П. Н. Бибиков, П. П. Кулиш

ОПЕРАТОРЫ ДИРАКА НА КВАНТОВОЙ ГРУППЕ $SU_q(2)$ И КВАНТОВОЙ СФЕРЕ

Введение. Оператор Дирака, несомненно, является одним из ключевых понятий в подходе А. Конна к некоммутативной дифференциальной геометрии [1]. По этой причине, естественно попытаться определить оператор Дирака на квантовых группах и квантовых однородных пространствах как наиболее разработанных примерах квантовых многообразий. Как будет показано в настоящей работе, эти две задачи тесно связаны между собой.

Оператор Дирака для частного случая квантовой сферы уже предлагался в работе [5]. Основным техническим приемом при этом являлось вложение квантовой сферы в квантовое трехмерное Евклидово пространство, которое затем использовалось для того, чтобы ввести квантовые производные. Однако, полная система соотношений для q-производных и q-координат в [5] не исследована.

В предлагаемом в настоящей статье подходе дифференциальные структуры на $SU_q(2)$ и квантовой сфере вводятся согласно правому $SU_q(2)$ кодействию, вследствие чего, в обоих случаях все построения практически идентичны друг другу.

Ранее деформированные операторы Дирака для деформированных групп Пуанкаре и соответствующих q-пространств Минковского изучались в целом ряде работ (см. ссылки в [14]). Наш ковариантный подход согласуется с предложенным в [14].

Недавно методы некоммутативной геометрии были использованы для построения некоммутативного многообразия на основе обычной сферы и теории представлений группы $SU(2)$ [15]. Алгебра функций на двумерной сфере аппроксимировалась конечномерной $SU(2)$-ковариантной алгеброй. Параметр регуляризации имел при этом характер максимального спина соответствующего представления. В связи с этим, необходимо заметить, что

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 96-01-00851.

поскольку теория представлений квантовой алгебры $\mathrm{su}_q(2)$ полностью аналогична теории представлений алгебры $\mathrm{su}(2)$, то все приводимые в [15] конструкции могут быть обобщены на деформированный случай, в котором теория содержит дополнительные параметры деформации.

Статья построена следующим образом. В первых двух параграфах приводятся стандартные сведения о квантовой группе $SU_q(2)$, квантовой сфере и квантовой $\mathrm{su}_q(2)$ алгебре. В третьем параграфе на $SU_q(2)$ и $S^2_{q\mu}$ определяется алгебра векторных полей. Наконец, в четвертом параграфе приведена явная конструкция для операторов Дирака.

1. Квантовая группа $SU_q(2)$ и квантовая сфера.

Под алгеброй функций на квантовой группе $SU_q(2)$ понимается ассоциативная *-алгебра $F_q(G) = \mathrm{Fun}(SU_q(2))$ порожденная образующими a и b и соотношениями [2], $\lambda = q - \dfrac{1}{q}$:

$$
\begin{gathered}
ab = qba, \qquad ab^* = qb^*a, \qquad bb^* = b^*b, \\
a^*a - aa^* = \frac{1}{q}\lambda b^*b, \qquad aa^* + b^*b = 1_G
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где q вещественный параметр по модулю меньший единицы. Эта система уравнений может быть также записана в компактной матричной форме:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{R}T_1T_2 = T_1T_2\widehat{R}, \\
&\det{}_q T = 1_G
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $T_1 = T \otimes I_2$ и $T_2 = I_2 \otimes T$, I_2 – единичная 2×2 – матрица, а матрица генераторов T имеет вид:

$$
T = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1}{q}b^* & a^* \end{pmatrix},
\tag{3}
$$

и согласно (1) ее q-детерминант $\det_q A = aa^* + b^*b = 1$, а R-матрица

$$
\widehat{R} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & \lambda & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & q \end{pmatrix}
\tag{4}
$$

удовлетворяет уравнению Янга – Бакстера в форме группы кос:

$$
(I_2 \otimes \widehat{R})(\widehat{R} \otimes I_2)(I_2 \otimes \widehat{R}) = (\widehat{R} \otimes I_2)(I_2 \otimes \widehat{R})(\widehat{R} \otimes I_2)
\tag{5}
$$

и условию Гекке

$$\widehat{R}^2 = \lambda \widehat{R} + I_4, \tag{6}$$

где I_4 единичная 4×4 матрица.

Коумножение, коединица и антипод

$$\Delta T = T \otimes T,$$
$$(\Delta T_{ik} = \sum_j T_{ij} \otimes T_{jk}), \tag{7}$$
$$\varepsilon(T) = I_2, \tag{8}$$
$$S(T) = \begin{pmatrix} a^* & -\frac{1}{q}b \\ b^* & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

задают на $F_q(G)$ структуру алгебры Хопфа. При этом выполняется весьма полезное для дальнейшего соотношение

$$S(T)T = TS(T) = I_2 \otimes 1_G \tag{10}$$

Под алгеброй функций на квантовой двумерной сфере понимается [3] ассоциативная *-алгебра $F_q(S) = \mathrm{Fun}(S^2_{q\mu})$ порожденная генератороми x_+, x_- и x_3 и соотношениями $[N_q] = (q^N - q^{-N})/\lambda$ $(\lambda = q - q^{-1})$:

$$qx_3x_+ - \frac{1}{q}x_+x_3 = \mu x_+,$$
$$\lambda x_3^2 + \frac{1}{[2]_q}(x_+x_- - x_-x_+) = \mu x_3,$$
$$qx_-x_3 - \frac{1}{q}x_3x_- = \mu x_-. \tag{11}$$

$$x_3^2 + \frac{1}{[2]_q}(qx_-x_+ + \frac{1}{q}x_+x_-) = r^2. \tag{12}$$

$$x_+^* = x_-, \qquad x_3^* = x_3, \tag{13}$$

где r^2 – центральный элемент алгебры $F_q(S)$. При помощи матрицы состоящей из генераторов

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{q}x_3 & x_- \\ x_+ & -qx_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

эти соотношения также могут быть записаны в компактном виде

$$[\widehat{R},(M_2\widehat{R}M_2+\mu qM_2)]=0. \tag{15}$$

$$\frac{1}{[2]_q}\mathrm{tr}_qM^2=r^2. \tag{16}$$

$$M^{\dagger}=M. \tag{17}$$

где q-след, матрицы M определен согласно $\mathrm{tr}_qM=\mathrm{tr}DM$, где $D=\mathrm{diag}(q,\frac{1}{q})$ и обладает тем свойством, что [2]

$$\mathrm{tr}_qS(T)MT=\mathrm{tr}_qM. \tag{18}$$

Уравнение (15) также может быть представлено как уравнение отражения [8, 9]

$$\widehat{R}\mathbb{M}_2\widehat{R}\mathbb{M}_2=\mathbb{M}_2\widehat{R}\mathbb{M}_2\widehat{R}, \tag{19}$$

где $\mathbb{M}=\mu qI_2+\lambda M$. При этом (16) переходит в

$$\frac{1}{[2]_q}\mathrm{tr}_q\mathbb{M}^2=(\mu^2q^2+\lambda^2r^2). \tag{20}$$

Отметим, что M удовлетворяет также уравнению [9]

$$M^2+\mu M=r^2I_2, \tag{21}$$

которое можно также принять за компактную матричную запись системы (11), (12).

Все уравнения квантовой сферы (15)–(17) и (19),(20) инвариантны относительно правого $SU_q(2)$-кодействия $\varphi_R:F_q(S)\to F_q(S)\otimes F_q(G)$:

$$\begin{gathered}\varphi_R(M)=S(T)\mathbb{M}T\\ (\varphi_R(\mathbb{M}_{ij})=\sum_{kl}\mathbb{M}_{kl}\otimes S(T)_{ik}T_{lj})\end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, $F_q(S)$ является $SU_q(2)$-ковариантной квантовой алгеброй.

В пределе обычной двумерной сферы $q=1$, $\mu=0$ уравнение (12) дает:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2 \tag{23}$$

где $x_1=\frac{1}{2}(x_++x_-)$ и $x_2=\frac{1}{2i}(x_+-x_-)$.

Отметим также, что при $q = 1$, $\mu \neq 0$ уравнения (11) имеют вид определяющих соотношений алгебры Ли sl(2).

Как на $F_q(G)$, так и на $F_q(S)$ могут быть определены скалярные произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ [10, 11], $u_G, v_G \in F_q(G)$, $\quad u_S, v_S \in F_q(S)$:

$$\langle u_G, v_G\rangle_G = h_G(u_G^* v_G), \tag{24}$$

$$\langle u_S, v_S\rangle_S = h_S(u_S^* v_S), \tag{25}$$

где h_G – мера Хаара на $F_q(G)$ [10], т. е. линейный положительный функционал $h_G\colon F_q(G) \to \mathbb{C}$, инвариантный относительно копроизведения $u_G \in F_q(G)$:

$$(Id \otimes h_G)\Delta u_G = (h_G \otimes Id)\Delta u_G = h_G(u_G)1_G, \tag{26}$$

а h_S φ-инвариантная мера на $F_q(S)$ [11], $u_S \in F_q(S)$:

$$(h_S \otimes Id)\varphi_R(u_S) = h_S(u_S)1_G. \tag{27}$$

2. Квантовая алгебра $\mathrm{su}_q(2)$.

Под квантовой универсальной обертывающей алгеброй $\mathrm{su}_q(2)$ понимается *-алгебра Хопфа, задаваемая генераторами 1_U, X^+, X^- и H и соотношениями:

$$[H, X^\pm] = \pm X^\pm, \quad [X^+, X^-] = \frac{\mathrm{sh}(2hH)}{\mathrm{sh}(h)}. \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\Delta(1_U) = 1_U \otimes 1_U, \qquad \Delta(H) = H \otimes 1_U + 1_U \otimes H,\\ \Delta(X^\pm) = X^\pm \otimes e^{-hH} + e^{hH} \otimes X^\pm.\end{gathered} \tag{29}$$

$$\varepsilon(1_U) = 1, \qquad \varepsilon(H) = \varepsilon(X^\pm) = 0. \tag{30}$$

$$S(1_U) = 1_U, \qquad S(H) = -H, \qquad S(X^\pm) = -e^{-hH}X^\pm e^{hH}. \tag{31}$$

$$1_U^* = 1_U, \qquad H^* = H, \qquad (X^\pm)^* = X^\mp. \tag{32}$$

Причем h произвольный положительный вещественный параметр.

Мы, однако, будем использовать другую реализацию алгебры $\mathrm{su}_q(2)$, задаваемую генераторами $e = X^-$, $f = X^+$, $k = e^{-hH}$ и $k^{-1} = e^{hH}$. Положив $q = e^{-h}$, мы получим систему уравнений эквивалентную(28)–(32).

$$kf = qfk, \qquad ek = qke, \qquad k^2 - k^{-2} = \lambda(fe - ef) \tag{33}$$

$$\triangle k = k \otimes k, \qquad \triangle k^{-1} = k^{-1} \otimes k^{-1},$$
$$\triangle e = e \otimes k + k^{-1} \otimes e, \qquad \triangle f = f \otimes k + k^{-1} \otimes f. \tag{34}$$

$$\varepsilon(k) = \varepsilon(k^{-1}) = 1, \qquad \varepsilon(e) = \varepsilon(f) = 0 \tag{35}$$

$$S(k) = k^{-1}, \qquad S(k^{-1}) = k, \qquad S(e) = -\frac{1}{q}e, \qquad S(f) = -qf. \tag{36}$$

С помощью матриц из генераторов

$$L^{+} = \begin{pmatrix} k^{-1} & \frac{\lambda}{\sqrt{q}}f \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad L^{-} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ -\lambda\sqrt{q}e & k^{-1} \end{pmatrix} \tag{37}$$

эти уравнения также могут быть представлены в компактной матричной записи [2]:

$$\widehat{R}L_2^{\pm}L_1^{\pm} = L_2^{\pm}L_1^{\pm}\widehat{R}, \qquad \widehat{R}L_2^{-}L_1^{+} = L_2^{-}L_1^{+}\widehat{R}. \tag{38}$$

$$\triangle L^{\pm} = L^{\pm} \otimes L^{\pm}. \tag{39}$$

$$\varepsilon(L^{\pm}) = I_2. \tag{40}$$

$$S(L^{+}) = \begin{pmatrix} k & -\lambda\sqrt{q}f \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S(L^{-}) = \begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{q}}e & k \end{pmatrix}. \tag{41}$$

При этом, как и в $F_q(G)$ случае, выполняются важные соотношения:

$$L^{\pm}SL^{\pm} = SL^{\pm}L^{\pm} = 1_U \otimes I_2. \tag{42}$$

Хорошо известно [2], что элементы алгебры $\mathrm{su}_q(2)$ могут быть представлены, как линейные функционалы на $F_q(G)$. Именно, существует спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathrm{su}_q(2) \otimes F_q(G) \to \mathbb{C}$ удовлетворяющее соотношениям $u, u_1, u_2 \in \mathrm{su}_q(2)$, $v, v_1, v_2 \in F_q(G)$:

$$\langle u_1u_2, v\rangle = \langle u_1 \otimes u_2, \triangle v\rangle, \tag{43а}$$
$$\langle u, v_1v_2\rangle = \langle \triangle u, v_1 \otimes v_2\rangle, \tag{43б}$$
$$\langle u, S(v)\rangle = \langle S(u), v\rangle, \tag{43в}$$
$$\langle 1_U, v\rangle = \varepsilon(v), \tag{43г}$$
$$\langle u, 1_G\rangle = \varepsilon(u). \tag{43д}$$

На генераторах спаривание определено согласно:

$$\langle k,T\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}, \langle k^{-1},T\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{q}} \end{pmatrix},$$
$$\langle e,T\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \langle f,T\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Или в компактном виде [2]:

$$\langle L_1^{\pm}, T_2\rangle = R^{\pm}, \tag{45}$$

где

$$R^{+} = \frac{1}{\sqrt{q}}\widehat{R}\mathcal{P}, \tag{46}$$

$$R^{-} = \sqrt{q}\widehat{R}^{-1}\mathcal{P}, \tag{47}$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

представляет собой матрицу перестановки в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ такую, что для всякой 2×2 матрицы X: $X_2 = \mathcal{P}X_1\mathcal{P}$.

Элемент

$$C_q = \frac{1}{q}k^2 + qk^{-2} + \lambda fe \tag{49}$$

порождает центр $\mathrm{su}_q(2)$.

В дальнейшем существенную роль будет играть замечательная подалгебра алгебры $\mathrm{su}_q(2)$, порожденная матрицей генераторов [6–9]:

$$\mathbb{L} = L^{+}S(L^{-}) \tag{50}$$

удовлетворяющем соотношению

$$\widehat{R}\mathbb{L}_2\widehat{R}\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2\widehat{R}\mathbb{L}_2\widehat{R}, \tag{51}$$

инвариантному относительно правого $SU_q(2)$-кодействия:

$$\varphi_R(\mathbb{L}) = S(T)\mathbb{L}T \tag{52}$$

и в силу чего, являющаяся $SU_q(2)$-ковариантной квантовой алгеброй. Из явного вида

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} k^{-2} + \frac{1}{q}\lambda^2 fe & \frac{1}{\sqrt{q}}\lambda fk \\ \frac{1}{\sqrt{q}}\lambda ke & k^2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

следует что

$$C_q = \mathrm{tr}_q \mathbb{L} \tag{54}$$

и, следовательно, в силу (18), элемент C_q инвариантен относительно указанного кодействия:

$$\varphi_R(C_q) = C_q \otimes 1_G. \tag{55}$$

Введем также матрицу L_q согласно:

$$\mathbb{L} = \frac{1}{[2]_q} C_q I_2 + \frac{\lambda}{q} L_q. \tag{56}$$

Имеем

$$L_q = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} l_{q3} & l_{q-} \\ l_{q+} & -q l_{q3} \end{pmatrix}, \tag{57}$$

где

$$l_{q+} = \sqrt{q} ke, \qquad l_{q3} = \frac{1}{[2]_q}(qef - \frac{1}{q} fe), \qquad l_{q-} = \sqrt{q} fk. \tag{58}$$

Из (51), (56) и (6) следует:

$$[\widehat{R}, (L_{q2} \widehat{R} L_{q2} + \frac{qC_q}{[2]_q} L_{q2})] = 0 \tag{59}$$

или в явной форме

$$\begin{aligned} q l_{q3} l_{q+} - \frac{1}{q} l_{q+} l_{q3} &= \frac{1}{[2]_q} C_q l_{q+}, \\ \lambda l_{q3}^2 + \frac{1}{[2]_q}(l_{q+} l_{q-} - l_{q-} l_{q+}) &= \frac{1}{[2]_q} C_q l_{q3}, \\ q l_{q-} l_{q3} - \frac{1}{q} l_{q3} l_{q-} &= \frac{1}{[2]_q} C_q l_{q-}. \end{aligned} \tag{60}$$

Определим также $SU_q(2)$-инвариантный оператор Лапласа согласно:

$$\Delta_q = \frac{1}{[2]_q} \mathrm{tr}_q L_q^2. \tag{61}$$

Прямое вычисление дает:

$$\Delta_q = l_{q3}^2 + \frac{1}{[2]_q}(ql_{q-}l_{q+} + \frac{1}{q}l_{q+}l_{q-}), \tag{62}$$

а также с использованием (33):

$$\Delta_q = \frac{1}{\lambda^2[2]_q^2}(C_q + [2]_q)(C_q - [2]_q). \tag{63}$$

Система уравнений (60), (62) может быть записана в эквивалентной форме:

$$L_q^2 + \frac{C_q}{[2]_q}L_q = I_2 \otimes \Delta_q. \tag{64}$$

Как и в случае $q = 1$, неприводимые представления алгебры $\mathrm{su}_q(2)$ нумеруются значением спина $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ и соответствующие формулы имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} k \mid l,m\rangle &= q^{-m} \mid l,m\rangle, \\ e \mid l,m\rangle &= \sqrt{[l-m]_q[l+m+1]_q} \mid l,m+1\rangle, \\ f \mid l,m\rangle &= \sqrt{[l+m]_q[l-m+1]_q} \mid l,m-1\rangle, \end{aligned} \tag{65}$$

а также:

$$\begin{aligned} l_{q+} \mid l,m\rangle &= \sqrt{q^{-(2m+1)}[l-m]_q[l+m+1]_q} \mid l,m+1\rangle, \\ l_{q3} \mid l,m\rangle &= \frac{1}{[2]_q}q^{-m}(q^{l+1}[l+m]_q - q^{-(l+1)}[l-m]_q) \mid l,m\rangle, \\ l_{q-} \mid l,m\rangle &= \sqrt{q^{-(2m-1)}[l-m+1]_q[l+m]_q} \mid l,m-1\rangle \end{aligned} \tag{66}$$

и

$$C_q \mid l,m\rangle = (q^{2l+1} + q^{-(2l+1)}) \mid l,m\rangle, \tag{67}$$

$$\Delta_q \mid l,m\rangle = [l]_{q^2}[l+1]_{q^2} \mid l,m\rangle, \tag{68}$$

где каждый мультиплет $\mid l,m\rangle, \quad m = -l, -l+1, \ldots, l$ образует базис соответствующего неприводимого представления V_l.

3. $SU_q(2)$ и $S^2_{q\mu}$ как квантовые многообразия.

Описанная выше подалгебра алгебры $\mathrm{su}_q(2)$ позволяет определить квантовые алгебры векторных полей на $SU_q(2)$ и $S^2_{q\mu}$ Действительно, $F_q(G)$ и $F_q(S)$, будучи, согласно (7) и (22), правыми

$SU_q(2)$-комодулями, являются левыми $\mathrm{su}_q(2)$-модулями. Именно, для всякого $\psi \in \mathrm{su}_q(2)$ элементы $\widehat{\psi}^G$ и $\widehat{\psi}^S$ определенные согласно, $u \in F_q(G)$, $v \in F_q(S)$:

$$\widehat{\psi}^G(u) = (Id \otimes \psi)\Delta u, \qquad \widehat{\psi}^S(v) = (Id \otimes \psi)\varphi_R(v) \tag{69}$$

действуют как линейные операторы в $F_q(G)$ и $F_q(S)$. Поскольку отображения $\psi \to \widehat{\psi}^{G,S}$ являются гомоморфизмами [6, 7], то все соотношения (33), (38), (51) и (64) выполняются и для $\widehat{k}^{G,S}$, $\widehat{k}^{-1G,S}$, $\widehat{e}^{G,S}$, $\widehat{f}^{G,S}$, $\widehat{C}_q$, $\widehat{L}^{\pm G,S}$ и $\widehat{\mathbb{L}}^{G,S}$.

Мы можем рассматривать также элементы алгебр $F_q(G)$ и $F_q(S)$ как операторы левого умножения. Тогда, согласно [6, 7], имеют место перестановочные соотношения:

$$q\widehat{\mathbb{L}}_1^G T_2 = T_2 \widehat{R} \widehat{\mathbb{L}}_2^G \widehat{R}. \tag{70}$$

Аналогичный расчет в $F_q(S)$ случае приводит к соотношению:

$$\widehat{R}\mathbb{L}_2^S \widehat{R} M_2 = M_2 \widehat{R} \mathbb{L}_2^S \widehat{R}. \tag{71}$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что оператор

$$\mathcal{K} = \lambda^2 \mathrm{tr}_q M\widehat{\mathbb{L}} + \mu(1_S - \frac{\widehat{C}_q}{[2]_q}) \tag{72}$$

коммутирует как с $\widehat{\mathbb{L}}$, так и с M и при действии на 1_S дает 0.

Совместная алгебра, порожденная матрицами генераторами $\widehat{\mathbb{L}}^G$ и T и соотношениями (2), (63), (64) и (70) называется алгеброй функций на кокасательном расслоении к $SU_q(2)$ [6, 7]. Мы будем обозначать ее через $F_q(T^*G)$. Аналогично совместую алгебру, порожденную генераторами $\widehat{\mathbb{L}}^S$ и M и соотношениями (15)–(17), (63), (64) и (71), а также дополнительным соотношением

$$\mathcal{K} = 0 \tag{73}$$

мы будем называть алгеброй функций на кокасательном расслоении к квантовой сфере и обозначать $F_q(T^*S)$.

Скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G,S}$ задают эрмитово сопряжение на $F_q(T^*G)$ и $F_q(T^*S)$. Для T и M оно совпвдает с обычной инволюцией $T^\dagger = S(T)$ и $M^\dagger = M$, (3), (9), (17) и, как показано в приложении для $\widehat{L}^\pm$ имеет место формула:

$$(\widehat{L}^\pm)^\dagger = S(\widehat{L}^\mp) \tag{74}$$

(мы опять опустили индексы "G,S"), или в явном виде:

$$\widehat{k}^* = \widehat{k}, \qquad \widehat{e}^* = \widehat{f}. \tag{75}$$

Кроме того,

$$\widehat{\mathbb{L}}^\dagger = \widehat{\mathbb{L}}, \qquad \widehat{L}_q^\dagger = \widehat{L}_q, \qquad \widehat{C}_q^* = \widehat{C}_q. \tag{76}$$

Рассмотрим теперь предел $q \to 1$. Пусть

$$\widehat{L}^{G,S} = \begin{pmatrix} \widehat{l}_3^{G,S} & \widehat{l}_-^{G,S} \\ \widehat{l}_+^{G,S} & -\widehat{l}_3^{G,S} \end{pmatrix} \tag{77}$$

и $\widehat{C}^{G,S}$ определяют $\widehat{L}_q^{G,S}$ и $\widehat{C}_q$ при $q \to 1$. Прямое вычисление с использованием (69), (34), (43.б) и (44) дает:

$$\widehat{C}^{G,S} = 2, \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{l}_+^G &= a\frac{\partial}{\partial b} - b^*\frac{\partial}{\partial a^*}, \\
\widehat{l}_3^G &= \frac{1}{2}(a\frac{\partial}{\partial a} + b^*\frac{\partial}{\partial b^*} - b\frac{\partial}{\partial b} - a^*\frac{\partial}{\partial a^*}, \\
\widehat{l}_-^G &= b\frac{\partial}{\partial a} - a^*\frac{\partial}{\partial b^*},
\end{aligned} \tag{79}$$

а также

$$\widehat{l}_k^S = \frac{1}{i}\varepsilon_{kmn}x_m\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{80}$$

где ε_{kmn} обычный тензор Леви-Чивита с $\varepsilon_{123} = 1$, а $\widehat{l}_\pm^{G,S} = l_1^{G,S} \pm i\widehat{l}_2^{G,S}$. Операторы $\widehat{l}_k^{G,S}$ удовлетворяют, очевидно, стандартным su(2)-коммутационным соотношениям: $[\widehat{l}_k^{G,S}, \widehat{l}_m^{G,S}] = i\varepsilon_{kmn}\widehat{l}_n^{G,S}$, а $\widehat{\Delta}^{G,S}$ $q \to 1$ предел $\widehat{\Delta}_q^{G,S}$ дает соответствующий оператор Казимира:

$$\widehat{\Delta} = \widehat{l}_1^2 + \widehat{l}_2^2 + \widehat{l}_3^2,$$

(где мы опять опустили индексы "G,S").

4. Операторы Дирака на $SU_q(2)$ и $S^2_{q\mu}$.

Переходим теперь непосредственно к построению оператора Дирака. Поскольку все формулы далее будут иметь одинаковый вид как в $SU_q(2)$, так и в $S^2_{q\mu}$ случаях, мы будем опускать индексы "G,S".

Заметим сперва, что в соответствии с (64) мы можем взять за определение оператора Дирака оператор $\widehat{L}_q$ определенный согласно (57). Обозначим его за D_q.

$$D_q = \widehat{L}_q = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} l_{q3} & l_{q-} \\ l_{q+} & -q l_{q3} \end{pmatrix} \tag{81}$$

Пространство, в котором действует оператор D_q, есть $\mathbb{C}^2 \otimes F_q(G)$ в $SU_q(2)$-случае и $\mathbb{C}^2 \otimes F_q(S)$ в случае квантовой сферы.

Уравнение (64) дает:

$$D_q^2 + \frac{\widehat{C}_q}{[2]_q} D_q = I_2 \otimes \Delta_q. \tag{82}$$

Согласно (57) $D_q^* = D_q$ и при $q = 1$ соответствующий оператор переходит в [5]

$$D = \sum_{i=1}^{3} \sigma_k \otimes \widehat{l}_k, \tag{83}$$

где σ_k обычные матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а операторы $\widehat{l}_k$ заданы согласно (79) и (80).

Уравнения (82) и (78) дают

$$D^2 + D = I_2 \otimes \Delta \tag{84}$$

и, согласно [13], мы можем интерпретировать D как оператор Дирака на $SU(2)$ или S^2.

Для того, чтобы описать соответствующий спектр изучим подробнее структуру D_q.

Пусть $\pi_2(\mathrm{su}_q(2))$ и $\pi_{\mathrm{reg}}(\mathrm{su}_q(2))$ два представления алгебры $\mathrm{su}_q(2)$, определенные согласно, $u \in \mathrm{su}_q(2)$:

$$\pi_2(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}, \qquad \pi_2(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\pi_2(k^{-1}) = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{q}} \end{pmatrix}, \qquad \pi_2(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

и

$$\pi_{\rm reg}(u) = \widehat{u}. \tag{86}$$

Нам понадобится также их тензорное произведение $\pi_{\rm tot}$, определенное согласно:

$$\pi_{\rm tot}(u) = (\pi_2 \otimes \pi_{\rm reg})(\triangle u). \tag{87}$$

Пусть $K = \pi_{\rm tot}(k)$, $K^{-1} = \pi_{\rm tot}(k^{-1})$, $E = \pi_{\rm tot}(e)$ и $F = \pi_{\rm tot}(f)$. Прямым вычислением получим:

$$\begin{aligned}
K &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \otimes \widehat{k}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{q}} \end{pmatrix} \otimes \widehat{k}^{-1}, \\
E &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \widehat{k} + \begin{pmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{q}} \end{pmatrix} \otimes \widehat{e}, \\
F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \widehat{k} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \otimes \widehat{f}.
\end{aligned} \tag{88}$$

Операторы K, K^{-1}, E и F удовлетворяют всем соотношениям (33), а соответствующий центральный элемент

$$C_q^{\rm tot} = \frac{1}{q}K^2 + qK^{-2} + \lambda^2 FE \tag{89}$$

легко выражается через $\widehat{C}_q$ и D_q:

$$C_q^{\rm tot} = \frac{[2]_{q^2}}{[2]_q} I_2 \otimes \widehat{C}_q + \lambda^2 D_q. \tag{90}$$

В силу центральности $\widehat{C}_q$ и $C_q^{\rm tot}$ из последнего соотношения следует, что D_q также коммутирует с K, K^{-1}, E и F. Мы можем рассмотреть, таким образом, расширенную алгебру $\mathcal{A}_q$ с генераторами K, K^{-1}, E, F и D_q. В соответствии с (89), (90) $I_2 \otimes \widehat{C}_q$ также лежит в $\mathcal{A}_q$ и, согласно (82) и (63), выполняется соотношение:

$$D_q^2 + \frac{\widehat{C}_q}{[2]_q} D_q = \frac{1}{\lambda^2 [2]_q^2} I_2 \otimes (\widehat{C}_q + [2]_q)(\widehat{C}_q - [2]_q). \tag{91}$$

Мы введем также операторы

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_+ &= \pi_{\mathrm{tot}}(l_+) = \sqrt{q}KE,\\
\mathcal{L}_3 &= \pi_{\mathrm{tot}}(l_3) = \frac{1}{[2]_q}(qEF - \frac{1}{q}FE),\\
\mathcal{L}_- &= \pi_{\mathrm{tot}}(l_-) = \sqrt{q}FK
\end{aligned}
\tag{92}
$$

или в явном виде:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_+ &= \frac{1}{[2]_q}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \otimes (\widehat{C}_q - \lambda[2]_q\widehat{l}_{q3}) + I_2 \otimes \widehat{l}_{q+},\\
\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{[2]_q^2}\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & -\frac{1}{q}\end{pmatrix} \otimes \widehat{C}_q + \frac{2}{[2]_q} I_2 \otimes l_{q3} + \frac{\lambda}{[2]_q}\begin{pmatrix}0 & \widehat{l}_{q-}\\ \widehat{l}_{q+} & 0\end{pmatrix},\\
\mathcal{L}_- &= \frac{1}{[2]_q}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \otimes (\widehat{C}_q - \lambda[2]_q\widehat{l}_{q3}) + I_2 \otimes \widehat{l}_{q-}.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Мы можем рассматривать теперь операторы $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_-$, $\widehat{C}_q$ и D_q как генераторы большой $SU_q(2)$-ковариантной алгебры $\mathcal{B}_q$. Вводя матричный генератор

$$
\mathbb{L}^{\mathrm{tot}} = \frac{1}{[2]_q} I_2 \otimes C_q^{\mathrm{tot}} + \frac{\lambda}{q} L_q^{\mathrm{tot}}
\tag{94}
$$

где

$$
L_q^{\mathrm{tot}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{q}\mathcal{L}_3 & \mathcal{L}_-\\ \mathcal{L}_+ & -q\mathcal{L}_3\end{pmatrix}
\tag{95}
$$

мы можем записать коммутационные соотношения в $\mathcal{B}_q$, $\widehat{R}^{\mathrm{tot}} = \widehat{R} \otimes I_2$:

$$
\widehat{R}^{\mathrm{tot}}\mathbb{L}_2^{\mathrm{tot}}\widehat{R}^{\mathrm{tot}}\mathbb{L}_2^{\mathrm{tot}} = \mathbb{L}_2^{\mathrm{tot}}\widehat{R}^{\mathrm{tot}}\mathbb{L}_2^{\mathrm{tot}}\widehat{R}^{\mathrm{tot}},
\tag{96}
$$

Правое $SU_q(2)$-кодействие задается на $\mathcal{B}_q$ согласно

$$
\varphi_R(\mathbb{L}^{\mathrm{tot}}) = S(T)\mathbb{L}^{\mathrm{tot}}T, \qquad \varphi_R(D_q) = D_q \otimes 1_G.
\tag{97}
$$

Спектр D_q легко может быть получен из (82), (67) и (68). Прямое вычисление дает две серии собственных значений:

$$
\lambda_l^+ = [l]_{q^2}, \qquad \lambda_l^- = -[l+1]_{q^2}.
\tag{98}
$$

Соответствующие собственные функции могут быть получены разложением тензорного произведения $V_{\frac{1}{2}} \otimes V_l$ в прямую сумму

$V_{l+\frac{1}{2}} \oplus V_{l-\frac{1}{2}}$:

$$| \, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & l & l \pm \frac{1}{2} \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix}_q | \, \frac{1}{2}, m_1\rangle \otimes | \, l, m_2\rangle, \tag{99}$$

где величины $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & l & l \pm \frac{1}{2} \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix}_q$ представляют собой квантовые коэфиценты Клебша–Гордана [16]. Векторы $| \, l, m_2\rangle$ в (99) могут быть выражены через q-спецфункции используя разложения $F_q(G)$ и $F_q(S)$ на неприводимые подпространства по отношению к действию $\mathrm{su}_q(2)$ [11, 12].

В соответствии с (67) оператор C_q^{tot} принимает на $V_{l\pm\frac{1}{2}}$ значения $q^{2(l\pm\frac{1}{2})+1} + q^{-(2(l\pm\frac{1}{2})+1)}$. Поскольку в нашем случае пространства $V_{l\pm\frac{1}{2}}$ вложены в $V_{\frac{1}{2}} \otimes V_l$, $I_2 \otimes \widehat{C}_q$ принимает там значения $q^{2l+1} + q^{-(2l+1)}$. Таким образом, уравнение (90) дает:

$$D_q \, | \, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle = \lambda_l^{\pm} \, | \, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle. \tag{100}$$

Приложение.

Докажем сперва следующую общую формулу

$$^* \circ \widehat{L}^{\pm} \circ^* = (\widehat{L}^{\mp})^t, \tag{A.1}$$

где *-эрмитово сопряжение на $F_q(G)$ или $F_q(S)$ а "t" обозначает обычную матричную транспозицию. В $F_q(G)$ случае (A.1) означает, что, $T^c = S(T)^t$:

$$(\widehat{L}_1^{\pm G}(T_2^c))^c = (\widehat{L}_1^{\mp G})^t(T_2). \tag{A.2}$$

Действительно, из (45) следует, что $\widehat{L}_1^{\pm G}(T_2^c) = S\widehat{L}_1^{\pm G}(T_2^t)$ и прямое вычисление на основе стандартной техники [7] дает:

$$\widehat{L}_1^{\pm G}(T_2^c) = T_2^c((R^{\pm})^{-1})^{t_2}, \tag{A.3}$$

где "t_2" означает транспозицию по второму пространству. Правая часть (A.2) равна

$$\widehat{L}_1^{\pm G}(T_2^c) = T_2(R^{\mp})^{t_1}, \tag{A.4}$$

где "t_1" означает транспозицию по первому пространству. Вместе уравнения (A.2), (A,3) и (A.4) дают:

$$(R^{\mp})^{t_1} = ((R^{\pm})^{-1})^{t_2} \tag{A.5}$$

или
$$(R^{\pm})^{-1} = (R^{\mp})^t, \tag{A.6}$$
что, согласно (47), приводит к простому соотношению:
$$\widehat{R}^t = \widehat{R}, \tag{A.7}$$
которое непосредственно проверяется явным выражением (4) для $\widehat{R}$. В $F_q(S)$ случае уравнение (A.1) означает:
$$(\widehat{L}^{\pm S}(M_2^t))^c = (\widehat{L}^{\mp S})^t(M_2). \tag{A.8}$$
Для того, чтобы доказать это равенство, заметим, что согласно общему подходу [7]:
$$\widehat{L}_1^{\pm S}(M_2) = (R^{\pm})^{-1}M_2R^{\pm}. \tag{A.9}$$
вместе (A.8) и (A.9) дают соотношение:
$$(R\pm)^{t_2}M_2((R^{\pm})^{-1})^{t_1}M_2(R^{\mp})^{t_1}, \tag{A.10}$$
которое снова оказывается эквивалентно (A.6).

В компонентной записи (A.1) означает:
$$^* \circ \widehat{k} \circ^* = \widehat{k}^{-1}, \qquad ^* \circ \widehat{e} \circ^* = -\frac{1}{q}\widehat{f}. \tag{A.11}$$

Докажем теперь непосредственно формулу (74). Несмотря на то, что она имеет общий вид, мы располагаем доказательством только в частном $su_q(2)$ случае. Доказательство сводится к последовательному рассмотрению следующих цепочек формул и использовании формул (A.1),(33), (43.a) и (69):
$$\langle x, \widehat{k}(y)\rangle = h(x^*\widehat{k}(y)) = h \circ \widehat{k}(\widehat{k}^{-1}(x^*)y) =$$
$$= h \circ (Id \otimes k)\triangle(\widehat{k}^{-1}(x^*)y) = k(h \otimes Id)\triangle(\widehat{k}^{-1}(x^*)y) =$$
$$= k(I)h(\widehat{k}^{-1}(x^*)y) = \langle(\widehat{k}^{-1}(x^*))^*, y\rangle = \langle\widehat{k}(x), y\rangle$$
$$\langle x, \widehat{e}(y)\rangle = h(x^*\widehat{e}(y)) = h \circ \widehat{e}(\widehat{k}(x^*)y) - h(\widehat{e}\widehat{k}(x^*)\widehat{k}(y)) =$$
$$e \circ (h \otimes Id)\triangle(\widehat{k}(x^*)y) - qh \circ \widehat{k}(\widehat{e}(x^*)y) =$$
$$= e(I)h(\widehat{k}(x^*)y) - qh \circ (Id \otimes k)\triangle(\widehat{e}(x^*)y) =$$
$$= -qk(h \otimes Id)\triangle(\widehat{e}(x^*)y) = -qh(\widehat{e}(x^*)y) =$$
$$= -q\langle(\widehat{e}(x^*)^*), y\rangle = \langle\widehat{f}(x), y\rangle.$$

Литература

1. A. Connes,, *Noncommutative geometry.* N. Y., Acad. Press, 1994.
2. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев,, *Квантовые группы Ли и квантовые алгебры Ли.* — Алгебра и Анализ **1** (1989), 178–206.
3. P. Podles,, *Quantum spheres.* — Lett. Math. Phys. **14** (1987), 193–202.
4. M. Jimbo,, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation.* — Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
5. K. Ohta, H. Suzuki,, *Dirac operators on quantum two spheres.* — Mod. Phys. Lett. A **141** (1994), 2325–2333.
6. A. Yu. Alekseev, L. D. Faddeev,, *A toy model for conformal field theory.* — Comm Math. Phys. **141** (1991), 413–422.
7. P. Shupp, P. Watts, B. Zumino,, *Bicovariant quantum algebras and quantum Lie algebras.* — Comm. Math. Phys. **157** (1993), 305–329.
8. P. P. Kulish, R. Sasaki,, *Covariance properties of reflection equation algebras.* — Progr. Theoret. Phys. **89** (1993), 741–761.
9. П. П. Кулиш,, *Квантовые группы, q-осцилляторы и ковариантные алгебры.* — Теор. матем. физика **94** (1993), 193–199.
10. Л. Л. Ваксман, Я. С. Сойбельман,, *Алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$.* — Функциональный анализ и приложения **22** (1988), 1–14.
11. M. Noumi, K. Mimachi,, *Rogers's q-ultraspherical polinomials on a quantum 2-sphere.* — Duke Math. Journ. **63** (1991), 65–80.
12. T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi, K.Ueno,, *Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q-Jacobi polynomials.* — Journ. of Funct. Anal. **99** (1991), 357–386.
13. N. Berline, E. Getzler, M. Vergne,, *Heat Kernels and Dirac Operators.* Berlin, Springer-Verlag, 1992.
14. J. A. de Azcarraga, P. P. Kulish, F. Rodenas,, *Quantum groups and deformed special relativity.* — Fortschr. der Phys. **44** (1996), 1–40.
15. H. Grosse, C. Klimcik, P. Presnajder,, Simple field theoretical models on noncommutative manifolds, CERN-TH/95-138, hep-th/9510177; hep-th/9510083; hep-th/9505175..
16. A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin,, Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q-orthogonal polinomials and invariants of links, LOMI E-9-88; Infinite-dimensional Lie algebras and groups. Singapore, W. S., 1989.

Bibikov P. N., Kulish P. P. Dirac operators on quantum $SU(2)$ group and quantum sphere.

Problems of definition of Dirac operators on the quantum group $SU(2)$ and the quantum sphere $S^2_{q\mu}$ are discussed. In both two cases proposed ones have the similar $SU_q(2)$-invariant form and are strictly connected with corresponding Laplace operators. The spectrum of proposed operators also is calculated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 февраля 1996 г.