Г. А. Серегин

ОБ АТТРАКТОРАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Посвящается
Ольге Александровне Ладыженской

§1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t v + (\nabla v)v - \operatorname{div}\sigma = \nabla p - g,\\ &\operatorname{div} v = 0, \quad \sigma = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)),\\ &\varepsilon(v) = \text{симметричная часть } \nabla v \end{aligned}\right\} \text{ в } Q_T \tag{1.1$_1$}$$

$$v\big|_{t=0} = a \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.1$_2$}$$

$$\left.\begin{aligned} &v\big|_{x_k=-1} = v\big|_{x_k=1}, \quad \nabla v\big|_{x_k=-1} = \nabla v\big|_{x_k=1},\\ &p\big|_{x_k=-1} = p\big|_{x_k=1}, \quad k=1,2. \end{aligned}\right\} \tag{1.1$_3$}$$

Здесь $Q_T \equiv \Omega \times I$, $I =]0,T[$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_k| < 1, k = 1,2\}$, T – положительный параметр, $v : Q_T \to \mathbb{R}^2$ – поле скоростей, $p : Q_T \to \mathbb{R}$ – давление, $a : \Omega \to \mathbb{R}^2$ – начальное поле скоростей, $g : Q_T \to \mathbb{R}^2$ – поле внешних сил, $D : \mathbb{M} \to \mathbb{R}_+$ – диссипативный потенциал, $\mathbb{M}$ – пространство симметричных 2×2 матриц.

Принимая соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам, изменяющимся от 1 до 2, введем следующие обозначения

$$a \cdot b = a_i b_i, \quad |a| = \sqrt{a \cdot a}, \quad a, b \in \mathbb{R}^2,$$
$$\varepsilon : \sigma = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}, \quad |\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon : \varepsilon}, \quad \varepsilon, \sigma \in \mathbb{M}.$$

Символом ∂_t будем обозначать частную производную по времени t, а частная производная по переменной x_k будет обозначаться запятой в нижнем индексе, т.е. $f_{,k} \equiv \partial f/\partial x_k$. Тогда для дифференциальных операторов ∇, div и ε, понимаемых в смысле распределений, мы будем иметь следующие представления

$$\nabla p = (p_{,i}), \quad \nabla v = (v_{i,j}), \quad \varepsilon(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}),$$
$$(\nabla v)v = v_k v_{,k} = (v_{i,k} v_k), \quad \operatorname{div} v = v_{i,i}, \quad \operatorname{div}\sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Относительно диссипативного потенциала мы сделаем следующие предложения:

$$D : \mathbb{M} \to \mathbb{R}_+ \text{ -- функция класса } C^2,\ D(0) = 0, \tag{1.2_1}$$
$$D(\varepsilon) \geqslant \nu|\varepsilon|^p, \quad \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{1.2_2}$$
$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon)\varkappa\right) : \varkappa = \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}(\varepsilon)\varkappa_{ij}\varkappa_{km} \geqslant 2\nu \frac{|\varkappa|^2}{(1+|\varepsilon|)^{2-p}}, \tag{1.2_3}$$
$$\left|\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon)\right| \leqslant \nu_1(1+|\varepsilon|)^{p-1}, \quad \nu_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{1.2_4}$$

для всех $\varepsilon, \varkappa \in \mathbb{M}$ и некоторого $1 < p < +\infty$.

Обозначим через $L_p(\omega;\mathbb{R}^k)$ и $W_p^l(\omega;\mathbb{R}^k)$ известные пространства Лебега и Соболева вектор-функций из ω в $\mathbb{R}^2$. Нормы в этих пространствах обозначаются через $\|\cdot\|_{p,\omega}$ и $\|\cdot\|_{p,\omega}^{(l)}$ ($\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^{(l)}$, если $\omega = \Omega$) соответственно. Скалярное произведение в $L_2(\Omega;\mathbb{R}^k)$ обозначается через $(\cdot,\cdot)$.

С начально-краевой задачей (1.1_k), $k = 1, 2, 3$, мы свяжем следующие функциональные пространства:

$\hat{C}^\infty = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) : v(x+2z) = v(x),\ \forall x \in \Omega,\ \forall z \in \mathbb{Z}^2,\ \int\limits_\Omega v\,dx = 0\}$;

$\hat{J}^\infty = \{v \in \hat{C}^\infty : \operatorname{div} v = 0\}$;

H – замыкание $\hat{J}^\infty$ в $L_2(\Omega;\mathbb{R}^2)$;

$\hat{W}_p^l$ – замыкание $\hat{C}^\infty$ в $W_p^l(\Omega;\mathbb{R}^2)$, снабжается нормой $\|v\|_p^{(l)} = \|\nabla^l v\|_p$;

$\hat{J}_p^l$ – замыкание $\hat{J}^\infty$ в $W_p^l(\Omega;\mathbb{R}^2)$, снабжается нормой $\|v\|_p^{(l)} = \|\nabla^l v\|_p$;

$H^l \equiv \hat{J}_2^l$;

$(\hat{J}_p^1)'$ – пространство, двойственное к $\hat{J}_p^1$ относительно H, снабжается нормой $\|v\|_{p',-1}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$;

$L_p(I;X)$ – банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{L_p(I,X)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^T \|v(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in I} \|v(t)\|_X, & p = +\infty, \end{cases}$$

где X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$;

$$C(\bar I;X) = \{t \in \bar I \mapsto u(t) \in X : \text{функция}\, t \mapsto u(t)\, \text{непрерывна на}\, \bar I\},$$

снабжается нормой $\|u\|_{C(\bar I;X)} = \sup\limits_{t\in\bar I} \|u(t)\|_X$;

$L_{r,p}(Q_T;\mathbb{R}^2)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{r,p} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_r^p\,dt\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in I} \|u(t)\|_r, & p = +\infty. \end{cases}$$

В данной работе мы ограничимся случаем

$$1 < p < 2, \tag{1.3}$$

отсылая читателя по поводу случая $p \geqslant 2$ к работам [1-6] (см. также библиографию в них).

Нашим основным результатом является

Теорема 1.1. I. *Пусть выполнены условия* (1.2_k), $k = 1, 2, 3, 4$, (1.3) *и пусть дополнительно*

$$g \in L_{p'}(I;(\hat J_p^1)'), \quad t^{\frac{1}{p}} g \in L_{2r,p'}(Q_T;\mathbb{R}^2) \tag{1.4}$$

для некоторого $r > 1$. *Тогда для любого* $T > 0$ *и любого*

$$a \in H \tag{1.5}$$

существует по крайней мере одна функция v, *обладающая свойствами:*

$$v \in C(\bar I;H) \cap L_p(I;\hat J_p^1), \tag{1.6$_1$}$$

$$t^{\frac{q}{2}} \nabla v \in L_{2,\infty}(Q_T;\mathbb{R}^4), \quad t^{\frac{q_1}{2}} \partial_t v \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^2), \tag{1.6$_2$}$$

где $q = \frac{1}{p-1}$, $q_1 = q\left(\frac{4-p^2}{2p}+1\right)$. *Она удовлетворяет вариационному тождеству*

$$(\partial_t v(t), w) + (\nabla v(t) v(t), w) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w)\right) = (g(t), w), \quad \forall w \in \hat{J}^1_p, \quad (1.7_1)$$

для п.в. $t \in I$ *и начальному условию*

$$v(0) = a. \quad (1.7_2)$$

Более того, справедливы оценки

$$\|v\|^2_{2,\infty} + \frac{\nu}{2}\int_0^T \|\varepsilon(v(t))\|^p_p dt \leqslant \|a\|^2_2 + c_1(p)\left(\frac{1}{\nu}\right)^q \int_0^T \|g(t)\|^{p'}_{p',-1} dt, \quad (1.8_1)$$

$$\|t^{q/2}\nabla v\|_{2,\infty} + \left(\int_{Q_T} t^q \frac{|\nabla\varepsilon(v)|^2}{(1+|\varepsilon(v)|)^{2-p}}\,dx\,dt\right)^{1/2} + \|t^{q/2}\nabla^2 v\|_{p,Q_T} + \|t^{q_1/2}\partial_t v\|_{2,Q_T} \leqslant \Phi_1(T, \|a\|_2, \|g\|_{L_{p'}(I;(\hat{J}^1_p)')}, \|t^{1/p} g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}, \nu_1). \quad (1.8_2)$$

II. 1. *Пусть выполнены условия* (1.2_k), $k = 1, 2, 3, 4$, (1.4), *а также пусть*

$$g \in L_{2r,p'}(Q_T; \mathbb{R}^2), \quad (1.9_1)$$

$$a \in H^1, \quad (1.9_2)$$

$$\frac{3}{2} \leqslant p < 2. \quad (1.9_3)$$

Тогда существует только одна функция v, *удовлетворяющая соотношениям* (1.6_k), $k = 1, 2$, (1.7_i), $i = 1, 2$. *Более того, для нее верна оценка*

$$\|\nabla v\|_{2,\infty} + \left(\int_{Q_T} \frac{|\nabla\varepsilon(v)|^2}{(1+|\varepsilon(v)|)^{2-p}}\,dx\,dt\right)^{1/2} + \|\nabla^2 v\|_{p,Q_T} + \|\nabla^2 v\|_{\frac{4}{4-p},2} + \|\partial_t v\|_{2,Q_T} \leqslant \Phi_2(T, \|\nabla a\|_2, \|g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}, \nu_1) \quad (1.10)$$

2. *Пусть выполнены условия* (1.2_k), $k = 1,2,3,4$, (1.3), (1.4), (1.9_1), (1.9_2). *Тогда существует единственная функция* v, *обладающая свойствами* (1.6_1),

$$\nabla v \in L_{2,\infty}(Q_T;\mathbb{R}^4), \quad \partial_t v \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^2), \tag{1.11}$$

и удовлетворяющая (1.7_i), $i = 1,2$. *Более того, для нее верна оценка* (1.10).

Здесь и всюду в дальнейшем мажоранты Φ_i суть непрерывные функции, возрастающие по каждой переменной.

Задача (1.1_k), $k = 1,2,3$, изучалась в [6] при дополнительных предположениях:

$$g \in L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^2) \text{ и } \left|\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon)\right| \leqslant \frac{\nu_2}{(1+|\varepsilon|)^{2-p}}, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{M}$$

(см. [6, Гл. 5, условия (3.3) и (1.9) соответствено]). Там было доказано существование слабого решения (типа (1.6_k), $k = 1,2$, (1.7_i), $i = 1,2$) при условии $\frac{3}{2} < p < 2$ (см. [6, Гл. 5, Теорема 3.79]). Первая часть Теоремы 1.1 означает, что глобальная разрешимость задачи (1.1) с начальными данными (1.5) имеет место и при $1 < p \leqslant \frac{3}{2}$. Существование по крайней мере одного решения с начальными данными (1.9_2), удовлетворяющего (1.6_1), (1.10), (1.7_i), $i = 1,2$, (сильное решение) было доказано в [6, Гл. 5, Теорема 4.21] при любых $1 < p < 2$. Доказательство его единственности (см. пункт 2 второй части Теоремы 1.1) принадлежит О. А. Ладыженской. Согласно Теореме 1.1 (пункт 1 второй части Теоремы 1.1) сильное решение остается единственным решением задачи (1.1) и в классе более слабых решений (1.6_k), $k = 1,2$, (1.7_i), $i = 1,2$, при $\frac{3}{2} \leqslant p < 2$.

Дальнейшая регулярность решения задачи (1.1) обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.2_i), $i = 1,2,3,4$, (1.3), (1.4), (1.9_k), $k = 1,2$. *Пусть функция* v *удовлетворяет соотношениям* (1.6_1), (1.11), (1.7_i), $i = 1,2$ *(*v *– сильное решение). Предположим, кроме того, что*

$$\sqrt{t}\partial_t g \in L_2(I;H). \tag{1.12}$$

Тогда

$$\|\sqrt{t}\partial_t v\|_{2,\infty} + \|\sqrt{t}\nabla\partial_t v\|_{p,Q_T} + \left(\int\limits_{Q_T} \frac{t|\varepsilon(\partial_t v)|^2}{(1+|\varepsilon(v)|)^{2-p}}\,dx\,dt\right)^{1/2} \tag{1.13$_1$}$$

$$+\|\sqrt{t}\nabla\partial_t v\|_{\frac{4}{4-p},2} \leqslant \Phi_3(T, \|\nabla a\|_2, \|g\|_{2r,p'}, \|\sqrt{t}\partial_t g\|_{2,Q_T}, \nu^{-1}, \nu_1),$$

$$v \in C(\bar{I}; H^1). \tag{1.13$_2$}$$

Обозначим через $v(t,a)$ сильное решение задачи (1.1_k), $k = 1,2,3$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.2_i), $i = 1,2,3,4$, (1.3), (1.4), (1.9_k), $k = 1,2$, (1.12). *Предположим, что*

$$a^m \rightharpoonup a \text{ в } H^1. \tag{1.14}$$

Тогда для любого $\delta > 0$

$$v^m \to v \quad \text{в} \quad C(\bar{I}_\delta; H^1), \tag{1.15}$$

где $v^m(t) \equiv v(t,a^m)$, $v(t) \equiv v(t,a)$.

Предположим, что

$$g(t) \equiv f \in L_{2r}(\Omega;\mathbb{R}^2) \cap (\hat{J}^1_p)', \quad t \geqslant 0, \tag{1.16}$$

для некоторого $r > 1$. В этом случае для всех $T > 0$ и всех $a \in H^1$ задача (1.1), $k = 1,2,3$, имеет единственное сильное решение. Введем разрешающие операторы $V_t : H^1 \to H^1$, полагая

$$V_t(a) \equiv v(t,a), \quad a \in H^1, \quad t \geqslant 0.$$

Эти операторы обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{c}\text{функция } t \mapsto V_t(a) \in H^1 \text{ непрерывна}\\ \text{при любом } a \in H^1,\end{array}\right\} \tag{1.17$_1$}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{функция } a \in H^1 \mapsto V_t(a) \in H^1 \text{ непрерывна}\\ \text{при любом } t \geqslant 0,\end{array}\right\} \tag{1.17$_2$}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{оператор } V_t : H^1 \to H^1 \text{ вполне непрерывен}\\ \text{при любом } t > 0.\end{array}\right\} \tag{1.17$_3$}$$

Утверждение (1.17_1) вытекает из (1.13_2), утверждение (1.17_2) при $t>0$ есть следствие Теоремы 1.3, а при $t=0$ оно очевидно. Наконец, (1.17_3) следует из Теоремы 1.3. Заметим, что используя Теорему 1.3 и полугрупповые свойства, нетрудно установить, что: функция $(t,a)\mapsto V_t(a)\in H^1$ непрерывна при любых $t>0$ и $a\in H^1$.

Итак, согласно терминологии, принятой в [7] семейство разрешающих операторов $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ является полугруппой класса 1.

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.2_k), $k=1,2,3,4$, (1.3), (1.16). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Полугруппа* $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ *точечно диссипативна. Более того, для любого* $a\in H^1$ *существует число* $T(a)\geqslant 0$ *такое, что*

$$\|\nabla V_t(a)\|_2^2\leqslant c_*\left[1+\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3p-2}{2p-2}}\|f\|_{2r}^{p'}\right]^{2/p},\ t\geqslant T(a),$$

где c_* *– постоянная, зависящая только от* p *и* r.

2. *Полугруппа* $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ *ограничена в следующем смысле*

$$\rho(B)=\sup_{a\in B}\sup_{t\geqslant 0}\|\nabla V_t(a)\|_2^2\leqslant\sup_{a\in B}\|\nabla a\|_2^2+c_*\left[1+\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3p-2}{2p-2}}\|f\|_{2r}^{p'}\right]^{2/p}$$

для любого множества B *из* H^1.

Из Леммы 1.1 и утверждений (1.17_k), $k=1,2,3$, вытекает (см. [7, 8])

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия Леммы* 1.1. *Тогда полугруппа* $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ *имеет минимальный глобальный* $\mathcal{B}$*-аттрактор* $\mathfrak{M}$, *который является инвариантным, связным, компактным множеством в* H^1. *Для любого* $a\in\mathfrak{M}$ *решение* $V_t(a)$, $t\geqslant 0$, *может быть непрерывно продолжено так, что* $V_t(a)$ *есть решение задачи* (1.1) *для всех $t \in \mathbb{R}$. Справедлива оценка*

$$M \equiv \sup_{a\in\mathfrak{M}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \|\nabla V_t(u)\|_2 + \|\partial_t V_t(a)\|_2 \right.$$
$$+ \left(\int\limits_t^{t+1} \|\nabla^2 V_\theta(a)\|_p^p d\theta \right)^{1/p} + \left(\int\limits_t^{t+1} \|\nabla^2 V_\theta(a)\|^2_{\frac{4}{4-p}} d\theta \right)^{1/2}$$
$$\left. + \left(\int\limits_t^{t+1} H(V_\theta(a)) d\theta \right)^{1/2} \right\} < +\infty,$$

где $H(u) = \int\limits_\Omega \frac{|\nabla\varepsilon(u)|^2}{(1+|\varepsilon(u)|)^{2-p}} dx$.

Автор выражает глубокую благодарность О. А. Ладыженской за многочисленные обсуждения этой работы и массу полезных советов, которые в корне изменили ее первоначальную версию.

§2. Некоторые дополнительные сведения

Все постоянные, зависящие только от p и r, будем обозначать через C.

Мы будем использовать следующие известные факты:

1) неравенство Корна

$$\|\varepsilon(u)\|_p \leqslant \|\nabla u\|_p \leqslant C\|\varepsilon(u)\|_p, \quad \forall u \in \hat{W}^1_p,\ 1 < p < +\infty, \tag{2.1}$$

2) интерполяционное неравенство

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_p^{\frac{p\lambda}{q}} \|u\|_l^{\frac{l(1-\lambda)}{q}}, \tag{2.2}$$

где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant l$, $q = \lambda p + (1-\lambda)l$,

3) мультипликативное неравенство

$$\|u\|_s \leqslant C(s,p,q)\|\nabla u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}, \quad u \in \hat{W}^1_p, \tag{2.3}$$

где $1 < p < 2$, $q \leqslant \frac{2p}{2-p}$, $\frac{2}{s} = (1-\theta)\frac{2}{q} + \theta\left(\frac{2}{p} - 1\right)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Положим

$$E(u) \equiv \int\limits_\Omega (1 + |\varepsilon(u)|)^p dx, \quad \tilde{E}(u) \equiv \|\nabla u\|_2^2,$$
$$H(u) \equiv \int\limits_\Omega \frac{|\nabla\varepsilon(u)|^2}{(1+|\varepsilon(u)|)^{2-p}} dx.$$

Лемма 2.1. *Пусть* $u \in \hat{W}_p^1$ *и* $H(u) < +\infty$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\tilde{E}(u) \leqslant CH^{\frac{2-p}{2}}(u)E^{\frac{p}{2}}(u)\tilde{E}^{\frac{2-p}{2}}(u). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть

$$q = \frac{2p^2}{6p - p^2 - 4}.$$

Нетрудно проверить, что $p < q < 2$ при $1 < p < 2$. Полагая $l = 2$, выводим из (2.2) неравенство

$$\|\nabla u\|_q \leqslant \|\nabla u\|_p^{p\frac{2(p-1)}{p^2}} \|\nabla u\|_2^{2\frac{2-p}{2p}} \leqslant E^{\frac{2(p-1)}{p^2}}(u)\tilde{E}^{\frac{2-p}{2p}}(u). \tag{2.5}$$

Далее, применяем мультипликативное неравенство при $s = 2$ и $q = \frac{2p^2}{6p-p^2-4}$ и получаем

$$\|\nabla u\|_2^2 \leqslant C\|\nabla^2 u\|_p^{2-p} E^{\frac{2(p-1)}{p}}(u)\tilde{E}^{\frac{2-p}{2}}(u). \tag{2.6}$$

В силу неравенств Корна и Гельдера мы имеем две оценки

$$\|\nabla^2 u\|_p \leqslant C\|\nabla \varepsilon(u)\|_p, \tag{2.7}$$

$$\|\nabla \varepsilon(u)\|_p \leqslant H^{1/2}(u)(E(u))^{\frac{2-p}{2p}}. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.4) вытекает из (2.6), (2.7) и (2.8), поскольку

$$\frac{2(p-1)}{p} + \frac{(2-p)^2}{2p} = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Обозначим через $\varphi^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, собственные функции задачи Стокса

$$\begin{aligned} &(\nabla\varphi^{(i)}, \nabla w) = \lambda_i(\varphi^{(i)}, w), \quad \forall w \in H^1,\ \varphi^{(i)} \in H^1, \\ &\|\varphi^{(i)}\|_2 = 1, \quad (\varphi^{(i)}, \varphi^{(j)}) = 0,\ i, j = 1, 2, \ldots,\ i \neq j. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Всякое решение задачи (2.9), продолженное периодически на все $\mathbb{R}^2$, принадлежит классу $\hat{J}^\infty$. Более того, справедливо равенство

$$-\Delta\varphi^{(i)} = \lambda_i \varphi^i \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.10}$$

Отметим еще одно утверждение (см. [9, Гл. II, Лемма 2.4]): для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon, p) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|u\|_2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} |(u, \varphi^{(i)})|^2 \right)^{1/2} + \varepsilon \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in \hat{W}_p^1. \tag{2.11}$$

§3. Доказательство первой части Теоремы 1.1

Рассмотрим галеркинские приближения задачи (1.1_k), $k = 1, 2, 3$,

$$v^N(t) = \sum_{i=1}^{N} d_{i,N}(t) \varphi^{(i)},$$

где неизвестные функции $d_{i,N}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &(\partial_t v^N(t), w) + (\nabla v^N(t) v^N(t), w) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^N(t))), \varepsilon(w) \right) \\ &\quad = (g(t), w), \quad \forall w \in H_N = \operatorname{Span}\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}\}, \end{aligned} \tag{3.1_1}$$

для всех $t \in I$ и начальному условию

$$v^N(0) = a^N = \sum_{i=1}^{N} (a, \varphi^{(i)}) \varphi^{(i)}. \tag{3.1_2}$$

Для краткости положим

$$u \equiv v^N, \quad b \equiv a^N \tag{3.2}$$

и заметим, что

$$\|b\|_2 \leqslant \|a\|_2, \quad \|\nabla b\|_2 \leqslant \|\nabla a\|_2. \tag{3.3}$$

Пусть $w = u(t)$ в (3.1). Тогда

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u(t)\|_2^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(u(t)) \right) = (g(t), u(t)). \tag{3.4}$$

Используя выпуклость потенциала D, выводим из (1.2_1), (1.2_2) оценку

$$\nu \|\varepsilon(u(t))\|_p^p \leqslant \int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(t))) dx \leqslant \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(u(t)) \right). \tag{3.5}$$

Далее, в силу неравенств Корна (2.1) и Юнга, имеем

$$|(g(t), u(t))| \leqslant \|g(t)\|_{p',-1}\|\nabla u(t)\|_p \leqslant C\|g(t)\|_{p',-1}\|\varepsilon(u(t))\|_p$$
$$\leqslant \frac{\nu}{2}\|\varepsilon(u(t))\|_p^p + C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}}\|g(t)\|_{p',-1}^{p'}. \quad (3.6)$$

Итак, из (3.4)–(3.6) вытекает

$$\partial_t\|u(t)\|_2^2 + \nu\|\varepsilon(u(t))\|_p^p \leqslant C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}}\|g(t)\|_{p',-1}^{p'}. \quad (3.7)$$

Интегрируя (3.7) и учитывая (3.1_2), (3.2) и (3.3), получим

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_2^2 + \nu\int_0^T\|\varepsilon(u(t))\|_p^p dt$$
$$\leqslant \|a\|_2^2 + C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^T\|g(t)\|_{p',-1}^{p'}dt$$

или

$$\|u\|_{2,\infty}^2 + \int_0^T E(u(t))dt \leqslant \Phi_0(T, \|a\|_2, \|g\|_{L_{p'}(I,(\hat{J}_p^1)')}, \nu^{-1}). \quad (3.8)$$

Отметим еще одну оценку, вытекающую из (3.7),

$$\|u(t)\|_2 + \nu\int_0^t\|\varepsilon(u(\theta))\|_p^p d\theta \leqslant C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^t\|g(\theta)\|_{p',-1}^{p'}d\theta + \|a\|_2^2. \quad (3.9)$$

Далее, пусть t, $t+\Delta \in \bar{I}$, $i \leqslant N$. Тогда, интегрируя равенство (3.1_1) на интервале $]t, t+\Delta[$ при $w = \varphi^{(i)}$, получим

$$|(u(t+\Delta) - u(t), \varphi^{(i)})| = \Bigg| -\int_t^{t+\Delta}\left(\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}(\varepsilon(u(\theta))), \varepsilon(\varphi^{(i)})\right)d\theta$$
$$+ \int_t^{t+\Delta}(u_k(\theta)u(\theta), \varphi_{,k}^{(i)})d\theta + \int_t^{t+\Delta}(g(\theta), \varphi^{(i)})d\theta\Bigg|.$$

Вспоминая условие (1.2_4), устанавливаем

$$|(u(t+\Delta)-u(t),\varphi^{(i)})| \leqslant \nu_1 \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \int\limits_\Omega (1+|\varepsilon(u(\theta))|)^{p-1} |\nabla\varphi^{(i)}| d\theta\, dx \right|$$

$$+ C\|\nabla\varphi^{(i)}\|_\infty \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \|u(\theta)\|_2^2 d\theta \right| + \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \|g(\theta)\|_{p',-1} \|\nabla\varphi^{(i)}\|_p d\theta \right|$$

$$\leqslant \|\nabla\varphi^{(i)}\|_p \left| \int\limits_t^{t+\Delta} [C\nu_1 E^{\frac{p-1}{p}}(u(\theta)) + \|g(\theta)\|_{p',-1}] d\theta \right|$$

$$+ C\|\nabla\varphi^{(i)}\|_\infty |\Delta t| \Phi_0$$

$$\leqslant \|\nabla\varphi^{(i)}\|_p |\Delta t|^{\frac{1}{p}} \left[C\nu_1 \left(\int\limits_0^T E(u(t))dt \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_{L_{p'}(I;(\hat{J}_p^1)')} \right]$$

$$+ C\|\nabla\varphi^{(i)}\|_\infty |\Delta t| \Phi_0.$$

Благодаря (3.8), мы можем выбрать подпоследовательность такую, что

$$\begin{aligned} &v^N \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{в} \quad L_\infty(I;H), \\ &v^N \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L_p(I;\hat{J}_p^1). \end{aligned} \tag{3.11_1}$$

Согласно (3.10) последовательность $\{(v^N(t),\varphi^{(i)})\}_{N=1}^\infty$ предкомпактна в $C(\bar{I})$ при каждом фиксированном i. Используя диагональный процесс, мы можем выбрать подпоследовательность такую, что

$$(v^N(t),w) \to (v(t),w) \quad \text{в} \quad C(\bar{I}) \quad \forall w \in H. \tag{3.12}$$

Таким образом, функция $t \mapsto v(t) \in H$ определена для всех $t \in \bar{I}$ и, более того, $v(0)=a$. Принимая во внимание (3.11_2) и (3.12), переходим к пределу в (3.9) и получаем

$$\|v(t)\|_2 + \nu \int\limits_0^t \|\varepsilon(v(\theta))\|_p^p d\theta \leqslant C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int\limits_0^t \|g(\theta)\|_{p',-1}^{p'} d\theta + \|a\|_2^2.$$

Отсюда, используя известные рассуждения (см. [10]), выводим

$$\|v(t)-a\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0+0. \tag{3.13}$$

Наконец, из (3.11_2), (3.12) и утверждения (2.11) вытекает, что (см. [10])

$$v^N \to v \text{ в } L_2(Q_T;\mathbb{R}^2) \Longrightarrow (v^N \to v \text{ п.в. в } Q_T). \tag{3.14}$$

С другой стороны, можно использовать мультипликативное неравенство при $q=2$, $s=2p$ и получить

$$\|u(t)\|_{2p} \leqslant C\|\nabla u(t)\|_p^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, последовательность $\{v^N\}_{N=1}^\infty$ ограничена в $L_{2p}(Q_T;\mathbb{R}^2)$ и, следовательно, согласно (3.14) мы имеем

$$v^N \rightharpoonup v \text{ в } L_{2p}(Q_T;\mathbb{R}^2), \tag{3.15_1}$$

$$v^N \to v \text{ в } L_q(Q_T;\mathbb{R}^2), \quad \forall q\in[1,2p[. \tag{3.15_2}$$

Для получения еще одного следствия тождества (3.1) положим $w=-\Delta u(t)$ и отметим, что $(u_i(t)u_{,i}(t),\Delta u(t))\equiv 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\partial_t\tilde{E}(u(t)) + (\operatorname{div}\sigma^N(t),\Delta u(t)) = -(g(t),\Delta u(t)), \tag{3.16}$$

где $\sigma^N(t) = \frac{\partial D}{\partial\varepsilon}(\varepsilon(u(t)))$. Используя условия периодичности, получаем

$$(\operatorname{div}\sigma^N(t),\Delta u(t)) = (\sigma^N_{,k}(t),\varepsilon(u_{,k}(t))) \geqslant (\text{см. } (1.2_3) \geqslant 2\nu H(u(t)).$$

Итак, из (3.8) и последней оценки вытекает, что

$$\frac{1}{2}\partial_t\tilde{E}(u(t)) + 2\nu H(u(t)) \leqslant -(g(t),\Delta u(t)). \tag{3.17}$$

Оценку правой части в (3.17) проведем с учетом тождества $\Delta u = 2\operatorname{div}\varepsilon(u)$

$$|(g(t),\Delta u(t))| \leqslant CH^{1/2}(u(t))\left(\int\limits_\Omega |g(t)|^2 h^{\frac{2(2-p)}{p}}(t)dx\right)^{1/2}.$$

Здесь $h(t) = (1+|\varepsilon(u(t))|)^{p/2}$. Нетрудно проверить, что

$$\|\nabla h(t)\|_2 \leqslant H^{1/2}(u(t)), \tag{3.18}$$

и следовательно, в силу (3.18) мы имеем

$$\|h(t)\|_{W_2^1(\Omega)} = (\|h(t)\|_2^2 + \|\nabla h(t)\|_2^2)^{1/2} \leqslant C(E(u(t))+H(u(t)))^{1/2} \tag{3.19}$$

Итак,

$$|(g(t), \Delta u(t))| \leqslant C H^{1/2}(u(t)) \|g(t)\|_{2r} \|h(t)\|^{\frac{2-p}{p}}_{\frac{2r(2-p)}{p(r-1)}} \leqslant C H^{1/2}(u(t)) \|h(t)\|^{\frac{2-p}{p}}_{\frac{2r}{r-1}}.$$

Отсюда, а также из (3.17), (3.19), выводим

$$\frac{1}{2}\partial_t \tilde{E}(u(t)) + \nu H(u(t)) \leqslant \frac{C}{\nu}\|g(t)\|^2_{2r}\|h(t)\|^{\frac{2(2-p)}{p}}_{\frac{2r}{r-1}} \leqslant \frac{C}{\nu}\|g(t)\|^2_{2r}\|h(t)\|^{\frac{2(2-p)}{p}}_{W^1_2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\nu}\|g(t)\|^2_{2r}\{[E(u(t))]^{\frac{2-p}{p}} + [H(u(t))]^{\frac{2-p}{p}}\}.$$

Еще раз применяя неравенство Юнга, приходим к соотношению

$$\partial_t \tilde{E}(u(t)) + \nu H(u(t)) \leqslant E(u(t)) + \Phi'_1\left(\frac{1}{\nu}\right)\|g(t)\|^{p'}_{2r}. \tag{3.20}$$

Умножим неравенство (3.20) на t^q с $q = \frac{1}{p-1}$

$$\partial_t(t^q \tilde{E}(u(t))) + \nu t^q H(u(t)) \leqslant t^q E(u(t)) + \Phi'_1\left(\frac{1}{\nu}\right)\|t^{\frac{1}{p}} g(t)\|^{p'}_{2r} + q t^{q-1}\tilde{E}(u(t)).$$

Применим неравенство (2.4) Леммы 2.1 и в результате получим

$$\partial_t(t^q \tilde{E}(u(t))) + \nu t^q H(u(t)) \leqslant t^q E(u(t)) + \Phi'_1\left(\frac{1}{\nu}\right)\|t^{\frac{1}{p}} g(t)\|^{p'}_{2r} + C t^{q-1} H^{\frac{2-p}{2}}(u(t)) E^{\frac{p}{2}}(u(t)) \tilde{E}^{\frac{2-p}{2}}(u(t)) \leqslant t^q E(u(t)) + \Phi'_1\left(\frac{1}{\nu}\right)\|t^{\frac{1}{p}} g(t)\|^{p'}_{2r} + C(t^q H(u(t)))^{\frac{2-p}{2}} E^{\frac{p}{2}}(u(t))(t^q \tilde{E}(u(t)))^{\frac{2-p}{2}}.$$

Еще раз воспользуемся неравенством Юнга при оценке правой части последнего неравенства

$$\partial_t(t^q \tilde{E}(u(t))) + \frac{\nu}{2} t^q H(u(t)) \leqslant \Phi''_1\left(\frac{1}{\nu}\right)[t^q E(u(t)) + E(u(t))(t^q \tilde{E}(u(t)))^{\frac{2-p}{p}} + \|t^{\frac{1}{p}} g(t)\|^{p'}_{2r}].$$

Так как $\frac{2-p}{p} < 1$, то $(t^q\tilde{E})^{\frac{2-p}{p}} \leqslant 1 + t^q\tilde{E}$, и следовательно,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} t^q\tilde{E}(u(t)) + \frac{\nu}{2}\int\limits_0^T t^q H(u(t))dt \leqslant \Phi_1''\left(\frac{1}{\nu}\right)\int\limits_0^T [(t^q+1)E(u(t)) + \|t^{\frac{1}{p}}g(t)\|_{2r}^{p'}]dt \exp\left\{\Phi_1''\left(\frac{1}{\nu}\right)\int\limits_0^T E(u(t))dt\right\}. \quad (3.21)$$

Далее, в силу, неравенств (2.7) и (2.8), мы имеем

$$\|\nabla^2 u(t))\|_p \leqslant C\|\nabla\varepsilon(u(t))\|_p \leqslant CH^{1/2}(u(t))E^{\frac{2-p}{2p}}(u(t)), \quad (3.22)$$

и, таким образом,

$$\|t^{\frac{q}{2}}\nabla^2 u(t)\|_{p,Q_T}^p \leqslant C\int\limits_0^T (t^q H(u(t)))^{\frac{p}{2}} E^{\frac{2-p}{p}}(u(t))dt \leqslant C\left(\int\limits_0^T t^q H(u(t))dt\right)^{p/2}\left(\int\limits_0^T E(u(t))dt\right)^{\frac{2-p}{2}}.$$

Отсюда, а также из (3.8) и (3.21) вытекает оценка

$$\|t^{\frac{q}{2}}\nabla u\|_{2,\infty} + \left(\int\limits_0^T t^q H(u(t))dt\right)^{1/2} + \|t^{\frac{q}{2}}\nabla^2 u\|_{p,Q_T} \leqslant \bar{\Phi}_1(T, \|a\|_2, \|g\|_{L_{p'}(I;(\hat{J}_p^1)')}, \|t^{\frac{1}{p}}g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}). \quad (3.23)$$

Для вывода последней оценки положим $w = \partial_t u(t)$ в (3.1) и получим

$$\|\partial_t u(t)\|_2 + \partial_t\int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(t)))dx = (g(t), \partial_t u(t)) - (u_i(t)u_{,i}(t), \partial_t u(t)). \quad (3.24)$$

При помощи неравенства Коши выводим из (3.24)

$$\frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \partial_t \int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(t)))dx \leqslant C\left[\|g(t)\|_2^2 + \int\limits_\Omega |u(t)|^2|\nabla u(t)|^2 dx\right]. \quad (3.25)$$

Последнее слагаемое в правой части неравенства (3.25) оценим, используя неравенство Гельдера, теоремы вложения и неравенство (3.22)

$$\int\limits_\Omega |u(t)|^2|\nabla u(t)|^2 dx \leqslant \|\nabla u(t)\|^2_{\frac{2p}{2-p}}\|u(t)\|^2_{p'} \leqslant C\|\nabla^2 u(t)\|_p^2\|u(t)\|_{p'}^2 \leqslant C\,H(u(t))E^{\frac{2-p}{p}}(u(t))\|u(t)\|^2_{p'}. \quad (3.26)$$

Последний сомножитель в правой части неравенства (3.26) оценим при помощи мультипликативного неравенства

$$\|u(t)\|^2_{p'} \leqslant C\|\nabla u(t)\|_2^{\frac{2-p}{2}}\|u(t)\|_2^{\frac{2(p-1)}{p}} \leqslant C\tilde{E}^{\frac{2-p}{2p}}(u(t))\Phi_0^{\frac{p-1}{p}}. \quad (3.27)$$

Итак, из (3.26) и (3.27) вытекает соотношение

$$\int\limits_\Omega |u(t)|^2|\nabla u(t)|^2 dx \leqslant C\,H(u(t))E^{\frac{2-p}{p}}(u(t))\tilde{E}^{\frac{2-p}{p}}(u(t))\Phi_0^{\frac{2(p-1)}{p}}.$$

Заметим еще, что

$$E(u(t)) \leqslant C\int\limits_\Omega (1+|\nabla u(t)|)^p dx \leqslant C\left(\int\limits_\Omega (1+|\nabla u(t)|^2)dx\right)^{p/2} \leqslant C(1+\tilde{E}(u(t)))^{p/2} \quad (3.28)$$

Таким образом, мы имеем

$$\int\limits_\Omega |u(t)|^2|\nabla u(t)|^2 dx \leqslant C\,H(u(t))(1+\tilde{E}(u(t)))^{\frac{4-p^2}{2p}}\Phi_0^{\frac{2(p-1)}{p}}. \quad (3.29)$$

Из (3.25) и (3.29) выводим

$$\frac{1}{2}t^{q_1}\|\partial_t u(t)\|_2^2+\partial_t\left(t^{q_1}\int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(t)))dx\right)\leqslant q_1 t^{q_1-1}\int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(t)))dx$$
$$+C\left[t^{q_1}\|g(t)\|_2^2+t^{q_1}H(u(t))(1+\tilde{E}(u(t)))^{\frac{4-p^2}{2p}}\Phi_0^{\frac{2(p-1)}{p}}\right].$$

Отметим, что в силу (1.2_1) и (1.2_4)

$$D(\varepsilon)=\int\limits_0^1\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}(\theta\varepsilon):\varepsilon\,d\theta\leqslant C\nu_1(1+|\varepsilon|)^p, \tag{3.30}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}t^{q_1}\|\partial_t u(t)\|^2+\partial_t\left(t^{q_1}\int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(t)))dx\right)\leqslant C\nu_1 t^{q_1-1}E(u(t))$$
$$+C\left\{t^{q_1}\|g(t)\|_2^2+(t^qH(u(t)))[t^q(1+\tilde{E}(u(t)))]^{\frac{4-p^2}{2p}}\Phi_0^{\frac{2(p-1)}{p}}\right\}.$$

Отсюда и из (3.23) выводим оценку

$$\|t^{q/2}\nabla u\|_{2,\infty}+\left(\int\limits_0^T t^qH(u(t))dx\right)^{1/2}+\|t^{q/2}\nabla^2u\|_{p,Q_T}$$
$$+\|t^{q_1/2}\partial_t u\|_{2,Q_T}\leqslant\Phi_1. \tag{3.31}$$

Теперь мы можем перейти к пределу в тождестве (3.1_1). Выберем и зафиксируем $\delta>0$. Благодаря оценке (3.27) можно утверждать (по крайней мере после выбора подпоследовательности), что

$$\nabla^2v^N\rightharpoonup\nabla^2v \text{ в } L_p(Q_{\delta,T};\mathbb{R}^8), \tag{3.32_1}$$
$$\partial_t v^N\rightharpoonup\partial_t v \text{ в } L_2(Q_{\delta,T};\mathbb{R}^2), \tag{3.32_2}$$

и, следовательно,

$$\nabla v^N\to\nabla v \text{ в } L_p(Q_{\delta,T};\mathbb{R}^4), \tag{3.33_1}$$
$$\nabla v^N\to\nabla v \text{ п.в. в } Q_{\delta,T}, \tag{3.33_2}$$

где $Q_{\delta,T} \equiv \Omega \times I_\delta$, $I_\delta \equiv]\delta, T[$.

Пусть $w \in \hat{J}^\infty$, $\chi \in L_\infty(I_\delta)$ – произвольные фиксированные функции. Из (3.1_1) вытекает равенство

$$\int_\delta^T \chi(t)\Big[(\partial_t v^N(t), w) + (\nabla v^N(t) v^N(t), w) + \Big(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^N(t))), \varepsilon(w)\Big) - (g(t), w)\Big] dx = 0. \quad (3.34)$$

Благодаря (3.32_2) и (3.14), мы имеем

$$\int_\delta^T \chi(t)(\partial_t v^N(t), w)dt \to \int_\delta^T \chi(t)(\partial_t v(t), w)dt,$$

$$\int_\delta^T \chi(t)(\nabla v^N(t) v^N(t), w)dt \quad (3.35)$$

$$= -\int_\delta^T \chi(t)(v_i^N(t) v^N(t), w_{,i})dt \to -\int_\delta^T \chi(t)(v_i(t) v(t), w_{,i})dt.$$

Для того, чтобы перейти к пределу в третьем слагаемом равенства (3.34), воспользуемся условием (1.2_4). Имеем для всякого подмножества $Q' \subset Q_{\delta,T}$

$$A^N = \Big| \int_{Q_{\delta,T}} \chi(t) \Big(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^N)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)),\ \varepsilon(w)\Big) dx\, dt \Big|$$
$$\leqslant \|\varepsilon(w)\|_\infty \|\chi\|_{\infty, I_\delta} \Big\{ \int_{Q'} \Big|\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^N)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v))\Big| dx\, dt + \nu_1 \int_{Q_{\delta,T} \setminus Q'} [(1 + |\varepsilon(v^N)|)^{p-1} + (1 + |\varepsilon(v)|)^{p-1}] dx\, dt \Big\} \quad (3.36)$$

$$\leqslant \|\varepsilon(w)\|_\infty \|\chi\|_{\infty,I_\delta} \left\{ \int\limits_{Q'} \left| \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^N)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)) \right| dx\, dt \right.$$

$$\left. + C|Q_{\delta,T} \setminus Q'|^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int\limits_\delta^T E(v^N(t))dt \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int\limits_\delta^T E(v(t))dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right\}.$$

Согласно (3.8) верна оценка

$$\int\limits_0^T E(v^N(t))dt \leqslant \Phi_0,$$

и, следовательно, (см. (3.11_2))

$$\int\limits_0^T E(v(t))dt \leqslant \Phi_0.$$

Таким образом, из (3.36) следует соотношение

$$A^N \leqslant \|\varepsilon(w)\|_\infty \|\chi\|_{\infty,I_\delta} \left\{ \int\limits_{Q'} \left| \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^N)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)) \right| dx\, dt \right.$$

$$\left. + C\Phi_0^{\frac{p-1}{p}} |Q_{\delta,T} \setminus Q'|^{1/p} \right\}. \quad (3.37)$$

Возьмем произвольное число $\gamma > 0$. Существует замкнутое подмножество $Q' \subset Q_{\delta,T}$ такое, что $\varepsilon(v^N) \to \varepsilon(v)$ равномерно на Q' и

$$\|\varepsilon(w)\|_\infty \|\chi\|_{\infty,I_\delta} C\Phi_0^{\frac{p-1}{p}} |Q_{\delta,T} \setminus Q'|^{1/p} < \gamma.$$

Но тогда, переходя к пределу в (3.37), получаем, что $\limsup\limits_{N\to+\infty} A^N \leqslant \gamma$, и в силу произвольности γ, заключаем, что $\lim\limits_{N\to+\infty} A^N = 0$. Таким образом, из (3.34)–(3.36) следует равенство

$$\int\limits_\delta^T \chi(t) \left[(\partial_t v(t), w) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w) \right) \right.$$

$$\left. - (v_i(t) v(t), w_{,i}) - (g(t), w) \right] dt = 0.$$

Обозначим через I' множество точек Лебега функций $t \mapsto \partial_t u(t)$, $t \mapsto \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t)))$, $t \mapsto g(t)$ и $t \mapsto v_i(t)v(t)$. Известно, что $|I'| = T$. Пользуясь произвольностью функции χ, устанавливаем тождество

$$(\partial_t v(t), w) - (v_i(t)v(t), w_{,i}) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w)\right) = (g(t), w) \quad (3.38)$$

для всех $w \in \hat{J}^\infty$ и всех $t \in I' \cap I_\delta$.

Соотношения (3.32) и (3.33) позволяют получить из (3.31) следующую оценку

$$\sup_{\delta \leqslant t \leqslant T} (t^q \tilde{E}(v(t)))^{1/2} + \liminf_{N \to +\infty} \int\limits_\delta^T t^q H(v^N(t))dt \\ + \|t^{\frac{q}{2}} \nabla^2 v\|_{p, Q_{\delta,T}} + \|t^{q_1/2} \partial_t v\|_{2, Q_{\delta,T}} \leqslant \Phi_1. \quad (3.39)$$

Согласно (3.31) мы можем утверждать, что

$$\frac{\varepsilon(v^N_{,k})}{(1 + |\varepsilon(v^N)|)^{\frac{2-p}{2}}} \rightharpoonup \beta_k \text{ в } L_2(Q_{\delta,T}; \mathbb{M}), \ k = 1, 2 \quad (3.40)$$

и, следовательно,

$$\liminf_{N \to +\infty} \int\limits_\delta^T t^q H(v^N(t))dt \geqslant \int\limits_\delta^T t^q \beta_k(t) : \beta_k(t)dt. \quad (3.41)$$

Остается показать, что

$$\beta_k \equiv \frac{\varepsilon(v_{,k})}{(1 + |\varepsilon(v)|)^{\frac{2-p}{2}}}. \quad (3.42)$$

Действительно, для всякой функции $\varkappa \in C_0^\infty(Q_{\delta,T}; \mathbb{M})$ мы имеем

$$\left| \int\limits_{Q_{\delta,T}} \left(\frac{\varepsilon(v_{,k})}{(1 + |\varepsilon(v)|)^{\frac{2-p}{2}}} - \beta_k \right) : \varkappa dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{Q_{\delta,T}} \varepsilon(v^N_{,k}) : \varkappa \left(\frac{1}{(1+|\varepsilon(v)|)^{\frac{2-p}{2}}} - \frac{1}{(1+|\varepsilon(v^N)|)^{\frac{2-p}{2}}} \right) dx\,dt \right|$$

$$+ \left| \int\limits_{Q_{\delta,T}} (\varepsilon(v_{,k}) - \varepsilon(v^N_{,k})) : \frac{\varkappa dx\,dt}{(1+|\varepsilon(v)|)^{\frac{2-p}{2}}} \right|$$

$$+ \left| \int\limits_{Q_{\delta,T}} \left(\frac{\varepsilon(v^N_{,k})}{(1+|\varepsilon(v^N)|)^{\frac{2-p}{2}}} - \beta_k \right) : \varkappa\, dx\,dt \right| \leqslant \|\varkappa\|_{\infty,Q_{\delta,T}} \|\nabla\varepsilon(v^N)\|_{p,Q_{\delta,T}}$$

$$\times \left(\int\limits_{Q_{\delta,T}} \left| \frac{1}{(1+|\varepsilon(v)|)^{\frac{2-p}{2}}} - \frac{1}{(1+|\varepsilon(v^N)|)^{\frac{2-p}{2}}} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx\,dt \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+ \left| \int\limits_{Q_{\delta,T}} (\varepsilon(v_{,k}) - \varepsilon(v^N_{,k})) : \frac{\varkappa}{(1+|\varepsilon(v)|)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx\,dt \right|$$

$$+ \left| \int\limits_{Q_{\delta,T}} \left(\frac{\varepsilon(v^N_{,k})}{(1+|\varepsilon(v^N)|)^{\frac{2-p}{2}}} - \beta_k \right) : \varkappa\, dx\,dt \right|$$

Второе и третье слагаемое в правой части последнего неравенства стремятся к нулю согласно (3.32_1) и (3.40), первое слагаемое стремится к нулю в силу оценок (3.31), (3.28_2) и теоремы Лебега. Переходя к пределу в (3.39) с учетом (3.41), (3.42) и пользуясь соотношением (3.38) и произвольностью δ, мы получим оценку (1.8_2) и тождество

$$(\partial_t v(t), w) - (v_i(t)v(t), w_{,i}) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w) \right) = (g(t), w)$$

для всех $w \in \hat{J}^\infty$ и всех $t \in I'$.

Остается заметить, что

$$|(v_i(t)v(t), w_{,i})| = |((\nabla v(t))v(t), w)|$$

$$\leqslant \|w\|_{\frac{2p}{2-p}} \left(\int\limits_{\Omega} (|\nabla v(t)|\,|v(t)|)^{\frac{2p}{3p-2}} dx \right)^{\frac{2p-2}{2p}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|\nabla w\|_p\|\nabla v(t)\|_2\,\|v(t)\|_{\frac{p}{p-1}}$$
$$\leqslant C\|\nabla w\|_p\|\nabla v(t)\|_2\,\|\nabla v(t)\|_2^{\frac{2-p}{p}}\,\|v(t)\|_2^{\frac{2p-2}{p}}$$
$$\leqslant C\|\nabla w\|_p\,\|\nabla v(t)\|_2^{\frac{2}{p}}\,\|v(t)\|_2^{\frac{2p-2}{p}}. \quad (3.43)$$

Мы знаем, что величина $\|\nabla v(t)\|_2$ конечна для всех $t \in I''$, где $|I''| = T$. Таким образом, мы имеем

$$(\partial_t v(t), w) + (\nabla v(t)v(t), w) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w)\right) = (g(t), w)$$

для всех $w \in \hat{J}^\infty$ и всех $t \in I' \cap I''$. Благодаря (3.43) последнее тождество справедливо для всех $w \in \hat{J}^1_p$.

В силу оценки (1.8_2) функция $t \mapsto u(t) \in H$ непрерывна при всех $0 < t \leqslant T$. Но из (3.13) следует, что $u \in C(\bar{I}; H)$. Итак, первая часть Теоремы 1 доказана.

§4. Доказательство второй части Теоремы 1.1

Условия (1.9_1), (1.9_2) позволяют вывести из (3.20) следующее неравенство

$$\tilde{E}(u(t)) + \nu\int_0^t H(u(\theta))d\theta$$
$$\leqslant \|\nabla a\|_2^2 + \int_0^t \left[E(u(\theta)) + \Phi_1'\left(\frac{1}{\nu}\right)\|g(\theta)\|_{2r}^{p'}\right]d\theta, \quad u \equiv v^N \quad (4.1)$$

Благодаря (3.8) и (4.1), мы имеем оценку

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\tilde{E}(u(t)) + \int_0^T H(u(t))dt \leqslant \Phi_2'(T, \|\nabla a\|_2, \|g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}). \quad (4.2)$$

Кроме того, используя неравенства Гельдера и Корна, устанавливаем оценку

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 u\|^2_{\frac{4}{4-p},2} &\leqslant C\|\nabla\varepsilon(u)\|^2_{\frac{4}{4-p},2}\\
&= C\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega \left(\frac{|\nabla\varepsilon(u)|^2}{(1+|\varepsilon(u)|)^{2-p}}\right)^{\frac{2}{4-p}} (1+|\varepsilon(u)|)^{\frac{(2-p)2}{4-p}} dx\right)^{\frac{4-p}{2}} dt\\
&\leqslant C\int\limits_0^T H(u(t)) \left(\int\limits_\Omega (1+|\varepsilon(u(t))|)^2 dx\right)^{\frac{2-p}{2}} dt\\
&\leqslant C\int\limits_0^T H(u(t))dt(1+\tilde{E}(u(t)))^{\frac{2-p}{2}} dt \leqslant C\Phi_2'(1+\Phi_2')^{\frac{2-p}{2}}.
\end{aligned}$$

Далее, из (3.25), (3.29) выводим еще одну оценку

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u\|^2_{2,Q_T} \leqslant 2\int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(0)))dx + C\|g(t)\|_2^2\\
+ C\int\limits_0^T H(u(t))(1+\tilde{E}(u(t)))^{\frac{4-p^2}{2p}} dt \Phi_0^{\frac{2(p-1)}{p}}. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.28) и (3.30), оценим первое слагаемое в правой части (4.4) следующим образом

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega D(\varepsilon(u(0)))dx \leqslant C\nu_1 E(u(0)) \leqslant C\nu_1(1+\tilde{E}(u(0)))^{p/2}\\
\leqslant C\nu_1(1+\|\nabla a\|_2^2)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Отсюда, а также из (3.22), (4.2)–(4.4), вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla v^N(t)\|_2 + \left(\int\limits_0^T H(v^N(t))dt\right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla^2 v^N\|_{p,Q_T}\\
+ \|\nabla^2 v^N\|_{\frac{4}{4-p},2} + \|\partial_t v^N\|_{2,Q_T} \leqslant \Phi_2. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Устремляя N к $+\infty$, получаем, что при выполнении дополнительных условий (1.9_1), (1.9_2) и при всех $1 < p < 2$ существует по крайней мере одна функция v, удовлетворяющая соотношениям

(1.6_1), (1.11), (1.7_i), $i=1,2$ и оценке (1.10) (сильное решение). Покажем сначала, что такая функция единственна.

Итак, пусть v^1 и v^2 две функции, удовлетворяющие (1.6_1), (1.11) и (1.7_1). Имеем при п.в. $t\in I$

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\bar u(t)\|_2^2+K(v^1(t),v^2(t))=-(\bar u_i(t)v^2_{,i}(t),\bar u(t)),\tag{4.6}$$

где $\bar u=v^1-v^2$,

$$\begin{aligned}K(v^1,v^2)&\equiv\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}(\varepsilon(v^1))-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}(\varepsilon(v^2))\right):\varepsilon(\bar u)dx\\&\geqslant(\text{см.}\,(1.2_3))\geqslant 2\nu\int\limits_\Omega\frac{|\varepsilon(\bar u)|^2}{(1+|\varepsilon(v^1)|+|\varepsilon(v^2)|)^{2-p}}\,dx.\end{aligned}\tag{4.7}$$

В силу неравенств Корна и Гельдера верна оценка

$$\begin{aligned}&\|\nabla\bar u\|_{\frac{4}{4-p}}\leqslant C\|\varepsilon(\bar u)\|_{\frac{4}{4-p}}\\&=\left(\int\limits_\Omega\left(\frac{|\varepsilon(\bar u)|^2}{(1+|\varepsilon(v^1)|+|\varepsilon(v^2)|)^{2-p}}\right)^{\frac{2}{4-p}}(1+|\varepsilon(v^1)|+|\varepsilon(v^2)|)^{\frac{2(2-p)}{4-p}}dx\right)^{\frac{4-p}{4}}\\&\leqslant\left(\int\limits_\Omega\frac{|\varepsilon(\bar u)|^2}{(1+|\varepsilon(v^1)|+|\varepsilon(v^2)|)^{2-p}}dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega(1+|\varepsilon(v^1)|+|\varepsilon(v^2)|)^2dx\right)^{\frac{2-p}{4}}\\&\qquad\leqslant(\text{см.}(4.7))\leqslant\left(\frac{1}{2\nu}K(v^1,v^2)\right)^{1/2}(1+\tilde E(v^1)+\tilde E(v^2))^{\frac{2-p}{4}}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Правую часть в (4.6) оценим при помощи неравенств Гельдера и (2.3)

$$\begin{aligned}&|(\bar u_i(t)v^2_{,i}(t),\bar u(t))|\leqslant\|\bar u(t)\|_4^2\tilde E^{1/2}(v^2(t))\\&\qquad\qquad\leqslant C\|\nabla\bar u(t)\|^{\frac{2}{p}}_{\frac{4}{4-p}}\|\bar u(t)\|_2^{\frac{2(p-1)}{p}}\tilde E^{1/2}(v^2(t)).\end{aligned}$$

Отсюда, а также из (4.6), (4.8), выводим соотношение

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t\|\bar{u}(t)\|_2^2 + K(v^1(t),v^2(t)) \leqslant C\left(\frac{1}{2\nu}K(v^1(t),v^2(t))\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad\times (1+\tilde{E}(v^1(t))+\tilde{E}(v^2(t)))^{\frac{2-p}{2p}}\tilde{E}^{1/2}(v^2(t))(\|\bar{u}(t)\|_2^2)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leqslant C\left(\frac{1}{2\nu}K(v^1(t),v^2(t))\right)^{\frac{1}{p}}(1+\tilde{E}(v^1(t))+\tilde{E}(v^2(t)))^{\frac{1}{p}}(\|\bar{u}(t)\|_2^2)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}
$$

После применения неравенства Юнга будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\|\bar{u}(t)\|_2^2 + K(v^1(t),v^2(t))\\
&\qquad\leqslant C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}}(1+\tilde{E}(v^1(t))+\tilde{E}(v^2(t)))^{\frac{1}{p-1}}\|\bar{u}(t)\|_2^2. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Если дополнительно предположить, что v^1 и v^2 удовлетворяют условию (1.7_2), т.е. $\bar{u}(0)=0$, то из (1.11), (1.6_1) и (4.9) нетрудно вывести, что $v^1 \equiv v^2$. Итак, утверждение пункта 2 второй части Теоремы 1.1 доказано.

Пусть v^1 – произвольная функция, удовлетворяющая соотношениям (1.6_k), $k=1,2$, (1.7_i), $i=1,2$, а v^2 – сильное решение, т.е. функция, удовлетворяющая (1.6_1), (1.11), (1.7_i), $i=1,2$. Если мы покажем, что $v^1 \equiv v^2$, то утверждение пункта 1 второй части Теоремы 1.1 будет доказано.

Благодаря неравенствам Корна и Гельдера мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla\bar{u}\|_p \leqslant C\|\varepsilon(\bar{u})\|_p\\
&\qquad\leqslant C\biggl(\int\limits_\Omega\left(\frac{|\varepsilon(\bar{u})|^2}{(1+|\varepsilon(v^1)|+|\varepsilon(v^2)|)^{2-p}}\right)^{\frac{p}{2}}(1+|\varepsilon(v^1)|\\
&\quad+|\varepsilon(v^2)|)^{\frac{(2-p)p}{2}}dx\biggr)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\text{см.}(4.7)) \leqslant C\left[\frac{1}{2\nu}K(v^1,v^2)\right]^{1/2}\\
&\qquad\qquad\times[E(v^1)+E(v^2)]^{\frac{2-p}{2p}}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Воспользуемся мультипликативным неравенством (2.3) для оценки правой части в (4.6)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t\|\bar u(t)\|^2 + K(v^1(t),v^2(t)) \leqslant \|\bar u(t)\|_4^2 \tilde E^{1/2}(v^2(t))\\
&\qquad \leqslant C\|\nabla \bar u(t)\|_p^{\frac{p}{2(p-1)}}(\|\bar u(t)\|_2^2)^{\frac{3p-4}{4p-4}}\tilde E^{1/2}(v^2(t)) \leqslant (\text{см.}(4.10))\\
&\leqslant C\left(\frac{1}{2\nu}K(v^1(t),v^2(t))\right)^{\frac{p}{4(p-1)}}(E(v^1(t))+E(v^2(t)))^{\frac{2-p}{4p-4}}\tilde E^{\frac12}(v^2(t))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times(\|\bar u(t)\|_2^2)^{\frac{3p-4}{4p-4}}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга, выводим из последнего соотношения следующую оценку

$$\begin{aligned}
&\partial_t\|\bar u(t)\|_2^2 + K(v^1(t),v^2(t))\\
&\qquad \leqslant C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{3p-4}}[E(v^1(t))+E(v^2(t))]^{\frac{2-p}{3p-4}}\tilde E^{\frac{2p-2}{3p-4}}(v^2(t))\|\bar u(t)\|_2^2\\
&\leqslant (\text{см.}(1.10),\,(1.9_3)) \leqslant C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{3p-4}}\Phi_2^{\frac{4p-4}{3p-4}}[E(v^1(t))+E(v^2(t))]\|\bar u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, при $t \geqslant t_1 > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\|\bar u(t)\|_2^2 \leqslant \|\bar u(t_1)\|_2^2 \exp\left\{C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{3p-4}}\Phi_2^{\frac{4p-4}{3p-4}}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\times\int_{t_1}^{t}[E(v^1(\theta))+E(v^2(\theta))]d\theta\right\}.
\end{aligned}$$

Благодаря (1.6_1), мы можем перейти к пределу при $t_1 \to 0$ и получить, что $v^1 \equiv v^2$. Теорема 1.1 доказана.

§5. Доказательство Теорем 1.2 и 1.3

Доказательство Теоремы 1.2. Докажем сначала, что для любой $w \in H^1$

$$\text{функция } t \mapsto (\nabla v(t), \nabla w) \text{ непрерывна на } \bar I. \tag{5.1}$$

Поскольку в условиях Теоремы 1.2 решение задачи (1.1_k), $k = 1,2,3$, единственно, то мы можем доказывать (5.1) предельным переходом на галеркинских приближениях. Из (3.1) нетрудно вывести тождество

$$(\partial_t u_{,k}(t), w) + ((\nabla u(t)u(t))_{,k}, w) + (\sigma^N_{,k}(t), \varepsilon(w)) = -(g(t), w_{,k}), \quad \forall w \in H_N, \quad k = 1, 2,$$

в котором $\sigma^N \equiv \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u))$, $u = v^N$. Пусть t, $t+\Delta \in \bar{I}$, тогда

$$A_k \equiv |(u_{,k}(t+\Delta) - u_{,k}(t), w)| \leqslant \|\nabla w\|_\infty \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \|\nabla u(\theta)\|_2 \|u(\theta)\|_2 d\theta \right| + \|\nabla^2 w\|_\infty \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \int\limits_\Omega |\sigma^N| dx\, d\theta \right| + \|\nabla w\|_\infty \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \int\limits_\Omega |g| dx\, d\theta \right|.$$

Теперь воспользуемся уже полученными оценками (4.2) для

$\|\nabla u(t)\|_2$ и (3.8) для $\|u(t)\|_2$, а также условиями (1.2_4), (1.9_1). В результате получим

$$A_k \leqslant |\Delta| \|\nabla w\|_\infty (\Phi_0 \Phi_2')^{1/2} + \|\nabla^2 w\|_\infty \nu_1 \times \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \int\limits_\Omega (1 + |\varepsilon(u(\theta))|)^{p-1} dx\, d\theta \right| + C\|\nabla w\|_\infty \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \|g(\theta)\|_{2r} d\theta \right| \leqslant |\Delta| \|\nabla w\|_\infty (\Phi_0 \Phi_2')^{1/2} + C|\Delta|^{1/p} [\|g\|_{2r,p'} \times \|\nabla w\|_\infty + \nu_1 \|\nabla^2 w\|_\infty \Phi_0^{\frac{p-1}{p}}].$$

Таким образом, последовательность $\{t \mapsto (\nabla v^N_{,k}(t), w\}_{N=1}^\infty$ предкомпактна в $C(\bar{I})$ для любого $w \in \hat{J}^\infty$. Применяя известные рассуждения (см., например, [10]) и оценку (4.5), выводим (5.1).

Благодаря оценке (4.5) можно утверждать, что

$$\nabla v^N \to \nabla v \text{ в } L_p(Q_T; \mathbb{R}^4). \tag{5.2}$$

Переходя к пределу в неравенстве (4.1) с учетом (5.1) и (5.2), получаем

$$\tilde{E}(v(t)) \equiv \|\nabla v(t)\|_2^2 \leqslant \|\nabla a\|_2^2 + \int\limits_0^t [E(v(\theta)) + \Phi_1'\left(\frac{1}{\nu}\right) \|g(\theta)\|_{2r}^{p'}] d\theta,$$

и, следовательно,

$$\limsup_{t\to 0}\|\nabla v(t)\|_2^2 \leqslant \|\nabla a\|_2^2 \leqslant \liminf_{t\to 0}\|\nabla v(t)\|_2^2.$$

Отсюда и из (5.1) вытекает

$$\|\nabla v(t)-\nabla a\|_2 \to 0 \text{ при } t\to 0. \tag{5.3}$$

Дифференцируем тождество (3.1) по t и полагаем $w=\partial_t u(t)$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|\partial_t u(t)\|_2^2 &+ (\partial_t\sigma^N(t),\varepsilon(\partial_t u(t))) = (\partial_t g(t),\partial_t u(t))\\ &-(\partial_t u_i(t)u_{,i}(t),\partial_t u(t)) \leqslant \|\partial_t g(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2\,\|\partial_t u(t)\|_4^2.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Последний сомножитель в правой части неравенства (5.4) оцениваем при помощи мультипликативного неравенства (2.3) следующим образом

$$\|\partial_t u(t)\|_4^2 \leqslant C\|\nabla\partial_t u(t)\|_{\frac{4}{4-p}}^{\frac{2}{p}}\|\partial_t u(t)\|_2^{\frac{2(p-1)}{p}}. \tag{5.5}$$

Положим

$$Q(u(t)) \equiv \int\limits_\Omega \frac{|\varepsilon(\partial_t u(t))|^2}{(1+|\varepsilon(u(t))|)^{2-p}}\,dx$$

и заметим, что

$$\|\nabla\partial_t u(t)\|_p \leqslant C\|\varepsilon(\partial_t u(t))\|_p \leqslant CQ^{1/2}(u(t))E^{\frac{2-p}{2p}}(u(t)), \tag{5.6$_1$}$$

$$(\partial_t\sigma(t),\varepsilon(\partial_t u(t))) = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial\varepsilon^2}(\varepsilon(u(t)))\varepsilon(\partial_t u(t)),\varepsilon(\partial_t u(t))\right) \geqslant 2\nu Q(u(t)), \tag{5.6$_2$}$$

$$\|\nabla\partial_t u(t)\|_{\frac{4}{4-p}} \leqslant C\|\varepsilon(\partial_t u(t))\|_{\frac{4}{4-p}} \leqslant C\,Q^{1/2}(u(t))(1+\|\nabla u(t)\|_2^2)^{\frac{2-p}{4}} \tag{5.6$_3$}$$

Теперь из (5.4), (5.5) и (5.6$_3$) с учетом оценки (4.5) выводим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|\partial_t u(t)\|_2^2 + 2\nu Q(u(t)) &\leqslant C\|\nabla u(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|^{\frac{2(p-1)}{p}}\\ &\times Q^{\frac{1}{p}}(u(t))(1+\|\nabla u(t)\|_2^2)^{\frac{2-p}{2p}} + \|\partial_t g(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2\\ &\leqslant \|\partial_t g(t)\|_2\|\partial_t u(t)\|_2 + C\,\Phi_2(1+\Phi_2^2)^{\frac{2-p}{2p}}Q^{1/p}(u(t))\|\partial_t u(t)\|_2^{\frac{2(p-1)}{p}}\end{aligned}$$

После применения неравенства Юнга получим соотношение

$$\partial_t\|\partial_t u(t)\|_2^2+\nu Q(u(t))\leqslant\tilde{\Phi}_2[\|\partial_t g(t)\|_2^2+\|\partial_t u(t)\|_2^2],\tag{5.7}$$

в котором мажоранта $\tilde{\Phi}_2$ зависит от тех же аргументов, что и Φ_2. Умножая неравенство (5.7) на t и учитывая оценки (4.5), (5.6_1) и (5.6_3), выводим неравенство (1.13_1) для галеркинских приближений. В результате предельного перехода приходим к оценке (1.13_1).

В силу (5.3) утверждение (1.13_2) будет доказано, если мы покажем, что

$$v\in C(\bar{I}_\delta;H^1),\quad\forall\delta>0.\tag{5.8}$$

Отметим мультипликативное неравенство

$$\|\nabla v(t)\|_{\frac{4}{p}}\leqslant C\|\nabla^2 v(t)\|^{\theta}_{\frac{4}{4-p}}\|\nabla v(t)\|_2^{1-\theta},\quad\theta=\frac{2-p}{p}.\tag{5.9}$$

Таким образом, в силу (1.10) и (5.9), имеем при $t_1,t_2\in\bar{I}$ следующую оценку

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\|\nabla v(t)\|^2_{\frac{4}{p}}dt\right|^{1/2}\leqslant C\|\nabla v\|^{1-\theta}_{2,\infty}\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\|\nabla^2 v(t)\|^{2\theta}_{\frac{4}{4-p}}dt\right|^{1/2}$$
$$\leqslant C\Phi_2^{1-\theta}\left(\int\limits_0^T\|\nabla^2 v(t)\|^2_{\frac{4}{4-p}}dt\right)^{\frac{1}{2\theta}}|t_2-t_1|^{\frac{1-\theta}{2}}\leqslant C\Phi_2|t_2-t_1|^{\frac{p-1}{p}}.\tag{5.10}$$

Итак, мы получили, что $\nabla v\in L_2(I;L_{\frac{4}{p}}(\Omega;\mathbb{R}^4))$. Но в силу ($1.13_1$) $\partial_t\nabla v\in L_2(I_\delta;L_{\frac{4}{4-p}}(\Omega;\mathbb{R}^4))$ для любого $\delta>0$. А поскольку при $1<p<2$

$$L_{\frac{4}{4-p}}(\Omega;\mathbb{R}^4)\subset L_2(\Omega;\mathbb{R}^4)\subset L_{(\frac{4}{4-p})'}(\Omega;\mathbb{R}^4)=L_{\frac{4}{p}}(\Omega;\mathbb{R}^2),\tag{5.11}$$

то (см., например, [11]) $\nabla v\in C(\bar{I}_\delta;L_2(\Omega;\mathbb{R}^4))$. Отсюда вытекает утверждение (5.8). Теорема 1.2 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3. Положим

$$S\equiv\sup_{m\geqslant 1}\{\|a^m\|_2+\|\nabla a^m\|_2\}.$$

Мы можем считать, что

$$a^m \to a \text{ в } H. \tag{5.12}$$

Воспользуемся оценкой (4.9), полагая $v^1 = v^m$ и $v^2 = v$. После интегрирования по t будем иметь

$$\begin{aligned} \|v^m(t) - v(t)\|_2^2 &\leqslant \|a^m - a\|_2^2 \\ &\times \exp\left\{ C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{p-1}} \sup_{t\in I}[1 + \|\nabla v^m(t)\|_2^2 + \|\nabla v(t)\|_2^2]^{\frac{1}{p-1}} T \right\} \\ &\leqslant (\text{см.}(1.10)) \leqslant \|a^m - a\|_2 \Phi_4(T, S, \|g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}, \nu_1),\ t \in \bar{I} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Из (5.12), (5.13) следует, что

$$v^m \to v \quad \text{в} \quad C(\bar{I}; H). \tag{5.14}$$

Благодаря оценке (1.10), мы имеем

$$\begin{aligned} &\|\nabla v^m\|_{2,\infty} + \left(\int\limits_{Q_T} \frac{|\nabla \varepsilon(v^m)|^2}{(1 + |\varepsilon(v^m)|)^{2-p}} dx\, dt \right)^{1/2} \\ &+ \|\nabla^2 v^m\|_{p,p} + \|\nabla^2 v^m\|_{\frac{4}{4-p},2} + \|\partial_t v^m\|_{2,2} \leqslant \Phi_2(T, S, \|g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}, \nu_1). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности и учитывая (5.14), получаем, что

$$\begin{aligned} &\nabla v^m \to \nabla v \text{ в } L_p(\Omega; \mathbb{R}^4) \\ &\nabla v^m \to \nabla v \text{ п.в. } Q_T. \end{aligned}$$

Далее, справедливо следующее мультипликативное неравенство

$$\|\nabla v^m(t)\|_{2p} \leqslant C \|\nabla^2 v^m(t)\|_p^{1/2} \|v^m(t)\|_2^{1/2},$$

которое вместе с оценкой (5.15) влечет

$$\|\nabla v^m\|_{2p,2p} \leqslant C \|\nabla v^m\|_{2,\infty}^{1/2} \|\nabla^2 v^m\|_{p,p}^{1/2} \leqslant C\Phi_2.$$

Поскольку $2p > 2$, выводим отсюда, что

$$\nabla v^m \to \nabla v \text{ в } L_2(Q_T; \mathbb{R}^4). \tag{5.16}$$

Благодаря оценке (5.10) при $t_1 = 0$ и $t_2 = T$, мы имеем

$$\|\nabla v^m\|_{\frac{4}{p},2} \leqslant C\Phi_2 T^{\frac{p-1}{p}}.$$

С другой стороны, мы знаем (см. (1.13_1)), что

$$\|\sqrt{t}\partial_t \nabla v^m\|_{\frac{4}{4-p},2} \leqslant \Phi_3(T, S, \|g\|_{2r,p'}, \|\sqrt{t}\partial_t g\|_{2,2}, \nu^{-1}, \nu_1).$$

Поэтому в силу (5.11) (см. [11]) для всех $t_2, t_1 > 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2}(\|\nabla v^m(t_2)\|_2^2 - \|\nabla v^m(t_1)\|_2^2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\partial_t \nabla v^m(t), \nabla v^m(t))dt. \tag{5.17}$$

Теперь из (5.10) при $v = v^m$ и (5.17) при $t_1 = t \in \bar{I}_\delta$, $t_2 = t+\Delta \in \bar{I}_\delta$ следует оценка

$$\begin{aligned} |\|\nabla v^m(t+\Delta)\|_2^2 - \|\nabla v^m(t)\|_2^2| &\leqslant 2\left|\int\limits_t^{t+\Delta} \|\partial_t \nabla v^m(\theta)\|_{\frac{4}{4-p}} \|\nabla v^m(\theta)\|_{\frac{4}{p}} d\theta\right| \\ &\leqslant 2\left(\int\limits_\delta^T \|\nabla \partial_t v^m(t)\|^2_{\frac{4}{4-p}}\, dt\right)^{1/2} \left|\int\limits_t^{t+\Delta} \|\nabla v^m(\theta)\|^2_{\frac{4}{p}} d\theta\right|^{1/2} \\ &\leqslant \frac{C}{\sqrt{\delta}}\, \Phi_3 \Phi_2 |\Delta|^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

которая влечет предкомпактность последовательности

$\{t \mapsto \|\nabla v^m(t)\|_2^2\}_{m=1}^\infty$ в $C(\bar{I}_\delta)$. Выбирая, если это необходимо, подпоследовательность, заключаем, что

$$\|\nabla v^m(t)\|_2^2 \to \beta(t) \equiv (\text{см.}(5.16)) \equiv \|\nabla v(t)\|_2^2. \tag{5.18}$$

Далее рассуждаем так же, как и при доказательстве утверждения (5.1), заменяя в (5.2) u на v^m и w на $w_{,k}$. Таким образом, мы имеем оценку

$$A^m(t,\Delta,w) \equiv |(\nabla v^m(t+\Delta) - \nabla v^m(t), \nabla w)| \leqslant \|\nabla^2 w\|_\infty \\ \times \left[\left| \int\limits_t^{t+\Delta} \|\nabla v^m(\theta)\|_2 \|v^m(\theta)\|_2 d\theta \right| + \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \int\limits_\Omega |g(\theta)| dx\, d\theta \right| \right] \\ + \|\nabla^3 w\|_\infty \left| \int\limits_t^{t+\Delta} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^m(t))) \right| dx\, d\theta \right|$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $t, t+\Delta \in \bar{I}$ и $w \in \hat{J}^\infty$. Условия (1.2_4), (1.9_1), оценки (1.8_1), (1.10) влекут неравенство

$$A^m(t,\Delta,w) \leqslant \Phi_6(T, S, \|g\|_{2r,p'}, \nu^{-1}, \nu_1)[|\Delta| + |\Delta|^{\frac{1}{p}}]\|\nabla^3 w\|_\infty$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $t+\Delta$, $t \in \bar{I}$ и всех $w \in \hat{J}^\infty$. Известные рассуждения (см., например, [10]) показывают, что последовательность $\{t \mapsto (\nabla v^m(t), \nabla w)\}_{m=1}^\infty$ предкомпактна в $C(\bar{I})$ для всякого фиксированного $w \in \hat{J}^\infty$. И наконец, согласно (5.15) заключаем, что

$$(\nabla v^m(t), \nabla w) \to (\nabla v(t), \nabla w) \text{ в } C(\bar{I}), \quad \forall w \in H^1,$$

по крайней мере для подпоследовательности. Благодаря (1.13_2) получаем отсюда, что

$$(\nabla v^m(t), \nabla v(t)) \to \|\nabla v(t)\|_2^2 \quad \text{в} \quad C(\bar{I}). \tag{5.19}$$

Таким образом, в силу (5.18) и (5.19) мы имеем

$$\sup_{\delta \leqslant t \leqslant T} \|\nabla v^m(t) - \nabla v(t)\|_2^2 \\ = \sup_{\delta \leqslant t \leqslant T} \{\|\nabla v^m(t)\|_2^2 - \|\nabla v(t)\|_2^2 + 2(\nabla v^m(t) - \nabla v(t), \nabla v(t))\} \\ \leqslant \sup_{\delta \leqslant t \leqslant T} |\|\nabla v^m(t)\|_2^2 - \|\nabla v(t)\|_2^2| \\ + 2 \sup_{\delta \leqslant t \leqslant T} |(\nabla v^m(t) - \nabla v(t), \nabla v(t))| \longrightarrow 0 \text{ при } m \to +\infty.$$

Итак, по крайней мере для подпоследовательности утверждение (1.15) доказано. Но в силу единственности решения оно будет справедливым и для всей последовательности $\{v^m\}_{m=1}^\infty$. Теорема 1.3 доказана.

§6. Доказательство Леммы 1.1

Пусть $t_2 > t_1 > 0$. Возьмем какие-либо числа T и δ так, чтобы $T \geqslant t_2 > t_1 \geqslant \delta > 0$. Вернемся к галеркинским приближениям, т.е. к задаче (3.1_k), $k = 1,2$. Доказывая Теоремы 1.1 и 1.2, мы установили следующие факты:

$$(\nabla v^N(t), \nabla w) \to (\nabla v(t), \nabla w) \text{ в } C(\bar{I}),\ \forall w \in H^1, \qquad (6.1_1)$$

$$\nabla v^N \to \nabla v \text{ п.в. в } Q_T \qquad (6.1_2)$$

и

$$\|\nabla v^N\|_{2,\infty} + \|\nabla^2 v^N\|_{p,Q_T} + \|\nabla^2 v^N\|_{\frac{4}{4-p},2} \leqslant \Phi_2(T, \|\nabla a\|_2, T^{1/p'}\|f\|_{2r}, \nu^{-1}, \nu_1), \qquad (6.2_1)$$

$$\|\sqrt{t}\nabla\partial_t v^N\|_{\frac{4}{4-p},2} \leqslant \Phi_3(T, \|\nabla a\|_2, T^{\frac{1}{p'}}\|f\|_{2r}, 0, \nu^{-1}, \nu_1). \qquad (6.2_2)$$

Как и при доказательстве Теоремы 1.3 выводим из (6.2_1) оценку

$$\|\nabla v^N\|_{2p,2p} \leqslant C\Phi_2,$$

которая вместе с (6.1_2) влечет

$$\nabla v^N \to \nabla v \text{ в } L_2(Q_T; \mathbb{R}^4). \qquad (6.3)$$

Используя аргументы, приведенные в предыдущем параграфе, покажем, что последовательность $\{t \mapsto \|\nabla v^N(t)\|_2^2\}_{N=1}^{\infty}$ предкомпактна в $C(\bar{I}_\delta)$. Действительно (см. (5.10), (6.2_k), $k = 1,2$), мы имеем

$$\big|\|\nabla v^N(t+\Delta)\|_2^2 - \|\nabla v^N(t)\|_2^2\big| = 2\left|\int\limits_t^{t+\Delta} (\nabla\partial_t v^N(\theta), \nabla v^N(\theta))d\theta\right|$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_\delta^T \|\nabla\partial_t v^N(t)\|_{\frac{4}{4-p}}^2\, dt\right)^{1/2} \left|\int\limits_t^{t+\Delta} \|\nabla v^N(\theta)\|_{\frac{4}{p}}^2 d\theta\right|^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{C}{\sqrt{\delta}}\Phi_3\Phi_2|\Delta|^{\frac{p-1}{p}}, \quad t, t+\Delta \in \bar{I}_\delta.$$

Благодаря (6.3) верно соотношение

$$\|\nabla v^N(t)\|_2 \to \|\nabla v(t)\|_2 \text{ в } C(\bar{I}_\delta).$$

Повторяя рассуждения Теоремы 1.3 и используя (6.1_1), мы заключаем, что

$$v^N \to v \text{ в } C(\bar{I}_\delta; H^1). \tag{6.4}$$

В §3 была установлена оценка

$$\frac{1}{2}\partial_t \|\nabla v^N(t)\|_2^2 + \nu H(v^N(t)) \\ \leqslant \frac{C}{\nu}\|f\|_{2r}^2 \left[E^{\frac{2-p}{p}}(v^N(t)) + H^{\frac{2-p}{p}}(v^N(t))\right].$$

Применим неравенство Юнга и получим

$$\partial_t \|\nabla v^N(t)\|_2^2 + \nu H(v^N(t)) \\ \leqslant \frac{C}{\nu}\|f\|_{2r}^2 E^{\frac{2-p}{p}}(v^N(t)) + C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{2p-2}} \|f\|_{2r}^{p'}.$$

Из теоремы вложения и из (3.22), (3.28) вытекает неравенство

$$\|\nabla v^N(t)\|_2 \leqslant C\|\nabla \varepsilon(v^N(t))\|_p \leqslant CH^{1/2}(v^N(t))E^{\frac{2-p}{2p}}(v^N(t)) \\ \leqslant CH^{1/2}(v^N(t))(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2)^{\frac{2-p}{4}},$$

которое влечет оценку

$$H(v^N(t)) \geqslant C\frac{\|\nabla v^N(t)\|_2^2}{(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \geqslant C[(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2)^{\frac{p}{2}} - 1].$$

Таким образом, с учетом (3.28) будем иметь

$$\partial_t \|\nabla v^N(t)\|_2^2 + C\nu(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2)^{p/2} \\ \leqslant C\nu + C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{2p-2}} \|f\|_{2r}^{p'} + \frac{C}{\nu}\|f\|_{2r}^2(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2)^{\frac{2-p}{2}}.$$

Еще раз применяем неравенство Юнга для оценки правой части последнего неравенства

$$\partial_t(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2) + C\nu(1+\|\nabla v^N(t)\|_2^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant C\nu + C\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{2p-2}} \|f\|_{2r}^{p'}.$$

Интегрируя последнее неравенство по t на промежутке $[t_1,t_2]$ и переходя к пределу с учетом (6.3) и (6.4), устанавливаем окончательное неравенство

$$y(t_2)-y(t_1)+C\nu\int\limits_{t_1}^{t_2} y^{p/2}(t)dt \leqslant C[\nu+\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{2p-2}}\|f\|_{2r}^{p'}](t_2-t_1) \quad (6.5)$$

для всех $t_2>t_1>0$, где $y(t)\equiv 1+\|\nabla v(t)\|_2^2$. Отметим, что неравенство (6.5) справедливо и при $t_1=0$ (см. (1.13_2)). Положим

$$\alpha\equiv C\nu,\ \beta\equiv C\left[\nu+\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{2p-2}}\|f\|_{2r}^{p'}\right],\ \gamma\equiv y(0).$$

Тогда неравенство (6.5) можно переписать в виде

$$y(t_2)-y(t_1)+\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2} y^{p/2}(t)dt\leqslant \beta(t_2-t_1),\ t_2\geqslant t_1\geqslant 0. \quad (6.6)$$

Рассмотрим два случая. В первом из них:

$$\exists t_0\geqslant 0:\ y(t_0)\leqslant\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}}. \quad (6.7)$$

Покажем, что из (6.7) следует, что

$$y(t)\leqslant\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/p}\ \text{для всех}\ t\geqslant t_0. \quad (6.8)$$

Действительно, предположим, что существует точка $t_2>t_0$ такая, что $y(t_2)>\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/p}$. В силу непрерывности функции $t\mapsto y(t)$ и условия (6.7) найдется точка $t_1\in[t_0,t_2[$ такая, что

$$y(t_1)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}},\quad y(t)>\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}}\ \text{для всех}\ t_1<t\leqslant t_2. \quad (6.9)$$

Согласно (6.6) и (6.9) для этих двух точек мы имеем неравенство

$$\beta(t_2-t_1)\geqslant y(t_2)-y(t_1)+\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2} y^{p/2}(t)dt>y(t_2)-y(t_1)+\beta(t_2-t_1),$$

и, следовательно, $y(t_2) < y(t_1) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/p}$, что противоречит предположению относительно точки t_2.

Во втором случае должно быть:

$$y(t) > \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}} \text{ для всех } t \geqslant 0. \tag{6.10}$$

Но тогда из (6.6) и (6.10) следует, что

$$0 < y(t_2) < y(t_1) \text{ для всех } t_2 > t_1 \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) \equiv C_0 < +\infty$. Положим $t_2 = t$ и $t_1 = 0$ в (6.6)

$$\frac{y(t)-\gamma}{t} + \alpha \frac{1}{t}\int\limits_0^t y^{p/2}(\theta)d\theta \leqslant \beta. \tag{6.11}$$

В силу правила Лопиталя

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t y^{p/2}(\theta)dt = \lim_{t\to+\infty} y^{p/2}(t) = C_0^{p/2}.$$

Таким образом, из (6.11) следует, что

$$\alpha C_0^{p/2} \leqslant \beta \Longrightarrow C_0 \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/p}.$$

Итак, мы можем утверждать, что если неотрицательная непрерывная функция y удовлетворяет неравенству (6.6), то существует число $T \geqslant 0$ такое, что $y(t) \leqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/p}$ при всех $t \geqslant T$. Другими словами, для любого $a \in H^1$ существует число $T(a) \geqslant 0$ такое, что

$$\|\nabla V_t(a)\|_2^2 \leqslant C\left[1 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3p-2}{2p-2}} \|f\|_{2r}^{p'}\right]^{2/p}.$$

Остается положить $c_* = C$.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Возможны два случая:

$$1+\|\nabla V_t(a)\|_2^2 \leqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}}$$

и

$$1+\|\nabla V_t(a)\|_2^2 > 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

В первом случае

$$\|\nabla V_t(a)\|_2^2 \leqslant c_*\left[1+\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3p-2}{2p-2}}\|f\|_{2r}^{p'}\right]^{2/p}.$$

Во втором случае в силу (6.7) и (6.8) мы имеем

$$1+\|\nabla V_\theta(a)\|_2^2 > \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/p} \quad \text{для всех } 0\leqslant\theta\leqslant t.$$

Но тогда неравенство (6.6) влечет

$$\begin{aligned}\beta t \geqslant \|\nabla V_t(a)\|_2^2 - \|\nabla a\|_2^2 + \alpha\int\limits_0^t (1+\|\nabla V_\theta(a)\|_2^2)^{p/2}\,d\theta \\ \geqslant \|\nabla V_t(a)\|_2^2 - \|\nabla a\|_2^2 + \beta t,\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|\nabla V_t(a)\|_2^2 \leqslant \|\nabla a\|_2^2 \leqslant \sup_{a\in B}\|\nabla a\|_2.$$

Лемма 1.1 доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS, грант No. 94–1376, и РФФИ, грант No. 96–01–00824.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *О нелинейных проблемах механики сплошных сред.* — Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1996) (1968), 560–573, Москва, Наука.
2. О. А. Ладыженская, *Новые уравнения для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и глобальная разрешимость краевых задач для них.* — Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова **102** (1967), 85–104.

3. О. А. Ладыженская, *О некоторых модификациях уравнений Навье-Стокса для больших градиентов скоростей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **7** (1968), 126–154.
4. O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On global stability of the two-dimensional visco-plastic flows.* — Jyväskyllä – St.-Petersburg Seminar on PDE's and Numerical Methods, Ber. Univ. Jyväskyllaä Math. Inst. **56** (1993), 43–52.
5. O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On semigroups generated by initial boundary value problems describing two-dimensional visco-plastic flows. Nonlinear evolution equations.* — Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2 **164** (1995), 99–123.
6. J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta M. Råoužička, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolution Partial Differential Equations.*
7. O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations, Lenzioni Lincee.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1991.
8. О. А. Ладыженская, *Некоторые дополнения и уточнения к моим публикациям по теории аттракторов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **182** (1990), 102–112.
9. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М, 1967.
10. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. I-ое изд..* М, 1959.
11. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М, Мир, 1978.

Seregin G. A. On attractors for equations describing the flow of generalized Newtonian fluids.

We consider initial-boundary value problems for equations

$$\partial_t v + (\nabla v)v - \operatorname{div}\sigma = g - \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0,$$
$$\sigma = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)), \quad v\big|_{t=0} = a,$$

describing the $2D$ flow of generalized Newtonian fluids under periodical boundary conditions. It is supposed that $D(\varepsilon) \sim |\varepsilon|^p$ for $|\varepsilon| \gg 1$ and $1 < p < 2$. Under some additional restrictions imposed on the vector-valued field g and the dissipative potential D existence of a global solution for initial data having the finite L_2-norm ($\|a\|_2 < +\infty$) is proved. If $\|\nabla a\|_2 < +\infty$ and $\frac{3}{2} \leqslant p < 2$, this solution is strong and unique. Strong solution exists and is unique for all $1 < p < 2$. The last result allows to define a semigroup of solution operators and to prove that it is of class I and possesses of a compact minimal global $\mathcal{B}$-attractor.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стекова РАН

Поступило 7 апреля 1997 г.