В. А. Егоров, В. И. Поздняков

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ УСЕЧЕННЫХ СУММ

1. Введение

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых симметричных случайных величин

$$U_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad V_n = \sum_{j=1}^{n} X_j^2,$$

$$V_n \to \infty \quad \text{п.н.}$$

Используя только это условие, Марцинкевич ([7], с. 27–28) получил верхнюю оценку в законе повторного логарифма со случайной нормировкой в следующей форме

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{U_n}{\sqrt{2V_n \ln_2 V_n}} \leqslant 1 \quad \text{п.н.} \quad , \tag{1}$$

где $\ln_2 x = \ln \ln x$. Левую часть (1) иногда называют самонормализованной суммой. Мы покажем что верхняя оценка (1) может быть перенесена на функциональную форму закона повторного логарифма (Теорема 1). Более того, мы получили аналогичный результат для усеченных сумм

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \, I\{X_j^2 \leqslant b_n\}, \quad T_n = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \, I\{X_j^2 \leqslant b_n\},$$

где $b_n \leqslant \infty$ – неубывающая неслучайная (иногда случайная) последовательность (Теорема 2, раздел 1). Кроме того, мы докажем функциональный закон повторного логарифма для усеченных сумм S_n в условиях, подобных условию Колмогорова. Следует

Эта работа частично поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований No. 95-01-01260 и No. 96-01-00549.

заметить, что усеченные суммы S_n, $n \geqslant 1$, не образуют кумулятивную последовательность сумм независимых случайных величин. Поэтому, несмотря на некоторую похожесть нашего доказательства на доказательство, используемое для классической схемы суммирования, в них имеются существенныые различия.

Усеченные суммы интересны сами по себе и в связи с исследованием так называемых урезанных сумм, т.е. сумм наблюдений за вычетом некоторого числа крайних абсолютных порядковых статистик. Исследование урезанных сумм часто сводится к исследованию усеченных сумм. Урезанные и усеченные суммы применяются в различных областях математической статистики и интенсивно изучаются в асимптотической теории вероятностей (см., например, Гриффин [3, 4], Хеслер и Мэйсон [5]).

2. Результаты

Определение (см., например, Стаут [8]). Шар Штрассена K это множество функций g из $C[0,1]$, таких, что $g(0) = 0$, g абсолютно непрерывна,

$$\int\limits_0^1 \left[\, g'(t)\,\right]^2 dt \leqslant 1.$$

Хорошо известно, что K компактно в $C[0,1]$ (см. Стаут [8]).

Теорема 1. *Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность симметричных независимых случайных величин,*

$$U_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad V_n = \sum_{j=1}^n X_j^2, \quad v_n = \sqrt{2V_n \ln_2 V_n}, \quad U_0 = V_0 = 0.$$

Рассмотрим семейство функций $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$, где $h_n(t) = U_k/v_n$ для $t = t_{k,n} = V_k/V_n$, $0 \leqslant k \leqslant n$, и $h_n(t)$ определяется посредством линейной интерполяции между точками $t_{k,n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда, при условии, что $V_n \to \infty$ п.н., последовательность функций $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ п.н. относительно компактна в $C[0,1]$ и множество предельных точек этой последовательности п.н. содержится в шаре K.

Эта теорема вытекает из первой части следующей ниже теоремы (при $b_n = \infty$ для всех n).

Теорема 2. *Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых симметричных случайных величин, b_n неубывающая числовая по-*

следовательность, $b_n \leqslant \infty$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j\, I\{X_j^2 \leqslant b_n\}, \quad T_n = \sum_{j=1}^{n} X_j^2\, I\{X_j^2 \leqslant b_n\},$$

$$B_n = \mathbf{E}\, T_n = \mathbf{D}\, S_n, \quad a_n = \sqrt{2B_n \ln_2 B_n},$$

$$a'_n = \sqrt{2T_n \ln_2 T_n}, \quad T_0 = S_0 = B_0 = 0.$$

Пусть f_n – непрерывная кусочно-линейная функция, такая, что при

$$t_{k,n} = B_k/B_n, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad f_n(t_{k,n}) = S_k/a_n, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

и h_n – такая же кусочно-линейная функция, принимающая при $t'_{k,n} = T_k/T_n$, значения S_k/a'_n, $0 \leqslant k \leqslant n$.

1) *Если*

$$T_n \to \infty \quad \text{п.н.},$$

то с вероятностью единица последовательность функций $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ относительно компактна в $C[0,1]$, и множество предельных точек этой последовательности лежит в шаре Штрассена K.

2) *Если*

$$B_n \to \infty, \quad B_n/B_{n+1} \to 1, \quad b_n = o\Big(\frac{B_n}{\ln_2 B_n}\Big),$$

при $n \to \infty$, то

i) $\frac{T_n}{B_n} \to 1$ *п.н.*

ii) *с вероятностью единица последовательность функций $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ п.н. относительно компактна в $C[0,1]$ и предельное множество этой последовательности п.н. совпадает с множеством K;*

iii) *с вероятностью единица последовательность функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ п.н. относительно компактна в $C[0,1]$ и предельное множество этой последовательности п.н. совпадает с множеством K.*

Замечание. Приводимое ниже доказательство позволяет заменить числовую последовательность $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ на последовательность случайных величин, которая полностью определяется последовательностью $\{X_j^2\}_{j\geqslant 1}$. В частности, можно положить $b_n = |X_{n,n-k}|$, $n = 1, 2, \ldots$, в первой части Теоремы 2, где $X_{n,n-k}$ – абсолютные порядковые статистики, k – постоянно.

3. Доказательства

Наше доказательство использует следующую идею. При фиксированной последовательности $\{X_j^2\}_{j\geqslant 1}$ мы можем рассматривать последовательность $\{X_j\}_{j\geqslant 1}$ как последовательность случайных величин с симметричным распределением Бернулли (см. В. А. Егоров, В. И. Поздняков [2], А. Зигмунд [7]). Поэтому мы можем доказывать сильные теоремы следующим образом. Сначала мы доказываем, что соответствующая условная вероятность (при условии, что $\{X_j^2\}_{j\geqslant 1}$ фиксированы) некоторого события A п.н. равна единице. Затем, используя теорему Фубини, мы заключаем, что событие A справедливо с вероятностью единица. Из этих рассуждений следует, что, не умаляя общности, можно предполагать, что $\{X_j\}_{j\geqslant 1}$ является последовательностью независимых симметричных случайных величин с распределением Бернулли.

Мы начнем с доказательства некоторых вспомогательных утверждений. Предложения разделяют теорему 2 на три утверждения, технические результаты мы называем леммами. Мы сохраняем некоторые ранее введенные обозначения для соответствующих характеристик. Мы используем ниже общую схему доказательства Човера (см. Човер [1], Стаут [8]). Пусть $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность неотрицательных чисел, b_n – неубывающая последовательность положительных чисел,

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} x_j^2\, I\{x_j^2 \leqslant b_n\}.$$

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $\{\xi_j\}_{j\geqslant 1}$ – последовательность независимых случайных величин, определенных на $\mathbf{\Omega}$, таких, что

$$\mathbf{P}(\xi_j = x_j) = \mathbf{P}(\xi_j = -x_j) = 1/2, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Положим

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, I\{\xi_j^2 \leqslant b_n\}, \quad a_n = \sqrt{2B_n \ln_2 B_n}.$$

Следует отметить, что приращения сумм S_n независимы в данном случае, хотя в общем случае это не так.

Пусть последовательность функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ определена как и в теореме 2, но с использованием определенных выше величин S_n, B_n, a_n, $n=0,1,\ldots$.

Лемма 1. *Пусть*

$$I\subset \mathbf{N}, \quad S_I=\sum_{i\in I}\xi_i, \quad B_I=\mathbf{D}\,S_I=\sum_{i\in I}x_i^2<\infty.$$

Тогда для любого $\delta>0$ *для всех* I *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\,(S_I>x)\leqslant \frac{\mathbf{E}\,|S_l|^{2p}}{x^{2p}}\leqslant C\Big(\frac{2p}{e}\,\frac{(1+\delta)B_I}{x^2}\Big)^p \quad (x>0),$$

где C *зависит только от* δ.

По существу, эта лемма является известным неравенством Марцинкевича, но она представляет и самостоятельный интерес, поскольку в ней для симметричных случайных величин получена асимптотически точная оценка постоянных в неравенствах для моментов сумм нарастающего порядка. Следует отметить, что использование в наших исследованиях вместо леммы 1 известных оценок типа Розенталя–Нагаева–Фука или оценок из работы И. Ф. Пинелиса и С. А. Утева [9] привело бы к более грубому результату, чем закон повторного логарифма.

Доказательство. Достаточно установить эту оценку для $|I|<\infty$. Поскольку $(\mathbf{E}\,|\,X\,|^p\,)^{1/p}$ возрастает по p, можно доказывать Лемму 1 только для натуральных p. Пусть $r=(r_1,r_2,\ldots)$ – вектор произвольной размерности с неотрицательными целыми компонентами, для которого $\sum_i r_i=p$. Очевидно, не более p компонент вектора r отличны от нуля. Определим для таких r

$$I_p(r)=\frac{\binom{2p}{2r}\,e^p}{\binom{p}{r}\,(2p)^p}, \quad I_p=\max_r I_p(r),$$

$$r^*=(r_1^*,r_2^*,\ldots), \quad I_p\,(r^*)=I_p,$$

где $\binom{p}{r}=p!(\prod_i r_i!)$. Не умаляя общности, можно предположить, что $r_1^*\geqslant 1$. Тогда для $r^{**}=(r_1^*-1,r_2^*,\ldots)$, мы имеем

$$\frac{I_p}{I_{p-1}}\leqslant\frac{I_p(r^*)}{I_p(r^{**})}=\frac{e(2p-1)(p-1)^{p-1}}{2p^p(2r_1-1)}\leqslant$$

$$e\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{p-1}\to 1$$

при $p\to\infty$. Из этого следует, что для любого $\delta>0$

$$I_p\leqslant C(1+\delta)^p,$$

где постоянная C зависит только от δ. Поэтому

$$\binom{2p}{2r}\leqslant C\Big(\frac{2p(1+\delta)}{e}\Big)^p\binom{p}{r}.$$

Используя симметрию случайных величин $\{\xi_j\}_{j\in I}$, получим

$$\mathbf{E}\,(S_I)^{2p}=\sum\binom{2p}{2r}\Big(x_{i_1}^{2r_1}\cdot x_{i_2}^{2r_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_p}^{2r_p}\Big)\leqslant$$

$$C\Big(\frac{2p(1+\delta)}{e}\Big)^p\cdot\sum\binom{p}{r}\cdot\Big(x_{i_1}^{2r_1}\cdot x_{i_2}^{2r_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_p}^{2r_p}\Big)=$$

$$C\Big(\frac{2p(1+\delta)}{e}\Big)^p\cdot B_I^p.$$

Здесь суммирование ведется по всем наборам индексов $r_1,r_2,\ldots,$ r_p, таких, что $r_i\geqslant 0$, $i\leqslant p$, $r_1+r_2+\ldots r_p=p$, и по всем упорядоченным множествам индексов $i_1,i_2,\ldots i_p$ из I. $\square$

Лемма 2. *Пусть $B_n\to\infty$. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}\leqslant 1 \quad \textit{п.н.} \tag{2}$$

Доказательство. Определим $n_r=n_r(c)$ для каждого $c>1$ следующим образом

$$n_r=\min\big(n:n>n_{r-1},B_{n+1}>c^r\big).$$

Тогда для $r>1$

$$\frac{B_{n_{r+1}}}{B_{n_r+1}}<c,\quad B_{n_{r+1}}\geqslant B_{n_r+1}\geqslant c^r. \tag{3}$$

Для доказательства этого заметим, что второе неравенство в (3) непосредственно следует из определения последовательности n_r.

Первое неравенство тривиально, если $B_{n_{r+1}} \leqslant c^{r+1}$. Если выполнено противоположное неравенство, то $n_{r+1} - 1 \leqslant n_r$. Поэтому $n_{r+1} = n_r + 1$. Следовательно, в этом случае

$$\frac{B_{n_{r+1}}}{B_{n_r+1}} = 1 < c,$$

т.е. (3) также справедливо.

Теперь достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $c > 1$, такое, что

$$\sum_r \mathbf{P}\left(\max_{n_r < n \leqslant n_{r+1}} S_n > (1+\varepsilon)\, a_{n_r+1}\right) < \infty.$$

В силу неравенства Леви и Леммы 1 (с $p = \ln_2 B_{n_r+1}$, $x = (1+\varepsilon)a_{n_r+1}$) для любого $\delta > 0$, этот ряд ограничен величиной

$$C \sum_r \Big(\frac{2\ln_2 B_{n_r+1}}{e}\; \frac{(1+\delta)B_{n_{r+1}}}{(1+\varepsilon)^2\, 2B_{n_r+1} \ln_2 B_{n_r+1}}\Big)^{\ln_2 B_{n_r+1}},$$

где постоянная C зависит только от δ. Пусть теперь $c > 1$ и $\delta > 0$ таковы, что

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{c(1+\delta)} > 1.$$

Тогда в силу (3) последний ряд сходится и из леммы Бореля–Кантелли следует (2). $\square$

Лемма 3. *Пусть $\{Y_i\}_{i \geqslant 1}$ – независимые симметричные случайные величины, $a > 0$, $m \geqslant 1$, l_i и p_i – такие целые числа, что $1 \leqslant l_i \leqslant p_i \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Big| \sum_{k=l_i}^{p_i} Y_k \Big| > a\right) \leqslant 4\mathbf{P}\left(\Big| \sum_{k=1}^{m} Y_k \Big| > a/2\right).$$

Доказательство. Эта лемма непосредственно следует из неравенства Леви. $\square$

Лемма 4. *Для любой функции $g \in K$ существует сколь угодно большое m, такое, что*

$$\sum_{\nu=2}^{m-1} \Big[g\left(\frac{\nu+1}{m}\right) - g\left(\frac{\nu}{m}\right) \Big]^2 m = \gamma < 1. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что существуют $g \in K$ и m_0, такие, что для всех $m \geqslant m_0$

$$\sum_{\nu=2}^{m-1} \Big[g\left(\frac{\nu+1}{m}\right) - g\left(\frac{\nu}{m}\right) \Big]^2 m \geqslant 1.$$

Тогда в силу неравенства Шварца

$$1 \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1} \Big[g\left(\frac{\nu+1}{m}\right) - g\left(\frac{\nu}{m}\right) \Big]^2 m \leqslant$$

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \int\limits_{\frac{\nu}{m}}^{\frac{\nu+1}{m}} \big[g'(t) \big]^2 \, dt = \int\limits_0^1 \big[g'(t) \big]^2 \, dt \leqslant 1.$$

Таким образом, в неравенстве Шварца имеет место равенство. Следовательно, g – кусочно-линейная функция с изломами в точках ν/m, $\nu = 1, \ldots, m-1$. Выберем $m' > m$ так, чтобы для $\nu = 1, \ldots, m-1$ и $\nu' = 1, \ldots, m'-1$, $\nu'/m' \neq \nu/m$. Тогда мы видим, что g – линейная функция. Более того, $g(t) \equiv 2t$ или $g(t) \equiv -2t$. Но эта функция должна удовлетворять соотношению (4). $\square$

Ниже мы предполагаем, что все утверждения о случайных функциях справедливы с вероятностью единица. Поэтому для упрощения формул мы иногда не будем писать выражения "п.н." или "почти наверное."

Предложение 1. *Пусть $B_n \to \infty$. Пусть $f_n \in C[0,1]$ – такая кусочно линейная функция, что при $t_{k,n} = B_k/B_n$, она определяется равенствами $f_n(t_{k,n}) = S_k/a_n$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда множество функций $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\omega)$, $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $n > n_0$

$$| f_n(t) - f_n(t') | \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

если только $| t - t' | < \delta_\varepsilon$ $(t, t' \in [0,1])$ и $n > n_0$. Поскольку f_n – кусочно-линейная функция, достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и n_0, что для $n > n_0$

a) если $| B_j - B_i | \leqslant B_n \delta$, то $\left| f_n\left(\frac{B_j}{B_n}\right) - f_n\left(\frac{B_i}{B_n}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,

b) если $| B_{i+1} - B_i | > B_n \delta$, то множество функций $| f_n'(t) |$ равномерно ограничено по всем $t \in [\, B_i/B_n, B_{i+1}/B_n \,]$ и $n > n_0$.

По Лемме 2 для $n > n_0$ и $t \in [\,B_i/B_n, B_{i+1}/B_n\,]$

$$| f_n'(t) | = \frac{| S_{i+1} - S_i |}{a_n} \Big/ \frac{B_{i+1} - B_i}{B_n} \leqslant \frac{9}{\delta}$$

при выполнении условий пункта b). Это означает, что b) справедливо. Поэтому, если a) также справедливо, то мы можем положить, например, $\delta_\varepsilon = (\delta\varepsilon/18)$ в (5).

Докажем теперь пункт a). Пусть $q = q_\varepsilon$ таково, что $\varepsilon^2\, 2^{q-7} = \gamma > 1$. Мы покажем, что можно взять $\delta = 2^{-q}$. Пусть $i < j \leqslant n$ и $| B_j - B_i | \leqslant B_n\, 2^{-q}$. Нам нужно показать, что для $n > n_0$

$$| S_j - S_i | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, a_n. \tag{6}$$

Определим

$$A_n = \Big\{\omega : \max_{\substack{0 < B_j - B_i \leqslant B_n 2^{-q} \\ j \leqslant n}} | S_j - S_i | > \frac{\varepsilon}{2}\, a_n\Big\}.$$

Очевидно, (6) следует из условия

$$\mathbf{P}\left(\limsup A_n\right) = 0. \tag{7}$$

Обозначим

$$n_r = \min\left(n : n > n_{r-1},\ B_{n+1} > 2^r\right), \quad n_0 = 0.$$

Тогда в силу (3) мы имеем для $r > 1$

$$\frac{B_{n_{r+1}}}{B_{n_r+1}} < 2, \quad B_{n_{r+1}} \geqslant B_{n_r+1} \geqslant 2^r. \tag{8}$$

Определим

$$D_r = \Big\{\omega : \max_{\substack{0 < B_j - B_i \leqslant B_{n_{r+1}} 2^{-q} \\ j \leqslant n_{r+1}}} | S_j - S_i | > \frac{\varepsilon}{2}\, a_{n_r+1}\Big\}.$$

Очевидно,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{r\to\infty} D_r.$$

Поэтому (7) следует из условия

$$\mathbf{P}\,(\limsup D_r) = 0. \tag{9}$$

Разобьем множество $\{B_k\}_{k\leqslant n_{r+1}}$ на 2^q-1 непересекающихся подмножеств $I(r,\nu)$ следующим образом

$$I(r,\nu)=\big\{B_k:(\nu-1)B_{n_{r+1}}\,2^{-q}\leqslant B_k\leqslant(\nu+1)B_{n_{r+1}}\,2^{-q}\big\}$$
$$(\nu=1,2,\ldots,2^q-1).$$

Определим для $\nu=1,2,\ldots,2^q-1$

$$D_r^{(\nu)}=\Big\{\omega:\max_{\substack{B_j,B_i\in I(r,\nu)\\ i<j<n_{r+1}}}|\,S_j-S_i\,|>\frac{\varepsilon}{2}\,a_{n_{r+1}}\Big\}.$$

Тогда

$$D_r\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{2^q-1}D_r^{(\nu)},$$

$$\mathbf{P}\,(\limsup\,D_r)\leqslant\sum_{\nu=1}^{2^q-1}\mathbf{P}\,(\limsup\,D_r^{(\nu)}).$$

Поэтому соотношение (9) следует из условия:

$$\mathbf{P}\,(\limsup\,D_r^{(\nu)})=0,\quad \nu=1,2,\ldots,2^q-1. \tag{10}$$

В силу Леммы 3

$$\mathbf{P}\,(D_r^{(\nu)})\leqslant 4\mathbf{P}\,(H_r^{(\nu)}),$$

где

$$j_\nu=\max\big\{k:B_k\leqslant(\nu+1)\,B_{n_{r+1}}\,2^{-q}\big\},$$
$$i_\nu=\min\big\{k:B_k\geqslant(\nu-1)\,B_{n_{r+1}}\,2^{-q}\big\},$$
$$H_r^{(\nu)}=\Big\{\omega:|\,S_{j_\nu}-S_{i_\nu}\,|>\frac{1}{4}\,\varepsilon a_{n_{r+1}}\Big\}.$$

Теперь из (8) и Леммы 1 (с $p=\ln_2\,B_{n_r+1}$, $x=\frac{1}{4}\,\varepsilon a_{n_r+1}$) следует, что

$$\mathbf{P}\,(H_r^{(\nu)})\leqslant\Big(\frac{2\ln_2\,B_{n_r+1}}{e}\;\frac{2^{6-q}\,B_{n_{r+1}}}{\varepsilon^2\,2B_{n_r+1}\ln_2\,B_{n_r+1}}\Big)^{\ln_2\,B_{n_r+1}}\leqslant$$
$$\exp\big(-(1+\ln\gamma)\ln_2\,2^r\big).$$

Следовательно,

$$\sum_r\mathbf{P}\,(H_r^{(\nu)})<\infty.$$

Поэтому (10) следует из леммы Бореля–Кантелли. $\square$

Следствие 1. *Множество $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ равномерно ограничено и, следовательно, (см. Предложение 1) относительно компактно.*

Пусть J – множество неотрицательных целых чисел, зависящее от натуральных n и m следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad 0,\ n\in J;\\
&2)\quad \text{если}\quad B_{k+1}-B_k\geqslant B_n/m,\ k<n,\quad \text{то}\quad k,\ k+1\in J;\\
&3)\quad \text{если}\quad k\in J,\quad \text{и}\quad p=\max\{j\leqslant n: B_j-B_k<B_n/m\},\qquad \text{то}\quad p\in J.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Тогда множество J содержит $M(n)+1\leqslant 2m+1$ элементов. Пусть $k(\nu)=k(\nu,m,n)$, $\nu=0,1,\dots,M(n)$ – упорядоченные элементы из J. Для каждой функции $g\in C[0,1]$ определим оператор $\Pi_{m,n}g$ следующим образом:

$$\Pi_{m,n}\,g(t_{\nu,n})=g\,(t_{\nu,n}),\quad \text{где}\quad t_{\nu,n}=B_{k(\nu)}/B_n,\quad \nu=0,1,2,\dots,M(n).$$

$\Pi_{m,n}g(t)$ определяется посредством линейной интерполяции между точками $t_{\nu,n}$ и $t_{\nu+1,n}$ для $t\in[t_{\nu,n},t_{\nu+1,n}]$, $\nu=0,1,2,\dots,M(n)-1$.

Следствие 2. *Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $m_0=m_0(\omega)$, что $\|\Pi_{m,n}f_n-f_n\|<\varepsilon$ для $m,\ n>m_0$. Здесь ($\|\,\|$ – стандартная норма в $C[0,1]$).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$,

$$\frac{B_{k(\nu)}}{B_n}<t\leqslant\frac{B_{k(\nu+1)}}{B_n}.$$

Учитывая Предложение 1, определение оператора $\Pi_{m,n}$ и определение функции f_n, имеем

если

$$B_{k(\nu+1)}-B_{k(\nu)}\geqslant B_n/m,\quad k<n,\quad \text{то}\quad k(\nu+1)=k(\nu)+1$$

$$\text{и}\quad \Pi_{m,n}\,f_n(t)-f_n(t)=0;$$

если

$$B_{k(\nu+1)}-B_{k(\nu)}<B_n/m,\quad k<n,\quad \text{то}$$

$$\left|\Pi_{m,n}\,f_n(t)-f_n(t)\right|\leqslant\sup_{|t-t'|<1/m}\left|\,f_n(t)-f_n(t')\,\right|\leqslant\varepsilon$$

для всех достаточно больших m и n. □

Следствие 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $\delta > 0$ *и* $n_0 = n_0(\omega)$, *что* $\|f_n - f_{n'}\| < \varepsilon$, *если* $n,\ n' > n_0$ *и* $| 1 - B_{n'}/B_n | < \delta$.

Доказательство. Достаточно оценить $f_n(t) - f_{n'}(t)$ только в изломах кусочно-линейных функций f_n и $f_{n'}$.

Пусть $t = B_k/B_n$, $0 \leqslant k \leqslant \min(n, n')$. Тогда

$$f_n(t) - f_{n'}(t') = f_n(t)\Big(1 - \sqrt{\frac{B_n \ln_2 B_n}{B_{n'} \ln_2 B_{n'}}}\Big),$$

где $t' = \frac{B_n}{B_{n'}} t = \frac{B_k}{B_{n'}}$. По Следствию 1 правая часть этого равенства может быть сделана сколь угодно малой, если $\delta > 0$ достаточно мало. Поэтому, используя Предложение 1, мы заключаем, что разность

$$f_n(t) - f_{n'}(t) = f_n(t) - f_{n'}(t') + f_{n'}(t') - f_{n'}(t)$$

может быть сделана сколь угодно малой, если $\delta > 0$ достаточно мало.

Если $t = B_k/B_n$, $n' < k \leqslant n$, то $0 \leqslant 1 - t < \delta$ и

$$f_n(t) - f_{n'}(t) = f_n(t) - f_n(1) + f_{n'}(1) - f_{n'}(t) + f_n(1) - f_{n'}(1),$$

$$f_n(1) - f_{n'}(1) = f_n(1) - f_n\Big(\frac{B_{n'}}{B_n}\Big)\sqrt{\frac{B_n \ln_2 B_n}{B_{n'} \ln_2 B_{n'}}}.$$

Из этих формул, Предложения 1 и Следствия 1 вытекает требуемая оценка. Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Предложение 2. *Пусть* $B_n \to \infty$. *Тогда множество предельных точек последовательности* $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ *содержится в* K.

Доказательство. Пусть K_ε обозначает ε-окрестность множества K. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что $f_n \in K_{3\varepsilon}$, если $n > n_0$. Пусть $c > 1$. Определим последовательность n_r так, как это сделано в Лемме 2. В силу (3) $1 - B_n/B_{n_r} < \varepsilon$, если $n_{r-1} < n \leqslant n_r$ и $c - 1 < \varepsilon$. Поэтому с учетом Следствия 3 достаточно доказать, что существует такое r_0, что $f_{n_r} \in K_{2\varepsilon}$ для всех $r > r_0$. Наконец, используя Следствие 2, получим, что нам достаточно показать, что существует такое r_0, что для $m,\ r > r_0$

$$\Pi_{m,n_r} \in K_\varepsilon. \qquad (12)$$

Принимая во внимание, что $|g| \leqslant 1$ для $g \in K$, получим, что (12) вытекает из неравенства

$$\int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \Pi_{m,n_r} f_{n_r}(t) \right]^2 dt \leqslant (1+\varepsilon)^2, \quad r > r_0. \tag{13}$$

Пусть

$$C_r = \left\{ \omega : \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \Pi_{m,n_r} f_{n_r}(t) \right]^2 dt > (1+\varepsilon)^2 \right\}.$$

В силу леммы Бореля–Кантелли соотношение (13) вытекает из условия

$$\sum_r \mathbf{P}\,(C_r) < \infty. \tag{14}$$

Очевидно, C_r определяется формулой

$$C_r = \left\{ \omega : \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{M(n_r)-1} [S_{k(\nu+1)} - S_{k(\nu)}]^2}{[B_{k(\nu+1)} - B_{k(\nu)}]} > (1+\varepsilon)^2\, 2 \ln_2 B_{n_r} \right\} =$$

$$= \left\{ \omega : \sum_{\nu=0}^{M(n_r)-1} \frac{\tilde{S}_\nu^2}{\tilde{B}_\nu} > (1+\varepsilon)^2\, 2 \ln_2 B_{n_r} \right\},$$

где $k(\nu)$ и $M(n_r)$ определены ранее (см. определение Π_{m,n_r}),

$$\tilde{S}_\nu = S_{k(\nu+1)} - S_{k(\nu)}, \quad \tilde{B}_\nu = B_{k(\nu+1)} - B_{k(\nu)}.$$

Пусть $\delta > 0$, $t = 1/2(1+\delta)$. Тогда мы имеем

$$\mathbf{E} \exp\Bigl(t \frac{\tilde{S}_\nu^2}{\tilde{B}_\nu} \Bigr) = \Bigl(1 + t + \frac{t^2}{2} \mathbf{E}\, \frac{\tilde{S}_\nu^4}{\tilde{B}_\nu^2} + \ldots \Bigr).$$

Используя Лемму 1, получим

$$\mathbf{E}\, \frac{\tilde{S}_\nu^{2p}}{\tilde{B}_\nu^p} \leqslant \Bigl[\frac{2p}{e} \Bigl(1 + \frac{\delta}{2} \Bigr) \Bigr]^p \sim (2+\delta)^p \frac{p!}{(2p\pi)^{1/2}}$$

при $p \to \infty$. Поэтому существует постоянная $A > 0$, зависящая только от δ, такая, что для $\tau = t \cdot (2+\delta) = 1 - \delta/(2+2\delta)$ и для всех ν

$$\mathbf{E} \exp\Bigl(t \Bigl(\frac{\tilde{S}_\nu^2}{\tilde{B}_\nu} \Bigr) \Bigr) \leqslant C \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i = A.$$

По экспоненциальному неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\,(C_r) \leqslant A^{M(n_r)} \exp\Big(-\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+\delta} \ln_2\, B_{n_r} + \frac{M(n_r)}{2(1+\delta)}\Big).$$

Выберем такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, что

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+\delta} > 1.$$

Тогда (14) вытекает из приведенной выше оценки и оценок (3). □

Предложение 3. *Предположим, что $B_n \to \infty$, $B_n/B_{n+1} \to 1$,*

$$b_n = o\Big(\frac{B_n}{\ln_2\, B_n}\Big). \tag{K}$$

Тогда предельное множество для последовательноси $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ совпадает с шаром Штрассена K.

Доказательство. Поскольку $B_{n+1}/B_n \to 1$, для любых m, $n > n_0$ последовательность $k(\nu)$ определяется первым и третьим пунктами (11). Поэтому

a) не умаляя общности, можно предположить, что $M(n) = m+1$ для всех достаточно больших n;

b) $B_{k(m+1)}/B_{k(m)} \to 1$ $(n \to \infty)$. (Возможно, $B_{k(m+1)} = B_{k(m)}$);

c)

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant m}\Big|\frac{B_{k(\nu)}}{B_{n_r}} - \frac{\nu}{m}\Big| \to 0$$

при $r \to \infty$;

d) для любой функции $g \in K$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\omega)$, такое, что

$$\|\,\Pi_{m,n}\, f_n - f_n\,\| < \varepsilon/4, \quad \|\,\Pi_{m,n}\, g - g\,\| < \varepsilon/4 \tag{15}$$

для всех m, $n > n_0$.

Таким образом, в силу d) и Предложения 2, достаточно показать, что

$$\|\,\Pi_{m,n_r}\, f_{n_r} - \Pi_{m,n_r}\, g\,\| < \varepsilon/2 \quad \text{бесконечно часто},$$

где n_r – такая целочисленная последовательность, что $B_{n_r} \sim m^r$ для некоторого достаточно большого целого m. В силу Предложения 1, приведенного выше пункта b) и условий $f_n(0) = g(0) = 0$ мы имеем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant B_{k(2)}/B_{n_r}} \Big| \Pi_{m,n_r} f_{n_r}(t) - g(t) \Big| +$$

$$+ \max_{B_{k(m)}/B_{n_r} \leqslant t \leqslant B_{k(m+1)}/B_{n_r}} \Big| \Pi_{m,n_r} f_{n_r}(t) - g(t) \Big| < \varepsilon/4. \qquad (16)$$

Поэтому нам достаточно установить, что

$$\mathbf{P}\left(\limsup G_r\right) = 1,$$

где

$$G_r = \bigg\{\omega : \Big| \Pi_{m,n_r} f_{n_r}\Big(\frac{B_{k(\nu+1)}}{B_{n_r}}\Big) - \Pi_{m,n_r} f_{n_r}\Big(\frac{B_{k(\nu)}}{B_{n_r}}\Big) -$$

$$- \Pi_{m,n_r}\, g\Big(\frac{B_{k(\nu+1)}}{B_{n_r}}\Big) + \Pi_{m,n_r}\, g\Big(\frac{B_{k(\nu)}}{B_{n_r}}\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{4m} \text{для} \quad \nu = 2, \dots, m-1 \bigg\},$$

$k(\nu) = k(\nu, m, n_r)$, $\nu = 1, 2, \dots, m$.

Предположим, что условия (4), (15), (16) выполнены. Тогда в силу пункта c) достаточно установить, что

$$\mathbf{P}\left(\limsup L_r\right) = 1, \qquad (17)$$

где

$$L_r = \bigg\{\omega : \Big| \frac{\tilde{S}_\nu}{\sqrt{2m\tilde{B}_\nu \, \ln_2 \tilde{B}_\nu}} - g\Big(\frac{\nu+1}{m}\Big) + g\Big(\frac{\nu}{m}\Big)\Big| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{8m} \quad \text{для} \quad \nu = 2, \dots, m-1 \bigg\}$$

($\tilde{S}_\nu$ и $\tilde{B}_\nu$ определены в Предложении 2).

Следует заметить, что события $\{L_r\}_{r > r_0}$ независимы, если r_0 достаточно велико. Следовательно, в силу леммы Бореля–Кантелли остается показать, что

$$\sum_r \mathbf{P}\left(L_r\right) = \infty. \qquad (18)$$

Чтобы доказать (18), рассмотрим независимые события

$$L_r^{(\nu)} = \left\{ \omega : \Big| \frac{\tilde{S}_\nu}{\sqrt{2\tilde{B}_\nu \ \ln_2 \ \tilde{B}_\nu}} - g_\nu \sqrt{m} \Big| < \frac{\varepsilon}{8\sqrt{m}} \right\},$$

для $\nu = 2, \ldots, m-1$, где $g_\nu = g((\nu+1)/m) - g(\nu/m)$. Тогда

$$\mathbf{P}\,(L_r^{(\nu)}) \geqslant \mathbf{P}\left(\frac{\tilde{S}_\nu}{\sqrt{2\tilde{B}_\nu \ \ln_2 \ \tilde{B}_\nu}} > |g_\nu|\sqrt{m} \right) -$$

$$-\mathbf{P}\left(\frac{\tilde{S}_\nu}{\sqrt{2\tilde{B}_\nu \ \ln_2 \ \tilde{B}_\nu}} > |g_\nu|\sqrt{m} + \frac{\varepsilon}{8\sqrt{m}} \right).$$

Используя условие (K) и показательные оценки (см., например, [6]), мы получим, что для любых $\mu > 0$ и достаточно больших r

$$\mathbf{P}\left(L_r^{(\nu)}\right) \geqslant \left(\ln \tilde{B}_\nu\right)^{-(1+\mu)g_\nu^2 m} - \left(\ln \tilde{B}_\nu\right)^{-(1-\mu)(|g_\nu|\sqrt{m}+\varepsilon/8\sqrt{m})^2}.$$

Пусть $\mu > 0$ таково, что для любого ν

$$(1+\mu)\, g_\nu^2\, m < \left(1-\mu)(|g_\nu|\sqrt{m} + \varepsilon/(8\sqrt{m})\right)^2$$

и $(1+\mu)\gamma < 1$, где $\gamma < 1$ определено в Лемме 4. Тогда $\tilde{B}_\nu \sim B_{n_r}/m \sim m^{r-1}$, и, принимая во внимание Лемму 4, мы видим, что существуют постоянные c_1, c_2, такие, что

$$\mathbf{P}\left(L_r^{(\nu)}\right) \geqslant c_1\, r^{-(1+\mu)g_\nu^2 m}$$

и

$$\mathbf{P}\,(L_r) \geqslant c_2\, r^{-(1+\mu)\sum_{\nu=2}^{m-1} g_\nu^2 m} = c_2\, r^{-(1+\mu)\gamma}.$$

Условие (18) и, следовательно, Предложение 3 вытекают из последнего неравенства. $\square$

Доказательство теоремы 2. Используя технику, кратко описанную вслед за формулировкой Теоремы 2 (см. также Егоров, Поздняков [2]), мы немедленно получаем 1) из Предложений 1 и 2, пункт i) доказан в [2], ii) непосредственно следует из i) и Предложения 3. Чтобы доказать iii), рассмотрим $\widetilde{h}_n = \frac{a_n'}{a_n} h_n$. Поскольку $\frac{a_n'}{a_n} \to 1$ п.н. и множество $\{h_n\}_{n>1}$ п.н. равномерно ограничено, мы имеем

$$\|\, h_n - \widetilde{h}_n \,\| \to 0 \ \text{ п.н. при } \ n \to \infty.$$

Поэтому множество предельных точек последовательности $\{\widetilde{h}_n\}_{n\geqslant 1}$ совпадает с множеством предельных точек последовательности $\{h_n\}_{n>1}$. В силу i)

$$\varepsilon_n = 2\max_{k\leqslant n}\left|\frac{T_k}{T_n} - \frac{B_k}{B_n}\right| \to 0, \quad n\to\infty \text{ п.н.}$$

Поэтому

$$\lim_n \max_t \left|\widetilde{h}_n(t) - f_n(t)\right| \leqslant \lim_n \max_{|t-s|<\varepsilon_n} \left|\widetilde{h}_n(t) - \widetilde{h}_n(s)\right| = 0 \text{ п.н.}$$

в силу равностепенной непрерывности множества $\{\widetilde{h}_n\}_{n>1}$. $\square$

Литература

1. J. Chover, *On Strassen's version of* log log *Law.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. Verw. Geb. **8** (1967), 83–90.
2. В. А. Егоров, В. И. Поздняков, *Сильные предельные теоремы для усеченных сумм.* — Вестн. СПГУ **1(4)** (1994), 34–38.
3. P. Griffin, *The influence of extremes on the law of the iterated logarithm.* — Probab. Th. Rel. Fields **77** (1988), 241–270.
4. P. Griffin, *Non-classical law of the iterated logarithm behavior for trimmed sums.* — Probab. Th. Rel. Fields **78** (1988), 293–319.
5. E. Haeusler, D. Mason, *A law of the iterated logarithm for sums of extreme values from a distribution with a regularly varying upper tail.* — Ann. Probab. **15** (1987), 932–953.
6. М. Лоэв, *Теория вероятностей.* ИЛ., М. (1962).
7. J. Marcinkiewicz, *Collected papers.* Ed. by A. Zygmund, Warszawa, Panstwowe wydawnictwo naukowe (1964).
8. W. F. Stout, *Almost sure convergence.* NY: Academic Press (1974).
9. И. Ф. Пинелис, С. А. Утев, *Оценки моментов сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. и ее прим. **29(3)** (1984), 554–557.

Egorov V. A., Pozdnjakov V. I. Functional law of the iterated logarithm for truncated sums.

We obtain the functional law of the iterated logarithm (the FLIL) for truncated sums $S_n = \sum_{j=1}^n X_j\, I\{X_j^2 \leqslant b_n\}$ of independent symmetric random variables X_j, $1\leqslant j\leqslant n$, $b_n\leqslant\infty$. Considering the random normalization by

$$T_n^{1/2} = \Big(\sum_{j=1}^n X_j^2\, I\{X_j^2\leqslant b_n\}\Big)^{1/2}$$

we get the upper estimate in the FLIL using only the condition that $T_n\to\infty$ a.s. These results are useful for studing trimmed sums.

С.-Петербургский
государственный
электротехнический университет

Поступило 16 октября 1997 г.