А. А. Иванов

БИТОПОЛОГИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ОТНОШЕНИЙ

Введение

Произведением двух множеств X и Y мы, как обычно, будем называть множество $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$, *отношением* же X/Y этих множеств (в указанном порядке) мы будем называть здесь, для краткости, множество всех однозначных отображений X в Y (обычно зто множество обозначается через $C(X, Y)$ или Y^X). Известно, что между этими теоретико-множественными операциями имеется определенная связь, а именно для произвольно фиксированных множеств X, Y, Z существует взаимно однозначное соответствие между отображениями

$$F : X \times Y \longrightarrow Z$$

и

$$G : X \longrightarrow Y/Z$$

Это соответствие определяется условием

$$F(x, y) = z \iff G(x)(y) = z$$

$$\text{для любых } x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$$

Действительно, если отображение F определено, то определено и отображение G, так как тогда для любого $x \in X$ определено отображение $G(x) : Y \longrightarrow Z$, значение которого $G(x)(y) = F(x, y)$ для любого $y \in Y$. С другой стороны, если определено отображение G, то определено и отображение $F : X \times Y \longrightarrow Z$, значение которого $F(x, y) = G(x)(y)$ для любых $x \in X$, $y \in Y$.

Так определенная связь между произведениями множеств и их отношениями позволяет сопоставлять топологическим и битопологическим структурам на произведениях $X \times Y$ множеств соответствующие структуры на отношениях, то есть на $C(Y, Z)$, и обратно (для прежней теории мы будем пользоваться старыми обозначениями). В топологической ситуации такого рода сопоставление частично осуществлялось при определении расщепляющих и совместно непрерывных топологий на $C(X,Y)$. В этой ситуации все множества рассматривались с заданными на них топологическими структурами, топологическая структура на произведении множеств являлась всегда произведением заданных на этих множествах топологических структур, а отношение $C(X,Y)$ топологических пространств состояло из непрерывных отображений (см. [1]).

Напомним соответствующие определения из статьи [1].

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторое семейство топологических пространств. Топологическая структура τ на множестве $C(Y,Z)$ называется $\mathcal{A}$-*расщепляющей*, если для каждого топологического пространства $X \in \mathcal{A}$ непрерывность любого отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$ влечет непрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow C_\tau(Y,Z)$, где $C_\tau(Y,Z)$ – множество $C(Y,Z)$, рассматриваемое с фиксированной на нем топологической структурой τ. Топологическая структура τ на множестве $C(Y,Z)$ называется $\mathcal{A}$-*совместно непрерывной*, если для каждого топологического пространства $X \in \mathcal{A}$ непрерывность любого отображения $G : X \longrightarrow C_\tau(Y,Z)$ влечет непрерывность соответствующего отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$. Если $\mathcal{A}$ является семейством всех топологических пространств, то просто говорят о расщепляющей или совместно непрерывной топологии на множестве $C(Y.Z)$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $C(Y,Z)$ и $\mathcal{A}$-совместно непрерывная топологическая структура на $C(Y,Z)$ определены, для фиксированной системы $\mathcal{A}$, в общем случае, неоднозначно. Действительно, если τ – топологическая структура на $C(Y,Z)$, то при уменьшении τ сохраняется, очевидно, ее $\mathcal{A}$-расщепляемость, а при увеличении τ сохраняется ее $\mathcal{A}$-совместная непрерывность.

Рассмотрим, теперь, в некотором смысле обратную задачу построения топологических структур на произведениях множеств по заранее фиксированному типу $\tau(Y,Z)$ топологических структур на отношениях Y/Z топологических пространств. Единственным условим, которое нам понадобится, это мультипликативность таких топологических структур по второму аргументу. Задачу можно сформулировать следующим образом.

Обозначим через $(X \times Y)_\tau$ произведение множества точек пространства X на множество точек пространства Y, рассматриваемое с определенной на этом произведении топологической структурой τ. Пусть фиксированы топологические пространства X, Y и некоторое семейство $\mathcal{A}$ топологических пространств. Топологическую структуру τ будем называть $\mathcal{A}$-*расщепляющей*, если для каждого топологического пространства $Z \in \mathcal{A}$ из непрерывности любого отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z$ следует непрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow Y/Z$. Топологическую структуру τ будем называть $\mathcal{A}$-*совместно непрерывной*, если для каждого топологического пространства $Z \in \mathcal{A}$ из непрерывности любого отображения $G : X \longrightarrow Y/Z$ следует непрерывность отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z$.

Эти конструкции для отношений и для произведений, в общем, аналогичны, но в первом, уже представленном в литературе, варианте $\mathcal{A}$-расщепляющие топологические структуры и $\mathcal{A}$-совместно непрерывные топологические структуры определяются на частных, а во втором – на произведениях. Заметим, сразу, что обе эти конструкции осуществимы и в битопологической ситуации.

Основная цель статьи состоит в изложении элементов соответствующей битопологической теории, но этому будет предшествовать существенное расширение исходной топологической теории.

§1. Топологические структуры на произведениях

В этом параграфе будут рассматриваться, в основном, свойства топологических структур на произведениях, поэтому мы будем говорить часто о $\mathcal{A}$-расщепляемости и о $\mathcal{A}$-совместной непрерывности, не оговаривая, при этом, что имеются в виду именно произведения, а не частные. Мы будем также иметь в виду, что топологические пространства X и Y фиксированы, а $Z \in \mathcal{A}$ – произвольно.

1. Простейшие свойства. Почти непосредствнно из определений $\mathcal{A}$- расщепляющей топологической структуры на произведении и $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структуры на произведении следует:

(1) Свойство топологической структуры быть $\mathcal{A}$-расщепляющей сохраняется при ее сужении.

(2). Свойство топологической структуры быть $\mathcal{A}$-совместно непрерывной сохраняется при ее расширении.

(3). Свойство топологической структуры быть $\mathcal{A}$-расщепляющей и ее свойство быть $\mathcal{A}$-совместно непрерывной сохраняются при сужении системы $\mathcal{A}$. В частности, если τ является расщепляющей или совместно непрерывной топологической структурой, то она будет $\mathcal{A}$-расщепляющей или $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой для любой системы $\mathcal{A}$ топологических пространств.

(4). Наименьшая $\mathcal{A}$-совместно непрерывная топологическая структура всегда существует. Мы будем обозначать ее через $\tau(\mathcal{A})$.

(5). Если $\mathcal{A} = \cup \mathcal{A}_i | i \in I$, то $\tau(\mathcal{A}) = \cap \tau(\mathcal{A}_i) | i \in I$.

(6). $\tau(\mathcal{A}) = \cap \tau(\{Z\}) | Z \in \mathcal{A}$.

(7). Если $\mathcal{A} = \cap \mathcal{A}_i | i \in I$, то $\tau(\mathcal{A}) \subset sup\{\tau(\mathcal{A}_i) | i \in I\}$.

2. Эквивалентные семейства топологических пространств. Будем говорить, что семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ *эквивалентны*, если свойство топологических структур быть $\mathcal{A}$-расщепляющими эквивалентно их свойству быть $\mathcal{A}'$-расщепляющими и, одновременно, свойство топологических структур быть $\mathcal{A}$-совместно непрерывными эквивалентно их свойству быть $\mathcal{A}'$-совместно непрерывными. Эквивалентность этих семейств будем записывать соотношением $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$.

Теорема. *Каждое семейство $\mathcal{A}$ топологических пространств эквивалентно одноэлементному семейству.*

Доказательство. Необходимо заметить, прежде всего, что приводимое здесь доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы в [1] с той разницей, что вместо свободного объединения фигурирующих там топологических пространств нам надо будет рассмотреть их прямое произведение.

Действительно, пусть T_{sp} – множество всех не $\mathcal{A}$-расщепляющих топологий и T_{jc} – множество всех не $\mathcal{A}$-совместно непрерывных топологий на $X \times Y$. Для каждой топологической структуры $\tau \in T_{sp}$ в $\mathcal{A}$ найдется в $\mathcal{A}$ такое топологическое пространство Z^{sp}_{τ}, что τ – не Z^{sp}_{τ}-расщепляющая топологическая структура на $X \times Y$. Аналогично, для каждой топологической структуры $\tau \in T_{jc}$ найдется в $\mathcal{A}$ такое пространство Z^{jc}_{τ}, что τ – не Z^{jc}_{τ}-совместно непрерывная топологическая структура на $X \times Y$. Пусть

$$\mathcal{A}_0 = \{Z^{sp}_{\tau} | \tau \in T_{sp}\} \cup \{Z^{jc}_{\tau} | \tau \in T_{jc}\}.$$

Пусть $Z(\mathcal{A})$ – прямое произведение всех топологических пространств из $\mathcal{A}_0$. Докажем, что $\mathcal{A} \sim \{Z(\mathcal{A})\}$.

Пусть τ – произвольная $\mathcal{A}$-расщепляющая топологическая структура на $X \times Y$, $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z(\mathcal{A})$ – непрерывное отображение и $Z_0 \in \mathcal{A}_0$. Тогда композиция F с проекцией pr_{Z_0} прямого произведения $Z(\mathcal{A}) = \prod Z|Z \in \mathcal{A}_0$ на Z_0 также является непрерывным отображением $pr_{Z_0}F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z_0$ и, так как $Z_0 \in \mathcal{A}$, соответствующее отображение $G_{Z_0} : X \longrightarrow X/Z_0$ также является непрерывным отображением. Заметим теперь, что в силу нашего предположения о мультипликативности класса топологических структур, фиксируемых на отношениях Y/Z топологических пространств, топологическое пространство $Y/Z(\mathcal{A})$ является прямым произведением топологических пространств Y/Z, взятым по всем $Z \in \mathcal{A}_0$. Отсюда следует, в силу непрерывности $G_Z : X \longrightarrow Y/Z$ для каждого $Z \in \mathcal{A}_0$, что $G : X \longrightarrow Y/Z(\mathcal{A})$ – непрерывное отображение. Тем самым доказано, что τ является $Z(\mathcal{A})$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$.

Пусть, теперь, τ является $Z(\mathcal{A})$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$. Предположим, что вместе с тем τ не является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой. Тогда $\tau \in T_{sp}$ и поэтому не является Z^{sp}-расщепляющей топологической структурой, следовательно найдется такое непрерывное отображение $F_{Z_\tau^{sp}} : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z_{\tau^{sp}}$, что $G_{Z_\tau^{sp}} : X \longrightarrow Y/Z_\tau^{sp}$ не является непрерывным отображением. Но тогда и отображение $G : X \longrightarrow Y/Z(\mathcal{A})$ не будет непрерывным отображением, что противоречит условию. Наше предположение неверно и потому τ является в действительности $\mathcal{A}$- расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$. Тем самым доказано, что τ является $\mathcal{A}$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$ тогда и только тогда, когда она является $Z(\mathcal{A})$-расщепляющей топологической структурой на $X \times Y$.

Докажем теперь аналогичное утверждение относящееся к совместной непрерывности.

Пусть τ – произвольная $\mathcal{A}$-совместно непрерывная топологическая структура на $X \times Y$, $G : X \longrightarrow Y/Z(\mathcal{A})$ – непрерывное отображение и $Z_0 \in \mathcal{A}_0$. Так как Z_0 является одним из сомножителей прямого произведения $Z(\mathcal{A})$, то $G_{Z_0} : Z \longrightarrow Y/G_{Z_0}$ – также непрерывное отображение. Но тогда, в силу $\mathcal{A}$-совместной непрерывности τ и $F_{Z_0} : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z_0$ – непрерывное отображение. Так как Z_0 – произвольный элемент системы $\mathcal{A}_0$, то и $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z(\mathcal{A})$ – непрерывное отображение. Тем самым доказано, что τ является и $Z(\mathcal{A})$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$.

Пусть, теперь, τ является $Z(\mathcal{A})$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$. Предположим, что вместе с тем τ не является $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой. Тогда $\tau \in T_{jc}$ и поэтому не является Z^{jc}-совместно непрерывной топологической структурой, следовательно найдется такое непрерывное отображение $G_{Z^{sp}_\tau} : X \longrightarrow Y/Z^{sp}_\tau$, что $F_{Z^{sp}_\tau} : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z^{sp}_\tau$ не является непрерывным отображением. Но тогда и отображение $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z(\mathcal{A})$ не будет непрерывным отображением, что противоречит условию. Наше предположение неверно и потому τ является в действительности $\mathcal{A}$- совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$. Тем самым доказано, что τ является $\mathcal{A}$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$ тогда и только тогда, когда она является $Z(\mathcal{A})$-совместно непрерывной топологической структурой на $X \times Y$. Тем самым доказано, что $\mathcal{A} \sim Z(\mathcal{A})$.

Из этой теоремы и соответствующей теоремы в [1] следует, что при изучении $\mathcal{A}$-расщепляющих и изучении $\mathcal{A}$-совместно непрерывных топологических структур, как для произведений так и для отношений топологических пространств, можно ограничиться одноэлементными системами $\mathcal{A}$ то есть рассматривать произвольно фиксированные тройки X, Y, Z топологических пространств.

§2. Топологические структуры на отношениях

1. Обобщение классической теории. Рассмотрим произвольно фиксированную тройку X, Y, Z топологических пространств и отображения

$$F : X \times Y \longrightarrow Z,$$
$$G : X \longrightarrow X/Y,$$

в которых $F(x, y) = G(x)(y)$. В этом случае (а к нему сводится, как мы убедились, произвольный случай, в котором рассматриваются произвольные системы $\mathcal{A}$ топологических пространств X или Z) топологическая структура τ на X/Y называлась X-расщепляющей, если из непрерывности любого отображения F следует непрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow$

$(X/Y)_\tau$. Соответственно, топологическая структура τ на (X/Y) называлась X-совместно непрерывной, если из непрерывности любого отображения $G : X \longrightarrow (X/Y)_\tau$ следует непрерывность соответствующего отображения F. В этом определении обычно предполагалось, что $X \times Y$ – стандартное произведение топологических пространств X и Y. Однако, когда мы переходим к формулировке понятия расщепляющей топологической структуры и понятия совместно непрерывной топологической структуры для произведений, то мы не можем воспользоваться стандартной топологической структурой на отношении X/Y, ее просто нет. Поэтому нам приходится сначала договариваться о фиксации таких топологических структур на отношениях X/Y. Только после этого мы говорим, что топологическая структура τ на $X \times Y$ является Z-расщепляющей, если из непрерывности отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z$ следует непрерывность соответствующего ему отображения $G : X \longrightarrow X/Y$. Соответственно, топологическая структура τ на $X \times Y$ называется Z-совместно непрерывной, если из непрерывности отображения G следует непрерывность отображения $F : (X \times Y)_\tau \longrightarrow Z$.

В связи с этим возникает естественное желание ввести и в теорию $\mathcal{A}$-расщепляющих и $\mathcal{A}$-совместно непрерывных топологических структур на отношениях Y/Z топологических пространств произвольно фиксированные топологические структуры $\tau(X, Y)$ на произведениях $X \times Y$. При этом необходимо, конечно, чтобы такая фиксация была свободно аддитивна по первому аргументу. При этом условии теорема эквивалентности любой системы $\mathcal{A}$ одноэлементной системе останется, как нетрудно доказать, справедливой.

2. Топологические структуры на произведениях и на отношениях. Мы можем теперь рассматривать топологические структуры на произведениях и топологические структуры на отношениях в рамках единой теории. В этой теории возникает, прежде всего, проблема изучения связи между топологическими структурами на произведениях множеств и топологическими структурами на отношениях множеств. Фиксируем, например, тройку X, Y, Z топологических пространств и рассмотрим минимальные Z-совместно непрерывные топологические структуры на произведениях $X \times Y$ (они всегда существуют) и максимальные X-расщепляющие топологические структуры на отношениях

Y/Z (они также всегда существуют). Если τ – какая-то топологическая структура на Y/Z, то через τ^* мы будем обозначать минимальную совместно непрерывную топологическую структуру на $X \times Y$, соответствующую топологическому пространству $(Y/Z)_\tau$, если же τ – какая-то топологическая структура на $X \times Y$, то через τ_* мы будем обозначать максимальную расщепляющую топологическую структуру на Y/Z, соответствующую топологическому пространству $(X \times Y)_\tau$.

Итак, фиксируем тройку X, Y, Z топологических пространств и некоторую топологическую структуру τ на Y/Z, для которой множество непрерывных отображений $G : X \longrightarrow (X/Y)_\tau$ не пусто. Ей соответствует топологическая структура τ^* на $X \times Y$, а топологической структуре τ^* соответствует топологическая структура $(\tau^*)_*$ на Y/Z. Имеет место следующее соотношение

$$(\tau^*)_* \subset \tau$$

Действительно, τ^* – минимальная топологическая структура на $X \times Y$, относительно которой некоторая система отображений $F : X \times Y \longrightarrow Z$ состоит из непрерывных отображений. Это те отображения, для которых соответствующие отображения $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\tau$ непрерывны. Но возможно, что эта система не исчерпывает все непрерывные отображения $F : (X \times Y)_{\tau^*} \longrightarrow Z$ и поэтому множество всех непрерывных отображений $G : X \longrightarrow (Y/Z)_{(\tau^*)_*}$ шире, чем множество всех непрерывных отображений $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\tau$. Отсюда непосредственно следует доказываемое включение. Аналогично доказывается включение

$$\tau \subset (\tau_*)^*.$$

3. Двойственные топологические структуры. Рассмотрим случай, когда $(\tau^*)_* = \tau$. Обозначим в этом случае τ^* через $\overline{\tau}$ и τ через $\underline{\tau}$. Тогда исходное равенство примет следующий вид

$$\overline{\tau}_* = \underline{\tau}$$

С другой стороны, мы будем иметь в принятых нами обозначениях равенство $\overline{\tau} = \tau^* = \underline{\tau}^*$, то есть

$$\underline{\tau}^* = \overline{\tau}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\tau = (\tau_*)^*$. Обозначим в этом случае τ_* через $\underline{\tau}$ и τ через $\overline{\tau}$. Тогда исходное равенство примет следующий вид

$$\underline{\tau}^* = \overline{\tau}$$

С другой стороны, мы будем иметь в принятых нами обозначениях равенство $\underline{\tau} = \tau_* = \overline{\tau}_*$, то есть

$$\overline{\tau}_* = \underline{\tau}$$

Таким образом в обоих рассмотренных нами случаях мы приходим к одним и тем же соотношениям

$$\overline{\tau}_* = \underline{\tau}, \ \ \underline{\tau}^* = \overline{\tau}$$

Топологические структуры $\overline{\tau}$ на $X \times Y$ и $\underline{\tau}$ на Y/Z, между которыми имеют место эти соотношения, мы будем называть *двойственными друг другу.*Оказывается справедливы следующее утверждение.

Теорема. *Для любой тройки X, Y, Z топологических пространств существуют двойственные друг другу топологические структуры $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$ на $X \times Y$ и Y/Z, соответственно.*

Доказательство. Пусть τ – произвольная топологическая структура на Y/Z, для которой множество непрерывных отображений $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\tau$ не пусто. Тогда $(\tau^*)_* \subset \tau$. Если при этом $(\tau^*)_* = \tau$, то мы уже нашли двойственные топологические структуры τ^* и τ, если же включение строгое, то мы рассмотрим включения $(((\tau^*)_*)^*)_* \subset (\tau^*)_* \subset \tau$ или, в других обозначениях, $(\tau_1^*)_* \subset \tau_1 \subset \tau$. Если первое включение не строгое, то есть $(\tau_1^*)_* = \tau_1$, то мы нашли двойственные топологические структуры τ_1^* и τ_1, если же оба вкелючения строгие, то мы можем снова повторить эту процедуру, строя последовательно топологические структуры $\tau, \ \tau_1, \ldots, \tau_n$. Если такая последовательность окажется конечной, то есть $(\tau_n^*)_* = \tau_n$, то мы опять получим двойственные топологические структуры τ_n^* и τ_n, если же эта последовательность бесконечна, то мы рассмотрим топологическую структуру $\tau_\omega = inf\{\tau_n | n \in \mathbb{N}\}$ и так далее в соответствии с приципом трансфинитного построения. Но такая процедура трансфинитного построения строго убывающих топологических структур не может иметь сколь угодно большую мощность и потому должна будет на каком-то шаге закончиться топологической структурой $\underline{\tau}$ и мы получим в конечном счете двойственные топологические структуры $\overline{\tau} = \underline{\tau}^*$ и $\underline{\tau}$.

Замечание. Собствено говоря, доказательство этой теоремы можно сделать тривиальным, взяв в качестве исходной топологической структуры τ тривиальную структуру на Y/Z. Тогда каждое отображение $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\tau$ будет непрерывным отображением и, следовательно, τ^* – наименьшая топологическая структура на $X \times Y$, для которой каждое отображение $F : (X \times Y)_{\tau^*} \longrightarrow Z$ – непрерывно. Нетрудно сообразить, что топологические структуры τ^* и τ будут тогда двойственными друг другу. Исходное доказательство позволяет нам начинать с любой топологической структуры τ на Y/Z лишь бы множество непрерывных отображений $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\tau$ не было пусто.

4. Примеры. В предыдущем разделе мы привели пример двойственных топологических структур, в котором структура на Y/Z тривиальна. Сейчас мы рассмотрим и нетривиальные примеры.

В этих примерах $X = Y = Z = \mathbb{R}$ – числовая прямая с обычной топологией, $X \times Y = \mathbb{R}^2$, $Y/Z = \mathbb{R}/\mathbb{R}$ -множество всех непрерывных вещественных функций,

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{R},$$

Мы рассмотрим три варианта, каждый из которых описывается заданием соответствующей топологической структуры τ на $\mathbb{R}/\mathbb{R}$.

1). Топологическая структура τ на $\mathbb{R}/\mathbb{R}$ тривиальна. В этом случае τ^* есть произведение дискретной топологической структуры на обычную топологическую структуру числовой прямой.

2). Топологическая структура τ на $\mathbb{R}/\mathbb{R}$ определяется поточечной сходимостью непрерывных функций. В этом случае τ^* определяется сходимостью последовательностей, стационарных хотя бы по одной из координат ее точек.

3). τ – компактно открытая топология на множестве всех непрерывных функций. В этом случае τ^* – обычная топология числовой плоскости.

§3. Битопологические структуры на произведениях и отношениях

1. Основные определения. *Битопологическим пространством* мы будем называть здесь произвольную пару (X, β), где X – множество, а β – топологическая структура на множестве $X \times X$.

Таким образом $(X \times X, \beta)$ – топологическое пространство. Часто мы будем писать X вместо (X, β). Отображение $f : X \longrightarrow X'$ мы будем называть *бинепрерывным отображением* битопологического пространства (X, β) в битопологическое пространство (X', β'), если $f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$ –непрерывное отображение.

Пусть X, Y, Z – произвольно фиксированные битопологические пространства, $F : X \times Y \longrightarrow Z$ и $G : X \longrightarrow Y/Z$ – не обязательно бинепрерывные отображения, связанные соотношением $F(x, y) = G(x)(y)$, как и в топологической теории с той разницей, что здесь Y/Z – множество всех бинепрерывных отображений битопологического пространства Y в битопологическое пространство Z. Такие отображения F и G мы будем называть *соответствующими друг другу.*

Мы можем ввести, теперь, понятие $\mathcal{A}$-расщепляющей битопологической структуры и понятие $\mathcal{A}$-совместно непрерывной битопологической структуры, как для произведений так и для отношений.

Фиксируем на каждом произведении $X \times Y$ битопологических пространств новую битопологическую структуру так, чтобы эта фиксация была аддитивной по первому аргументу. Фиксируем, затем, некоторый класс $\mathcal{A}$ битопологических пространств.

Будем говорить, что битопологическая структура β на Y/Z является *$\mathcal{A}$-расщепляющей битопологической структурой на отношении*, если для любого $X \in \mathcal{A}$ из бинепрерывности отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$ следует бинепрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\beta$.

Будем говорить, что битопологическая структура β на Y/Z является *$\mathcal{A}$-совместно непрерывной битопологической структурой на отношении*, если для любого $X \in \mathcal{A}$ из бинепрерывности отображения $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\beta$ следует бинепрерывность соответствующего отображения $F : X \times Y \longrightarrow Z$.

Фиксиуем на каждом отношении Y/Z битопологических пространств новую битопологическую структуру так, чтобы эта фиксация была мультипликативной по второму аргументу. Фиксируем, затем, некоторый класс $\mathcal{A}$ битопологических пространств.

Будем говорить, что битопологическая структура β на $X \times Y$ является *$\mathcal{A}$-расщепляющей битопологической структурой на произведении*, если для любого $Z \in \mathcal{A}$ из бинепрерывности отображения $F : (X \times Y)_\beta \longrightarrow Z$ следует бинепрерывность соответствующего отображения $G : X \longrightarrow Y/Z$.

Будем говорить, что битопологическая структура β на $X \times Y$ является $\mathcal{A}$-*совместно непрерывной битопологической структурой на произведении*, если из бинепрерывности отображения $G : X \longrightarrow Y/Z$ следует бинепрерывность соответствующего отображения $F : (X \times Y)_\beta \longrightarrow Z$.

2. Двойственные битопологические структуры. Теория $\mathcal{A}$-расщепляемости и $\mathcal{A}$-совместной непрерывности битопологических структур является точным аналогом сответствующей топологической теории, как для произведений так и для отношений пространств, поэтому мы сразу перейдем к двойственным битопологическим структурам. Фиксируем тройку X, Y, Z битопологических пространств и рассмотрим минимальные Z-совместно непрерывные битопологические структуры на произведениях $X \times Y$ (они всегда существуют) и максимальные X-расщепляющие битопологические структуры на отношениях Y/Z (они также всегда существуют). Если β – какая-то битопологическая структура на Y/Z, то через β^* мы будем обозначать минимальную Z-совместно непрерывную битопологическую структуру на $X \times Y$, соответствующую битопологическому пространству $(Y/Z)_\beta$, если же β – какая-то битопологическая структура на $X \times Y$, то через β_* мы будем обозначать максимальную X-расщепляющую битопологическую структуру на Y/Z, соответствующую битопологическому пространству $(X \times Y)_\beta$. В общем случае мы имеем опять соотношения

$$(\beta^*)_* \subset \beta, \ \ \beta \subset (\beta_*)^*.$$

Если какое-нибудь из этих включений является равенством, то введя соответствующие обозначения мы получаем соотношения

$$\overline{\beta}_* = \underline{\beta}, \ \ \underline{\beta}^* = \overline{\beta}$$

Битопологические структуры $\overline{\beta}$ на $X \times Y$ и $\underline{\beta}$ на Y/Z мы будем называть *двойственными друг другу* .

Это понятие двойственности битопологических структур к сожалению не является обобщением введенного в 1.3 понятия двойственности топологических структур. Дело в том, что пространства $X \times Y$ и Y/Z играют разную роль и, в соответствии с этим, битопологические структуры $\overline{\beta}$ и $\underline{\beta}$ имеют различные свойства. С одной стороны, имеет место следующее утверждение.

Пусть X, Y, Z – разложимые битопологические пространства и β – произвольная битопологическая структура на Y/Z, тогда β^* – разложимая битопологическая структура на $X \times Y$.

Действительно, β^* – наименьшая битопологическая структура на $X \times Y$, для которой $F : (X \times Y)_{\beta^*} \longrightarrow Z$ непрерывно, если непрерывно отображение $G : X \longrightarrow (Y/Z)_\beta$. Таким образом β^* – наименьшая битопологическая структура на $X \times Y$, для которой данная совокупность отображений $F : (X \times Y)_{\beta^*} \longrightarrow Z$ состоит из непрерывных отображений. Так как Z – разложимое битопологическое пространство, то его структура является разложимой битопологической структурой и поэтому ее F-прообраз является разложимой битопологической структурой на $X \times Y$. Но точная нижняя граница разложимых битопологических структур является разложимой битопологической структурой, откуда и следует доказываемое утверждение. Из справедливости этого утверждения непосредственно следует, что в рассматриваемой ситуации $\overline{\beta}$ – разложимая битополгическая структура.

С другой стороны, нетрудно построить пример, когда в этой ситуации $\underline{\beta}$ – неразложимая битопологическая структура. Таким образом теория двойственности битопологических структур на произведениях и на отношениях существенно богаче топологической теории.

Литература

1. Д. Н. Георгиу, С. Д. Илиадис, Б. К. ,Пападопулос, *Топологии пространств функций..* — Зап. научн. семин. ПОМИ **208** (1993), 82–97.

Ivanov A. A. Bitopologies of products and ratios.

The purpose of the paper is to extend the concepts of splitting and jointly continuous topologies of function spaces on products of spaces, to present a resultant new theory of duality between topologies on function spaces and topologies on products of spaces, to generalize these theories on bitopological spaces. The author proceed from the well known in literature definitions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 сентября 1996 г.