В. А. Шарафутдинов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКА В СТАЦИОНАРНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Пусть (M, g) компактное риманово многообразие с границей и $\tau_M = (TM, p, M)$ его касательное расслоение. Точки TM обозначаются парами (x, ξ), где $x \in M$, $\xi \in T_xM$. Если $(x^1, \dots, x^n)$ локальная система координат, определенная на $U \subset M$, то координаты вектора $\xi \in T_xM$ являются компонентами разложения $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Семейство $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$ устанавливает локальную координатную систему на TM с областью $p^{-1}(U)$. Только такие координатные системы рассматриваются на TM. Легко видеть, что векторное поле на TM, определенное в координатной форме уравнением

$$H = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{jk}(x) \xi^j \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

не зависит от выбора координат; здесьΓ^i_{jk} есть символы Кристоффеля. H называется геодезическим векторным полем и однопараметрическая группа G^t диффеоморфизмов TM, порожденная H, называется геодезическим потоком. Многообразие $\Omega M = \{(x, \xi) \in TM \,|\, |\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j = 1\}$ единичных векторов есть инвариант относительно G^t, поэтому H можно рассматривать как дифференциальный оператор первого порядка $H : C^\infty(\Omega M) \to C^\infty(\Omega M)$.

Фиксируем две (комплексные) функции $\varepsilon \in C^\infty(M)$ и $\sigma \in C^\infty(M \times [-1, 1])$, которые мы будем рассматривать как поглощение и диаграмма рассеяния, соответственно. Уравнение

$$(H + \varepsilon(x)) u(x, \xi) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\Omega_x M} \sigma(x; \langle \xi, \xi' \rangle) u(x, \xi') dw_x(\xi) + f(x) \qquad (1)$$

на ΩM называется (стационарным, линейным, с единичной скоростью) уравнением переноса. Здесь $\Omega_x M = \Omega M \cap T_x M$ – единичная сфера в x, dw_x – форма объема на $\Omega_x M$ и $w_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ –

ее объем. Конечно, уравнение можно рассматривать для источника $f(x,\xi)$, зависящего от обоих аргументов, но наш главный результат получается в случае изотропного источника $f = f(x)$.

Граница $\partial\Omega M$ многообразия ΩM есть объединение 2-х подмногообразий

$$\partial_\pm \Omega M = \{(x,\xi) \in \Omega M | x \in \partial M, \quad \pm\langle \xi, \nu(x)\rangle \geqslant 0\},$$

где ν есть единичный вектор внешней нормали к границе, $\langle , \rangle$ есть скалярное произведение в метрике g.

Чтобы найти решение уравнения (1) нужно знать входящий поток $u|_{\partial_-\Omega M}$. Мы будем рассматривать только случай однородного граничного условия

$$u|_{\partial_-\Omega M} = 0. \tag{2}$$

Граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение при некотором условии на геометрию (M,g), которое обсуждается ниже и при некотором предположении на малость диаграммы рассеяния относительно поглощения; мы не будем обсуждать последнее предположение. В этой работе нас интересует обратная задача определения источника f. Данными для обратной задачи является исходящий поток

$$u|_{\partial_+\Omega M} = u_0. \tag{3}$$

Чтобы сформулировать предположения, при которых доказывается единственность обратной задачи, нам нужно дать некоторые определения.

Напомним, что в каждой точке $x \in \partial M$ определяется вторая квадратичная форма границы $\mathrm{II}\,(\xi,\xi) = \langle \nabla_\xi \nu, \xi\rangle$. Граница называется строго выпуклой, если эта форма положительно определенная на $T_x(\partial M)$ для каждого $x \in \partial M$. Назовем (M,g) компактным диссипативным римановым многообразием (кратко КДРМ), если граница строго выпукла и для каждого $(x,\xi) \in \Omega M$ максимальная геодезическая $\gamma_{x,\xi}(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $\gamma_{x,\xi}(0) = x$ и $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$ определяется на конечном промежутке $[\tau_-(x,\xi), \tau_+(x,\xi))]$. Напомним, что геодезическая $\gamma : [a,b] \to M$ называется максимальной, если она не может быть продолжена на отрезок $[a-\varepsilon_1, b+\varepsilon_2]$ при $\varepsilon_i \geqslant 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$. Заметим, что совместно с определением КДРМ, мы определили две функции $\tau_\pm : \Omega M \to \mathbf{R}$.

Для компактного многообразия N и целого $k \geqslant 0$ обозначим через $H^k(N)$ Гильбертово пространство функций на N, которые имеют локально квадратично-интегрируемые производные до порядка k включительно в любой локальной координатной системе. В частности, $H^0(N) = L_2(N)$.

Говорят, что уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)y = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b;\ y = (y_1, \dots, y_n))$$

не имеет пары сопряженных точек на отрезке $[a, b]$, если не имеется никакого нетривиального решения уравнения, которое обращается в нуль в двух различных точках отрезка.

Задавая функции $\varepsilon \in C^\infty(M)$ и $\sigma \in C^\infty(M \times [-1, 1])$, определим функцию $k = k[\varepsilon, \sigma]$ следующим образом. Для $n = \dim M \geqslant 3$ разложим $\sigma(x, \mu)$ в ряд Фурье по полиномам Гегенбауэра

$$\sigma(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x) C_k^{(n/2-1)}(\mu) \tag{4}$$

и положим

$$k(x) = \max_{k \geqslant 1} \left| \frac{n-2}{n+2k-2}\, \sigma_k(x) - \varepsilon(x) \right|. \tag{5}$$

Для $n = 2$ формулы (4), (5) заменяются следующими

$$\sigma(x, \cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x) e^{ik\theta},$$

$$k(x) = \max_{k \geqslant 1} |\sigma_k(x) - \varepsilon(x)|. \tag{6}$$

Заметим, что k не зависит от σ_0; в частности, $k = |\varepsilon|$, если $\sigma(x, \mu)$ не зависит от второго аргумента.

Теперь можно сформулировать наш главный результат.

Теорема 1. *Пусть (M, g) компактное диссипативное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$, $\varepsilon \in C^\infty(M)$ и $\sigma \in C^\infty(M \times [-1, 1])$ две комплексные функции. Предположим, что для каждого $(x, \xi) \in \Omega M$ уравнение*

$$\frac{D^2y}{dt^2} + \overset{k}{R}(t)y = 0 \tag{7}$$

не имеет пары сопряженных точек на геодезической $\gamma = \gamma_{x,\xi}$: $[\tau_-(x,\xi),\ \tau_+(x,\xi)] \to M$. *Здесь* $D/dt = \dot\gamma^i \nabla_i$ *есть оператор ковариантного дифференцирования вдоль* γ *и* $\overset{k}{R}(t) : T_{\gamma(t)} \to T_{\gamma(t)}$ *есть линейный оператор, чья матрица в локальных координатах определяется равенством*

$$\overset{k}{R}{}^p_k(t) = [g^{pi}(R_{ijkl} + k^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}))]_{x=\gamma(t)}\dot\gamma^j(t)\dot\gamma^l(t), \qquad (8)$$

где (R_{ijkl}) *тензор кривизны и функция* k *определяется формулами* (5)–(6). *Тогда каждая функция* $f \in H^1(M)$ *восстанавливается единственным образом на основании следа* (3) *решения граничной задачи* (1)–(2) *и следующая оценка устойчивости*

$$\|f\|_{L_2(M)} \leqslant C\|u_0\|_{H^1(\partial_+\Omega M)} \qquad (9)$$

имеет место с постоянной C, *независящей от* f.

Сформулируем некоторые следствия из этой теоремы, относящиеся к случаям, когда, либо интеграл рассеяния отсутствует, либо метрика является Эвклидовой.

В случае $\sigma \equiv 0$ граничная задача (1), (2) имеет точное решение, которое дается формулой

$$u_0(x,\xi) = I^\varepsilon(x,\xi) \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} f(\gamma_{x,\xi}(t)) \exp\left[-\int\limits_t^0 \varepsilon(\gamma_{x,\xi}(s))ds\right]dt, \quad ((x,\xi) \in \partial_+\Omega M), \qquad (10)$$

где $\gamma_{x,\xi} : [\tau_-(x,\xi), 0] \to M$ – максимальная геодезическая, удовлетворяющая начальным условиям $\gamma_{x,\xi}(0) = x$ и $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$. Оператор

$$I^\varepsilon : C^\infty(M) \to C^\infty(\partial_+\Omega M), \qquad (11)$$

определенный формулой (10), называется экспоненциальным X-лучевым преобразованием, связанным с поглощением ε. Оно играет главную роль в задачах эмиссионной томографии. Нетрудно показать, что оно может быть расширено до ограниченного оператора

$$I^\varepsilon : H^k(M) \to H^k(\partial_+\Omega M)$$

для каждого $k \geqslant 0$.

Следствие 1. *Пусть (M,g) есть КДРМ и $\varepsilon \in C^\infty(M)$. Предположим, что для каждого $(x,\xi) \in \Omega M$, уравнение (7) при*

$$\overset{k}{R}{}^p_k(t) = \overset{\varepsilon}{R}{}^p_k(t) = [g^{pi}(R_{ijkl} + |\varepsilon|^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}))]_{x=\gamma(t)}\dot\gamma^j(t)\dot\gamma^l(t)$$

не имеет пары сопряженных точек на геодезической $\gamma = \gamma_{x,\xi} : [\tau_-(x,\xi), \tau_+(x,\xi)] \to M$. Тогда оператор

$$I^\varepsilon : H^1(M) \to H^1(\partial_+\Omega M) \tag{12}$$

является инъективным и оценка устойчивости

$$\|f\|_{L_2(M)} \leqslant \|I^\varepsilon f\|_{H^1(\partial_+\Omega M)} \tag{13}$$

имеет место с постоянной C, независящей от f.

Кратко обсудим роль кривизны в Теореме 1 и Следствии 1. Для $\varepsilon \equiv \sigma \equiv 0$ (7) является классическим уравнением Якоби

$$\frac{D^2y}{dt^2} + R(\dot\gamma, y)\dot\gamma = 0$$

и оператор (11) называется X-лучевым преобразованием. При заданном КДРМ отсутствие сопряженных точек для уравнения Якоби эквивалентно предположению, что каждые две точки соединены единственной геодезической. Хорошо известно, что если все кривизны сечения не положительны, то уравнение Якоби не имеет пары сопряженных точек на каждой геодезической. Конечно, когда правая часть (8) складывается со слагаемым, содержащим k^2, последнее требование может оказаться неправильным; но общая тенденция остается справедливой: чем больше оказывается отрицательная кривизна сечения, тем большие значения k допускаются без нарушения условий Теоремы 1. Другими словами, большие значения поглощения и рассеяния могут быть компенсированы отрицательными значениями кривизны.

Рассмотрим теперь случай, когда M есть область в $\mathbf{R}^n$ и g совпадает с Евклидовой метрикой. В этом случае классическое уравнение переноса имеет вид

$$\xi^i \frac{\partial u(x,\xi)}{\partial x^i} + \varepsilon(x)u(x,\xi) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{|\xi'|=1} \sigma(x; \langle \xi, \xi' \rangle)u(x,\xi')d\xi' + f(x) \tag{14}$$

и система (7) приводит к скалярному уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0. \tag{15}$$

Таким образом, мы получаем

Следствие 2. *Пусть M ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой строго выпуклой границей, функции $\varepsilon \in C^\infty(M)$ и $\sigma \in C^\infty(M \times [-1,1])$ такие, что уравнение (15) не имеет пары сопряженных точек на каждом прямолинейном отрезке $\gamma : [a,b] \to M$; здесь $k = k[\varepsilon, \sigma]$ определяется равенствами (5), (6). Тогда, каждая функция $f \in H^1(M)$ восстанавливается однозначно на основе следа (3) решения граничной задачи (14), (2) и имеет место оценка устойчивости (9).*

Наконец, для $\sigma \equiv 0$ граничная задача (14), (2) имеет точное решение и мы получаем утверждение об обратимости экспоненциального X-лучевого преобразования в Эвклидовом пространстве, которое может быть записано в виде

$$I^\varepsilon f(x,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t\xi) \exp\left[-\int\limits_{t}^{\infty} \varepsilon(x+s\xi)ds\right] dt \quad (x \in \mathbf{R}^n,\ 0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n), \tag{16}$$

при этом предполагается, что функции f и ε должны быть продолжены нулем вне M.

Известно несколько условий, которые являются достаточными для отсутствия сопряженных точек скалярного уравнения. Самое простейшее из них обеспечивает отсутствие сопряженных точек для уравнения (15) при условии, что неравенство

$$k_0 \operatorname{diam} M < \pi \tag{17}$$

имеет место, где

$$k_0 = \sup_{x \in M} k(x), \qquad \operatorname{diam} M = \sup_{x,y \in M} |x - y|.$$

Д. Финч [1] доказал обратимость оператора (16) в предположении, что неравенство (17), правая часть которого заменяется на 5.37, выполняется. В предыдущей работе [2] автор получил результат, который является более грубым, чем Теорема 1, но подходящим для более общего случая, когда диаграмма рассеяния $\sigma(x, \xi, \xi')$ зависит от всех трех аргументов.

Литература

1. D. V. Finch, *Uniqueness for the attenuated X-ray transform in the physical range.* — Inverse Problems **2** no. 2 (1986), 197–203.
2. В. А. Шарафутдинов, *Обратная задача для определения источника в стационарном уравнении переноса для рефрагирующей среды.* — Сибирский математический журнал **35**, № 4 (1994), 937–945.

Sharafutdinov V. A. Inverse problem on determining a source in the stationary transport equation on a Riemannian manifold.

On a compact Riemannian manifold the transport equation with unknown right-hand side is given. The right-hand side of the equation is recovered by values of the outcoming flow. Assumptions are formulated under which the uniqueness of a solution to the inverse problem is proved.

Институт Математики
Новосибирск, 630090, Россия

Поступило 10 октября 1995 г.