Множество $\overline{T}M^n := \{(x, \overline{X}) | x \in M^n,\ \overline{X} \in \overline{T}_xM^n\}$ естественным способом наделяется структурой $(2n - p)$-мерного гладкого многообразия (см. п.2.1.). Определим отображение $\overline{p} : (x, \overline{X}) \mapsto x$. Тогда тройка

$$\xi(M) := (\overline{T}M^n, \overline{p}, M^n) \tag{5}$$

является $(n-p)$-мерным, локально–тривиальным, векторным расслоением над M^n. Действительно, для любой координатной окрестности (U,φ) на M^n диффеоморфизм $h : U \times \mathbb{R}^k \to \overline{p}^{-1}(U)$, $h(x,a) = a^i\overline{\partial}_i(x)$ является изоморфизмом на $x \times \mathbb{R}^k$.

Так как на каждом слое $\overline{p}^{-1}(x)$ задана метрика $\overline{g}$, то расслоение $\xi(M)$ является *псевдоримановым векторным расслоением* над многобразием M^n.

1.4. Пусть многообразие M имеет тип $(p,1,q_-)$, $q_- \geqslant 1$. Для точки $x \in M$ определим линейное отображение проекции $\operatorname{Pr} : T_xM \to \overline{T}_xM$, $\operatorname{Pr} X = \overline{X}$ касательного пространства на свое факторпространство. Для выбранной сигнатуры метрики g пространство $\overline{T}_xM$ является многомерным пространством Минковского с метрикой $\overline{g}$. Тогда по метрике $\overline{g}$ строится псевдонорма $\overline{f}$ (см. [4], 5.6.4), превращающая $\overline{T}_xM$ в метрическую линейную кинематику. Так как $g(X,Y) = \overline{g}(\overline{X},\overline{Y})$, то, полагая по определению $f(X) := \overline{f}(\overline{X})$, мы получаем псевдонорму на T_xM, которая индуцирует в этом пространстве структуру метрической линейной кинематики.

2.1. Слоение $T^\perp M$ на многообразии M. Далее везде будем рассматривать вырожденное псевдориманово многообразие M типа (p,q).

Предложение. *p-мерное распределение $x \mapsto T_x^\perp M$ на многообразии M является гладким.*

Доказательство. В окрестности точки $x_0 \in M$ введем такую систему координат $\{x^i\}$, что $\partial_\alpha(x_0) \in T_{x_0}M$, $\alpha \in [1,p]$. Построим функции $a^i_\alpha(x)$, $i \in [p+1,n]$ так, чтобы вектора $X_\alpha = \partial_\alpha + a^i_\alpha\partial_i \in T_x^\perp M$. Для этого необходимо

$$\langle \partial_\alpha + a^i_\alpha\partial_i, \partial_j\rangle = 0 \Longleftrightarrow g_{\alpha j} + a^i_\alpha g_{ij} = 0. \tag{6}$$

Так как $\det(g_{ij}(x_0)) \neq 0$ и $a^i_\alpha(x_0) = 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 условие (6) однозначно определяет наборы гладких функций $a^i_\alpha(x)$ и p линейно независимых векторов $X_\alpha(x)$. При этом $\operatorname{Lin}\{X_\alpha(x)\} \supset T_x^\perp M$, поэтому $\operatorname{Lin}\{X_\alpha(x)\} = T_x^\perp M$ и распределение $x \mapsto T_x^\perp M$ гладкое. $\square$

Следствие. *Множество $\overline{T}M$ является гладким многообразием, а структура $\xi(M)$ гладким расслоением над M.*

2.2. Условие цикличности. Будем говорить, что многообразие M типа (p,q) удовлетворяет *условию цикличности*, если для любого векторного поля $x \mapsto V_x \in T_x^{\perp}M$ производная Ли тензорного поля g

$$\mathcal{L}_V g = 0. \tag{7}$$

Предложение. *Пусть на многообразии M существует связность Леви–Чивита ∇. Тогда M удовлетворяет условию цикличности.*

Доказательство. Для производной Ли справедливы формулы (см., напр., [6]): $\mathcal{L}_V f = Vf$, где f – функция на M; для векторных полей X, Y и тензорного поля g типа $(0,2)$

$$\mathcal{L}_V X = [V,X],\ (\mathcal{L}_V g)(X,Y) = Vg(X,Y) - g(\mathcal{L}_V X, Y) - g(X, \mathcal{L}_V Y).$$

Используя эти формулы, тождество Риччи и равенство нулю тензора кручения связности ∇, находим

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}_V g)(X,Y) = V\langle X,Y\rangle - \langle [V,X],Y\rangle - \langle x,[V,Y]\rangle = \\ = \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle - \langle \nabla_V X - \nabla_X V, Y\rangle - \\ -\langle X, \nabla_V Y - \nabla_Y V\rangle = X\langle V,Y\rangle - \\ -\langle V, \nabla_X Y\rangle + Y\langle X,V\rangle - \langle V, \nabla_Y X\rangle = 0.\end{gathered}$$

Последнее равенство имеет место в силу принадлежности поля V к распределению $T^{\perp}M$. □

2.3. Пусть на многообразии M выполнено условие цикличности. Тогда для поля V вдоль распределения $T^{\perp}M$ и произвольных векторных полей X, Y справедливо

$$V\langle X,Y\rangle = \langle [V,X],Y\rangle + \langle X,[V,Y]\rangle. \tag{8}$$

Пусть поле X принадлежит распределению $T^{\perp}M$. Тогда из (8) следует, что $[V,X]_x \in T_x^{\perp}M$, то есть распределение $T^{\perp}M$ инволютивно. Значит по теореме Фробениуса это распределение интегрируемо. Поэтому в окрестности каждой точки $x_0 \in M$ можно ввести такие координаты $\{x^i\}$, что $\partial_\alpha(x) \in T_x^{\perp}M$

$$g_{\alpha a} = 0,\ \ \alpha \in [1,p],\ a \in [1,n],\ \det(g_{ij}) \neq 0, i,j \in [p+1,n]. \tag{9}$$

Так как скобка Ли для координатных векторных полей обращается в ноль, то из (8) следует

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{10}$$

Предложение. *Пусть на многообразии M типа (p,q) выполнено условие цикличности. Тогда для каждой точки $x \in M$ найдется ее открытая окрестность $U \ni x$, в которой существует связность Леви–Чивита ∇_U.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность U, в которой выполнены равенства (9), (10). Положим, по определению, $\Gamma^c_{ab} = 0$, если хотя бы один из индексов a, b, c не превосходит p и

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) g^{mk}, \quad i,j,k,m \in [p+1, n]. \qquad (11)$$

Построенная связность симметрична, а проверка справедливости тождества Риччи ничем не отличается от риманова случая. □

Заметим, что можно произвести такой выбор окрестности U, при котором эта окрестность изометрически диффеоморфна произведению $M^q_{q_+,q_-} \times \widetilde{M}^p$

$$U = M^q_{q_+,q_-} \times \widetilde{M}^p \quad \text{(отождествление).}$$

При этом

$$\nabla_U = \nabla_M \times \nabla_{\widetilde{M}}, \qquad (12)$$

где ∇_M есть единственная связность Леви–Чивита на псевдоримановом многообразии $M^q_{q_+,q_-}$, а связность $\nabla_{\widetilde{M}}$ – тривиальная связность на параллелезуемом многообразии $\widetilde{M}^p$.

2.4. Теорема. *Для существования связности Леви–Чивита на вырожденном псевдоримановом многообразии M необходимо и достаточно, чтобы это многообразие удовлетворяло условию цикличности.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 2.2. Пусть выполнено условие (7). Рассмотрим не более чем счетное, локально конечное покрытие $\{U\}$ многообразия M, на каждом элементе которого U определена связность Леви–Чивита ∇_U. Пусть $\{\varphi_U\}$ – подчиненное этому покрытию разложение единицы. Определим связность

$$\nabla := \sum_U \varphi_U \nabla_U. \qquad (13)$$

Симметричность связности ∇ и тождество Риччи проверяются элеменртарно. □

3.1. Пусть ∇^1 и ∇^2 – две связности Леви–Чивита на многообразии M. В точке $x \in M$ определим билинейную форму $\omega_x : (X,Y) \mapsto \omega_x(X,Y) \in T_x^\perp M$:

$$\omega_x(X,Y) := \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, \tag{14}$$

где $X \in T_x M$, а Y есть векторное поле на M.

Из формулы Кошуля следует, что

$$\omega_x(X,Y) \in T_x^\perp M. \tag{15}$$

Из определения связности Леви–Чивита непосредственно вытекают свойства формы ω_x:

1) билинейность по обоим аргументам;

2) симметричность; (16)

3) для любой функции f на M справедливо

$$\omega_x((fX)_x, Y_x) = \omega(X_x, (fY)_x) = f(x)\omega_x(X_x, Y_x).$$

Свойства (16) позволяют определить симметричное тензорное поле $\omega : x \mapsto \omega_x$ со значениями формы ω_x в $T_x^\perp M$.

3.2. Пусть ∇ связность Леви–Чивита, а ω тензорное поле на M, удовлетворяющее требованиям (16). Тогда, как легко проверить, операция

$$\tilde{\nabla}_X Y = \omega(X,Y) + \nabla_X Y$$

является связностью Леви–Чивита на M. Таким образом, множество $\nabla(M)$ связностей Леви–Чивита на M может быть “параметризовано” тензорными полями ω.

4.1. Связность на расслоении $\xi(M)$. Обозначим через $B(M)$ множество сечений касательного расслоения TM (множество векторных полей на M), а через $S(M)$ –множество сечений расслоения $\xi(M)$. Пусть $X \in B(M)$, $\overline{Y} \in S(M)$. Локально сечение $\overline{Y}$ можно представить в виде $\overline{Y}_x = Y_x + T_x^\perp M$, где $Y \in B(M)$. Определим операцию $\overline{\nabla} : B(M) \times S(M) \to S(M)$

$$\overline{\nabla}(X, \overline{Y}) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} := (\overline{\nabla_x Y}), \tag{17}$$

где $\nabla \in \nabla(M)$.

Предложение. *Операция $\overline{\nabla}$ определена корректно, то есть не зависит от выбора поля Y и связности $\nabla \in \nabla(M)$.*

Доказательство. Пусть для некоторого $\widetilde{Y} \in B(M)$ $\overline{Y}_x = \widetilde{Y}_x + T_x^{\perp}M$. Тогда $(\widetilde{Y} - Y)_x \in T_x^{\perp}M$. Используя формулу Кошуля и условие цикличности, находим, что для любого $Z \in B(M)$

$$\langle \nabla_X \widetilde{Y} - \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \nabla_X(\widetilde{Y} - Y), X\rangle = (\widetilde{Y} - Y)\langle Z, X\rangle -$$

$$-\langle X, [(\widetilde{Y} - Y), Z]\rangle - \langle Z, [\widetilde{Y} - Y, X]\rangle = (\mathcal{L}_{(\widetilde{Y}-Y)}g)(X, Z) = 0.$$

Тем самым $(\nabla_X \widetilde{Y} - \nabla_X Y)_x \in T_x^{\perp}M$ и $(\overline{\nabla_X \widetilde{Y}}) = (\overline{\nabla_X Y})$.

Пусть $\nabla^1 \in \nabla(M)$. Тогда $(\nabla_X^1 Y - \nabla_X Y)_x = (\omega(X,Y))_x \in T_x^{\perp}M$ и $(\overline{\nabla_X^1 Y}) = (\overline{\nabla_X Y})$. $\square$

4.2. Теорема. *Операция $\overline{\nabla}$ является связностью на псевдоримановом векторном расслоении $\xi(M)$, сохраняющей скалярное произведение в слоях. Иными словами, выполнены следующие свойства операции $\overline{\nabla}$:*

1) *$\mathbb{R}$-линейность по каждому из аргументов из $B(M)$ и $S(M)$.*

2) *Для гладкой функции f на M и сечений $X \in B(M)$, $\overline{Y} \in S(M)$ выполнено тождество Лейбница*

$$\overline{\nabla}_X(f\overline{Y}) = X(f)\overline{Y} + f\overline{\nabla}_X\overline{Y}.$$

3) *Для $X \in B(M)$, $\nabla\overline{Z} \in S(M)$. Справедливо тождество Риччи*

$$X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle = \langle \overline{\nabla}_X, \overline{Z}\rangle + \langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_X\overline{Z}\rangle.$$

Доказательство. Свойства 1), 2) сразу следуют из свойств связности $\nabla \in \nabla(M)$ и линейности оператора $\mathrm{Pr} : X \mapsto \overline{X}$. Докажем 3).

$$X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle = X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = \langle \overline{\nabla_X Y}, \overline{Z}\rangle +$$

$$+\langle \overline{Y}, \overline{\nabla_X Y}\rangle = \langle \overline{\nabla}_X\overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_X\overline{Z}\rangle. \quad \square$$

Литература

1. T. Isse, *Unification of gravity, gange and Higgs fields by confined quantum fields.* Progr. Theor. Phys. Suppl. **114** (1993), 109.
2. Th. I. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik.* Sitzungsber. Press. Ak. (1921), 966.

3. Р. И. Пименов, *Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени).* Зап. научн. семин. ЛОМИ **6** (1968), 1–496.
4. В. Р. Крым, *Линейные пространства кинематического типа.* Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 152–173.
5. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* М., Наука, 1969.
6. С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии.* М., Мир, 1970.

Kozlov S. E. Levi–Chivita connections on degenerate psedu-Riemannian manifolds.

Smooth manifolds with bilinear symmetric degenerate form with constant signature in every tangent space are studied . Such manifolds are used in physics for constructing theories of united interactions including gravitation. Necessary and sufficient conditions for existence of a Levi–Chivita connection on such a manifold are established.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 12 декабря 1997 г.