Н. И. Абаренкова, А. Г. Изергин, А. Г. Пронько

КОРРЕЛЯТОРЫ ПЛОТНОСТЕЙ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА

Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской

1. Введение

Модель Хаббарда [1] является одной из основных в современной теории сильно взаимодействующих электронов (см. например книгу [2]). Гамильтониан модели с химическим потенциалом h во внешнем постоянном магнитном поле B описывает взаимодействие фермионов (ближайших соседей) на одномерной периодической решетке длины L:

$$\begin{aligned} H_U = &-\sum_{x=1}^{L}\sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow}\left(c^\dagger_{x,\alpha}c_{x-1,\alpha}+c^\dagger_{x-1,\alpha}c_{x,\alpha}\right) \\ &+h\sum_{x=1}^{L}(n_{x,\uparrow}+n_{x,\downarrow})-B\sum_{x=1}^{L}(n_{x,\uparrow}-n_{x,\downarrow})+U\sum_{x=1}^{L}n_{x,\uparrow}n_{x,\downarrow}. \end{aligned}$$

Здесь $c_{x,\alpha}$ и $c^\dagger_{x,\alpha}$ ($x=1,\dots,L$; $\alpha=\uparrow,\downarrow$; $c_{0,\alpha}\equiv c_{L,\alpha}$; $c^\dagger_{0,\alpha}\equiv c^\dagger_{L,\alpha}$) канонические фермионные поля с антикоммутационными соотношениями $[c_{x,\alpha},c^\dagger_{y,\beta}]_+=\delta_{x,y}\delta_{\alpha,\beta}$ (остальные антикоммутаторы равны нулю). Локальные операторы плотностей электронов со спином вверх ($\alpha=\uparrow$) и вниз ($\alpha=\downarrow$) суть $n_{x,\alpha}=c^\dagger_{x,\alpha}c_{x,\alpha}$. Решение этой модели с помощью двухкомпонентного анзатца Бете [3, 4] было дано в [5].

Температурные корреляционные функции модели определяются стандартным образом. Например, корреляторы плотностей на конечной решетке длины L задаются формулой

$$\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T,L)}=\frac{\mathrm{Sp}\left[e^{-H_U/T}n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\right]}{\mathrm{Sp}\left[e^{-H_U/T}\right]}, \qquad (1)$$

где, как обычно, зависимость оператора от времени задается формулой

$$n_{x,\alpha}(t) = e^{iH_U t} n_{x,\alpha} e^{-iH_U t}.$$

След Sp берется в фоковском пространстве $\mathcal{F}$ размерности 4^L, где действует гамильтониан модели Хаббарда. Особенно интересны корреляторы в термодинамическом пределе ($L \to \infty$, h и B фиксированы):

$$\langle n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T)} = \lim_{L\to\infty} \langle n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T,L)}. \tag{2}$$

В настоящей работе представлены первые результаты нашего вычисления температурных корреляторов в модели Хаббарда в пределе бесконечно сильного отталкивания ($U \to +\infty$). В частности, нам удается получить явную простую формулу для коррелятора локальных плотностей (2) в этом пределе.

Модель Хаббарда является решеточной аналогией двухкомпонентного ферми-газа. Следует отметить, что физика модели Хаббарда при $U = +\infty$ обладает рядом интересных особенностей (см., например, [6]). В этом случае основное состояние вырождено при нулевом магнитном поле, и в точке $B = 0$ происходит фазовый переход.

Мы используем технику вычисления корреляционных функций для точно решаемых квантовых двухкомпонентных моделей с бесконесно сильным взаимодействием, развитую в работах [7, 8] на примере одномерного двухкомпонентного бозе- или ферми-газа. Основой этого подхода является использование собственных функций гамильтониана $XX0$ цепочки Гайзенберга для построения явного вида волновых функций гамильтонианов двухкомпонентных моделей при бесконечной константе связи.

2. Гамильтониан и собственные функции при $U = +\infty$

В пределе бесконечно сильного взаимодействия состояния с двойным заполнением (т.е. состояния, содержащие пару электронов с противоположными спинами хотя бы в одном узле) обладают бесконечно большой энергией и должны быть исключены из спектра. В результате, эффективный гамильтониан модели

Хаббарда в этом пределе запишется в виде [9, 10]

$$H = \mathcal{P}\Bigg[-\sum_{x=1}^{L} \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \left(c^\dagger_{x,\alpha} c_{x-1,\alpha} + c^\dagger_{x-1,\alpha} c_{x,\alpha} \right) \\ + h\sum_{x=1}^{L} (n_{x,\uparrow} + n_{x,\downarrow}) - B\sum_{x=1}^{L} (n_{x,\uparrow} - n_{x,\downarrow}) \Bigg] \mathcal{P}.$$

Проектор $\mathcal{P} = \prod_{x=1}^{L}(1 - n_{x,\uparrow} n_{x,\downarrow})$ оставляет физическое пространство $\mathcal{H}$ размерности 3^L из полного пространства $\mathcal{F}$ размерности 4^L модели Хаббарда.

Собственные функции гамильтониана H (лежащие в $\mathcal{H}$) можно построить в полной аналогии с собственными функциями одномерного двухкомпонентного ферми-газа с бесконечным взаимодействием [7, 8]

$$|\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle = \sum_{z_1,\ldots,z_N=1}^{L} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N=\uparrow,\downarrow} \chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{N,M}(z_1,\ldots,z_N|k;\lambda) \\ c^\dagger_{z_1,\alpha_1}\ldots c^\dagger_{z_N,\alpha_N}|0\rangle. \quad (3)$$

Фоковский вакуум $|0\rangle$ определяется как обычно, $c_{z,\alpha}|0\rangle = 0$, $\langle 0|c^\dagger_{z,\alpha} = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Состояния параметризуются набором k импульсов N квазичастиц, $k \equiv k_1,\ldots,k_N$, и набором M квазиимпульсов вспомогательной задачи, $\lambda \equiv \lambda_1,\ldots,\lambda_M$. Число N равно полному числу электронов в состоянии, а число M есть число электронов со спином вниз. Т.о., среди величин α в (3) M имеют значения $\downarrow$, а остальные $N-M$ имеют значения $\uparrow$. Импульсы k и квазиимпульсы λ не произвольны, а должны удовлетворять системе уравнений Бете (“вложенный анзац Бете”) [3–5], которая при $U = +\infty$ приводится к виду:

$$e^{ik_aL} = e^{i\Lambda}, \qquad a = 1,\ldots,N,$$
$$e^{i\lambda_bN} = (-1)^{M+1}, \qquad a = 1,\ldots,M,$$

где

$$\Lambda \equiv \sum_{b=1}^{M} \lambda_b.$$

Эта система явно решается; уравнения разделяются подстановкой

$$k_a = \tilde{k}_a + \frac{\Lambda}{L}. \quad (4)$$

Разрешенные значения импульсов суть

$$(\tilde{k}_a)_j = \frac{2\pi}{L} j, \qquad j = 0, \ldots, L-1, \tag{5}$$

$$(\lambda_b)_l = \frac{2\pi}{N}\left(-\frac{N}{2} + \frac{1+(-1)^{N-M}}{4} + l\right), \qquad l = 0, \ldots, N-1. \tag{6}$$

Волновая функция $\chi_{N,M}$ дается формулой

$$\chi_{N,M}^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(z_1,\ldots,z_N|k;\lambda) = \frac{1}{N!}\left[\sum_P \xi_{N,M}^{\alpha_{P_1}\ldots\alpha_{P_N}}(\lambda)\theta(z_{P_1} < \cdots < z_{P_N})\right] \det{}_N\{e^{ik_a z_b}\}.$$

Суммирование ведется по перестановкам N элементов, $P : (1,\ldots,N) \to (P_1,\ldots,P_N)$; функция $\theta(z_1 < \cdots < z_N)$ равна 1, если $z_1 < \cdots < z_N$ и равна нулю в других случаях. Определитель $\det_N\{e^{ik_a z_b}\}$ означает определитель матрицы размерности $N \times N$ с матричными элементами $e^{ik_a z_b}$. Спиновая часть волновой функции представляет собой компоненты 2^N-мерного вектора $|\xi_{N,M}(\lambda))$, в качестве которого мы используем, по аналогии с ферми-газом [7, 8], собственный вектор гамильтониана $XX0$ цепочки Гейзенберга (см., например, [11]):

$$|\xi_{N,M}(\lambda)) = \sum_{n_1,\ldots,n_M=1}^{N} \varphi_{N,M}(n_1,\ldots,n_M|\lambda)\ \sigma^-_{(n_1)}\ldots\sigma^-_{(n_M)}|\Uparrow_N),$$

с волновой функцией

$$\varphi_{N,M}(n_1,\ldots,n_M|\lambda) = \frac{1}{M!}\left[\prod_{1\leqslant j<l\leqslant N}\operatorname{sgn}(n_l - n_j)\right]\ \det{}_M\{e^{i\lambda_a n_b}\},$$

Матрицы Паули определены как обычно,

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вспомогательный вакуум $|\Uparrow_N)$ спиновой цепочки из N узлов есть вектор, который, по определению, аннигилируется всеми локальными матрицами $\sigma^+_{(n)}$ $(n = 1,\ldots,N)$:

$$\sigma^+_{(n)}|\Uparrow_N) = 0, \qquad (\Uparrow_N|\sigma^-_{(n)} = 0, \qquad (\Uparrow_N|\Uparrow_N) = 1,$$

т.е.,

$$|\Uparrow_N) = \otimes_{n=1}^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_n .$$

Собственные значения на собственном векторе (3) есть

$$H\ |\Psi_{N,M}(k,\lambda)\rangle = E_{N,M}(k)\ |\Psi_{N,M}(k,\lambda)\rangle,$$
$$E_{N,M}(k) = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon(k_a) - hN + B(N-2M),$$
$$\varepsilon(k_a) = -2\cos k_a = -2\cos\left(\tilde{k}_a + \frac{\Lambda}{L}\right).$$

Т.о., собственные значения энергии зависят от $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ только через их сумму Λ, что существенно используется в нашем подходе.

Векторы состояния $|\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle$ составляют полный ортогональный набор состояний в физическом пространстве $\mathcal{H}$ (размерности 3^L); они нормированы как

$$\langle\Psi_{N,M}(k;\lambda)|\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle = L^N N^M.$$

Эффект бесконечно сильного взаимодействия состоит в сужении действия всех операторов модели Хаббарда на пространство $\mathcal{H}$. В дальнейшем все операторы рассматриваются как операторы в этом пространстве. В частности, для единичного оператора в $\mathcal{H}$ имеем, в силу полноты, разложение

$$1 = \sum_{\text{states}} |\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle \frac{1}{L^N N^M} \langle\Psi_{N,M}(k;\lambda)|, \tag{7}$$

где суммирование проводится по всем 3^L состояниям,

$$\sum_{\text{states}} \equiv \sum_{N=0}^{L} \sum_{M=0}^{N} \sum_{\substack{k_1<\cdots<k_N \\ \lambda_1<\cdots<\lambda_M}} . \tag{8}$$

Эффективный гамильтониан H как оператор в $\mathcal{H}$ задается своим спектральным представлением

$$H = \sum_{\text{states}} |\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle \frac{E_{N,M}(k)}{L^N N^M} \langle\Psi_{N,M}(k;\lambda)|,$$

а коррелятор локальных плотностей (1) должен вычислятся в пределе сильной связи по следующему рецепту

$$\langle n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T,L)} = \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{-H/T} n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0)\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-H/T}\right]},$$

где след Tr, в отличие от Sp в (1), берется в физическом пространстве $\mathcal{H}$. Например,

$$\mathrm{Tr}\left[e^{-H/T} n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0)\right] \\ = \sum_{\text{states}} \frac{e^{-E_{N,M}(k)/T}}{L^N N^M} \langle \Psi_{N,M}(k;\lambda)| n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0) |\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle.$$

Вычисление матричного элемента в последней формуле, благодаря (7), сводится к вычислению матричных элементов (формфакторов) локальных операторов $n_{x,\alpha}(t)$. Результат этого вычисления приведен в следующем разделе. Необходимо отметить, что формулы для формфакторов на конечной решетке представляют также самостоятельный интерес.

3. Матричные элементы на конечной решетке

Рассмотрим формфактор

$$\mathcal{F}_{x,\beta}(t) = \langle \Psi_{N,M}(q;\mu)| n_{x,\beta}(t) |\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle$$

(операторы $n_{x,\beta}(t)$ сохраняют квантовые числа N и M). Наборы квазиимпульсов $k = k_1,\ldots,k_N$, $\lambda = \lambda_1,\ldots,\lambda_M$ и $q = q_1,\ldots,q_N$, $\mu = \mu_1,\ldots,\mu_M$ параметризуют соответствующие векторы состояния; разрешенные значения даются формулами (4)–(6). Использование явного вида волновых функций позволяет получить следующее представление для формфактора

$$\mathcal{F}_{x,\beta}(t) = e^{-i\left(\frac{\Lambda-\Theta}{2}\right)(N-1)} \mathcal{F}_\beta \left[\det_N(D+E) - \det_N D\right] \\ \exp\left\{\sum_{b=1}^{N}(it\varepsilon(q_a) - ixq_a) - \sum_{a=1}^{N}(it\varepsilon(k_a) - ixk_a)\right\}.$$

Здесь в правой части $\Lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_M$, $\Theta = \mu_1 + \cdots + \mu_M$ и

$$\mathcal{F}_\uparrow = \det_M B, \qquad \mathcal{F}_\downarrow = \det_M(B+E) - \det_M B,$$

а $N\times N$ матрица D и $M\times M$ матрица B определены формулами

$$(D)_{ab}=\sin\left(\frac{\Lambda-\Theta}{2}\right)\cot\left(\frac{k_a-q_b}{2}\right),\qquad a,b=1,\dots,N,$$
$$(B)_{ab}=\sum_{n=1}^{N-1}e^{i(\lambda_a-\mu_b)n},\qquad a,b=1,\dots,M.$$

Матричные элементы матрицы E все равны 1, $E_{ab}=1$ (мы обозначаем E такие матрицы как размерности $N\times N$, так и размерности $M\times M$). Заметим, что $B+E=J$, где матричные элементы $M\times M$ матрицы J суть $J_{ab}=\delta_{\lambda_a,\mu_b}$. Поэтому, конечно, величины $\mathcal{F}_\beta$ легко вычислить в более явном виде; мы этого здесь использовать не будем.

Представление для формфактора позволяет вычислить нормированные средние от произведения двух локальных плотностей

$$\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(L)}_{N,M}=\frac{1}{L^N N^M}\langle\Psi_{N,M}(k;\lambda)|n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)|\Psi_{N,M}(k;\lambda)\rangle$$

Для вычисления корреляционных функций достаточно, например, иметь представления для средних с $\alpha=\beta=\uparrow$ и $\alpha=\uparrow$, $\beta=\downarrow$. Соответствующие представления получаются (в духе работ [7, 8]) в виде:

$$\langle n_{x,\uparrow}(t)n_{0,\uparrow}(0)\rangle^{(L)}_{N,M}=\frac{1}{N}\sum_{n,p=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}pn}\det{}_M Y_p$$
$$\frac{2}{1-\cos\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}\left[\det{}_N\widetilde{S}_n-\det{}_N S_n\right],\tag{9}$$
$$\langle n_{x,\uparrow}(t)n_{0,\downarrow}(0)\rangle^{(L)}_{N,M}=\frac{1}{N}\sum_{n,p=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}pn}\left[\det{}_M\widetilde{Y}_p-\det{}_M Y_p\right]$$
$$\frac{2}{1-\cos\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}\left[\det{}_N\widetilde{S}_n-\det{}_N S_n\right].\tag{10}$$

Матрицы $\widetilde{S}_n$ и S_n имеют структуру

$$\widetilde{S}_n=I+U_n\qquad S_n=I+V_n-R_n.$$

Матричные элементы матриц даются формулами

$$
\begin{aligned}
(U_n)_{ab} = & \frac{1-\cos\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}{2}\left[\frac{e_+(k_a)e_-(k_b)-e_-(k_a)e_+(k_b)}{L\sin(\frac{k_a-k_b}{2})}\right] \\
& - \frac{\sin\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}{2}\left[\frac{[e_-(k_a)]^{-1}e_-(k_b)-e_-(k_a)[e_-(k_b)]^{-1}}{L\sin(\frac{k_a-k_b}{2})}\right], \\
(V_n)_{ab} = & \frac{1-\cos\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}{2}\left[\frac{e_+(k_a)e_-(k_b)-e_-(k_a)e_+(k_b)}{L\tan(\frac{k_a-k_b}{2})}\right] \\
& - \frac{\sin\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}{2}\left[\frac{[e_-(k_a)]^{-1}e_-(k_b)-e_-(k_a)[e_-(k_b)]^{-1}}{L\tan(\frac{k_a-k_b}{2})}\right], \\
(R_n)_{ab} = & \frac{1-\cos\left(\Lambda-\frac{2\pi}{N}\right)}{2}\; g(x,t)\,\frac{e_-(k_a)e_-(k_b)}{L}.
\end{aligned}
$$

Функции $e_\pm(k)$ и $g(x,t)$ суть

$$
e_+(k) = e(k)e_-(k), \qquad e_-(k) = \exp\left(\frac{it\varepsilon(k)-ixk}{2}\right),
$$

$$
e(k) = \frac{1}{L}\sum_{\tilde q}\frac{e^{-it\varepsilon(q)+ixq}-e^{-it\varepsilon(k)+ixk}}{\tan\left(\frac{q-k}{2}\right)},
$$

$$
g(x,t) = \frac{1}{L}\sum_{\tilde q} e^{-it\varepsilon(q)+ixq}.
$$

Суммирование по $\tilde q$ (где $q=\tilde q+\frac{2\pi n}{N}$) означает суммирование по всем L значениям импульса $\tilde q$ (см. (5)). Наконец, $M\times M$ матрицы Y_p и $\widetilde Y_p$ в (9), (10) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
(Y_p)_{ab} &= \frac{1}{N^2}\sum_{n,m=1}^{N-1}\sum_{\mu} e^{i(p+m-n)\mu+im\lambda_a-in\lambda_b}, \\
(\widetilde Y_p)_{ab} &= \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{\mu} e^{i(p+m-n)\mu+im\lambda_a-in\lambda_b}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Таким образом, все величины в представлениях (9), (10) определены. Эти представления позволяют вычислить корреляционные функции операторов локальных плотностей в термодинамическом пределе.

4. Корреляторы плотностей в термодинамическом пределе

Рассмотрим корреляторы плотностей в модели Хаббарда с бесконечно сильным отталкиванием в термодинамическом пределе. Исходным пунктом для дальнейшего является представление

$$\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T)} = \lim_{L\to\infty}\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T,L)},$$

$$\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T,L)} = \frac{1}{Z^{(L)}}\sum_{\text{states}} e^{-E_{N,M}(k)/T}\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(L)}_{N,M},$$

где статсумма $Z^{(L)}$ на конечной решетке есть

$$Z^{(L)} = \sum_{\text{states}} e^{-E_{N,M}(k)/T}$$

(суммирование ведется по всем 3^L состояниям, см. (8)).

Формулы предыдущего раздела позволяют написать для коррелятора на конечной решетке следующее представление

$$\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T,L)} = \frac{1}{Z^{(L)}}\sum_{N=0}^{L}\frac{1}{N^2}\sum_{n,m,p,r=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(pn-rm)}X^{(\alpha,\beta)}_{N,p,r}\Xi_{N,n,m}. \tag{12}$$

Здесь, например,

$$X^{(\uparrow,\uparrow)}_{N,p,r} := \sum_{M=0}^{N} e^{\frac{2B}{T}M}\sum_{\lambda_1<\dots\lambda_M}\det\nolimits_M Y_{p,r},$$

где $(Y_{p,r})_{ab} = e^{-ir\lambda_a}(Y_p)_{ab}$ (матрица Y_p определена в (11)). Величина $X^{(\uparrow,\uparrow)}_{N,p,r}$ допускает представление в виде комбинации четырех определителей

$$\begin{aligned} X^{(\uparrow,\uparrow)}_{N,p,r} =& \frac{1}{2}\left[\det\nolimits_{N-1}\left(I+e^{\frac{2B}{T}}W_-\right)+\det\nolimits_{N-1}\left(I-e^{\frac{2B}{T}}W_-\right)\right]\\ &+\frac{1}{2}\left[\det\nolimits_{N-1}\left(I+e^{\frac{2B}{T}}W_+\right)-\det\nolimits_{N-1}\left(I-e^{\frac{2B}{T}}W_+\right)\right]\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}(W_\pm)_{ab} =& \left[\delta_{p-r+a-b}\pm\delta_{p-r+a-b+N}\right]\theta(p+a<N)\\ &+\left[\delta_{p-r+a-b+1}\pm\delta_{p-r+a-b-N}\right]\theta(p+a>N)\end{aligned}$$

($\delta_a \equiv \delta_{a,0}$). В аналогичном виде записываются и остальные $X^{(\alpha,\beta)}_{N,p,r}$.

Величина $\Xi_{N,n,m}$ в (12) (не зависящая от α, β) имеет вид

$$\Xi_{N,n,m} = \sum_{\tilde{k}_1<\cdots<\tilde{k}_N} \frac{2}{1-\cos\frac{2\pi(n-m)}{N}} \left[\det{}_N \widetilde{S}^{(T)}_{n,m} - \det{}_N S^{(T)}_{n,m}\right].$$

Здесь, по определению, матричные элементы задаются как

$$(S^{(T)}_{n,m})_{ab} = e^{-(\varepsilon(k_a)-h+B)/T}(S_n)_{ab}\Big|_{\Lambda=\frac{2\pi}{N}m},$$

и аналогично для матрицы $\widetilde{S}^{(T)}_{n,m}$.

Представление (12) позволяет исследовать корреляционные функции на конечной решетке с небольшим числом узлов. Наибольший интерес, однако, представляют корреляторы в термодинамическом пределе. Техника взятия этого предела (на примере одномерного двухкомпонентного газа) разработана в работе [8]. Ее применение в нашем случае приводит к следующим представлениям для корреляторов:

$$\begin{aligned}\langle n_{x,\alpha}(t) n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T)} &= \Phi^{(T)}_{\alpha\beta}(B)\\ &\times \frac{1}{\sin^2\eta}\left[\det\Big(\hat{I}+\gamma\,\hat{U}(\eta)\Big) - \det\Big(\hat{I}+\gamma\,\hat{V}(\eta)-\gamma\,\hat{R}(\eta)\Big)\right]\Bigg|_{\eta=0}\end{aligned} \qquad (13)$$

где

$$\gamma = 1 + e^{2B/T}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi^{(T)}_{\uparrow\uparrow}(B) &= \frac{1}{\gamma^2},\\ \Phi^{(T)}_{\uparrow\downarrow}(B) = \Phi^{(T)}_{\uparrow\downarrow}(B) &= \frac{\gamma-1}{\gamma^2},\\ \Phi^{(T)}_{\downarrow\downarrow}(B) &= \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2.\end{aligned} \qquad (14)$$

В правой части представления для корреляторов участвуют определители Фредгольма линейных интегральных операторов $\hat{U}(\eta)$, $\hat{V}(\eta)$ и $\hat{R}(\eta)$, действующих на функции $f(k)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ по правилу

$$(\hat{V}(\eta)\cdot f)(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} V(\eta|k,q)\, f(q)\, dq.$$

Ядра этих интегральных операторов равны

$$U(\eta|k,q) = \frac{1-\cos\eta}{2}\left[\frac{E_+(k)E_-(q)-E_-(k)E_+(q)}{2\pi\sin(\frac{k-q}{2})}\right]\vartheta(q) - \frac{\sin\eta}{2}\left[\frac{[E_-(k)]^{-1}E_-(q)-E_-(k)[E_-(q)]^{-1}}{2\pi\sin(\frac{k-q}{2})}\right]\vartheta(q),$$

$$V(\eta|k,q) = \frac{1-\cos\eta}{2}\left[\frac{E_+(k)E_-(q)-E_-(k)E_+(q)}{2\pi\tan(\frac{k-q}{2})}\right]\vartheta(q) - \frac{\sin\eta}{2}\left[\frac{[E_-(k)]^{-1}E_-(q)-E_-(k)[E_-(q)]^{-1}}{2\pi\tan(\frac{k-q}{2})}\right]\vartheta(q),$$

$$R(\eta|k,q) = \frac{1-\cos\eta}{2}\;G(x,t)\,\frac{E_-(k)E_-(q)}{2\pi}\,\vartheta(q).$$

Фермиевский вес $\vartheta(q)$ есть

$$\vartheta(q) = \frac{e^{-B/T}}{2\cosh\frac{B}{T}+e^{(\varepsilon(q)-h)/T}}. \tag{15}$$

Функции $E_\pm$ и G (термодинамические пределы функций $e_\pm$ и g, соответственно), не зависят от η и даются формулами

$$E_+(k) = E(k)E_-(k), \qquad E_-(k) = \exp\left(\frac{it\varepsilon(k)-ixk}{2}\right),$$

$$E(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-it\varepsilon(q)+ixq}-e^{-it\varepsilon(k)+ixk}}{\tan\left(\frac{q-k}{2}\right)},$$

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-it\varepsilon(q)+ixq}.$$

Множитель перед квадратной скобкой в представлении (13) сингулярен при $\eta=0$. Разлагая определители по формуле Фредгольма, легко видеть, что эта сингулярность на самом деле сокращается. При этом вклад в коррелятор дают лишь фредгольмовы миноры не выше второго порядка. С учетом этого, получаем окончательный ответ для корреляторов в термодинамическом пределе

$$\langle n_{x,\alpha}(t)n_{0,\beta}(0)\rangle^{(T)} = \Phi^{(T)}_{\alpha\beta}(B)\;\mathcal{G}^{(T)}(x,t;h,B),$$

где величины $\Phi^{(T)}_{\alpha\beta}(B)$ (14) зависят только от температуры и внешнего поля, а универсальная для всех четырех корреляторов функция $\mathcal{G}^{(T)}$ есть

$$\mathcal{G}^{(T)}(x,t;h,B) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \vartheta(k)\right)^2 - \left|\frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \vartheta(k)\, e^{it\varepsilon(k)-ixk}\right|^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{-it\varepsilon(k)+ixk}\right)\left(\frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dk\, \vartheta(k)\, e^{it\varepsilon(k)-ixk}\right).$$

Здесь $\vartheta(k)$ есть фермиевский вес (15); параметр $\gamma = 1+\exp(2B/T)$. Одночастичная дисперсия $\varepsilon(k) = -2\cos k$. Полученный простой ответ для корреляторов локальных плотностей и есть основной результат нашей работы. Заметим, что, например, в пределе $B \to -\infty$, $h \to -\infty$, так что $h - B = h_0$ фиксировано, все корреляторы, кроме $\langle n_{x,\uparrow}(t) n_{0,\uparrow}(0)\rangle^{(T)}$, стремятся к нулю, а для отличного от нуля коррелятора воспроизводится известный ответ для однокомпонентных моделей (см., например, [12, 11]).

Наш подход применим для вычисления и других температурных корреляторов, в частности, корреляторов локальных фермионных операторов. В этом случае получаются ответы непосредственно обобщающие полученные ранее результаты [7, 8] для двухкомпонентного ферми-газа.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ No. 95-01-00476 и гранта INTAS-RFBR 95-0414.

1. J. Hubbard, — Proc. Roy. Soc. (London) **276** (1963), 238.
2. V. E. Korepin, F. H. L. Eßler (editors), *Exactly solvable models of strongly correlated electrons.* Singapore, World Scientific, 1994.
3. C. N. Yang, *Some exact results for the many body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction.* — Phys. Rev. Lett. **19**, 1312–1315.
4. M. Gaudin, *Un système à une dimension de fermions en interaction.* — Phys. Lett. **24A** (1967), 55–56.
5. E. H. Lieb, F. Y. Wu, *Absence of Mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension.* — Phys. Rev. Lett. **20** (1968), 1445–1448.
6. H. Frahm, V. E. Korepin, *Correlation functions of the one-dimensional Hubbard model in a magnetic field.* — Phys. Rev. **43B** (1991), 5653–5662.

7. A. G. Izergin, A. G. Pronko, *Correlators in the one-dimensional two-component Bose and Fermi gases.* to be published in Phys. Lett. **A**.
8. A. G. Izergin, A. G. Pronko, *Temperature correlators in the two-component one-dimensional gas.* — PDMI preprint 19/1997, St. Petersburg, 1997. pp. 39, (submitted to Nucl. Phys. **B**).
9. A. Mielke, — Journ. Stat. Phys. **62** (1991), 509-528.
10. S. Sarkar, *The supersymmetric $t-J$ model in one dimension.* — Journ. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991), 1137–1151.
11. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Temperature correlation functions of the XX0 Heisenberg chain. I.* — Theor. Math. Phys. **94** (1993), 11–38.
12. Th. Niemeier, — Physica **36** (1967), 377.

Abarenkova N. I., Izergin A. G., Pronko A. G. Correlators of densities in the one-dimensional Hubbard model.

The one-dimensional Hubbard model with the infinitely strong repulsion between electrons is considered. Explicit expressions for the two-point correlators of local densities (depending on time, temperature, chemical potential and external field) are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 ноября 1997г.