Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов

ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ ВБЛИЗИ ЛИНИИ РАЗРЫВА КРИВИЗНЫ

1^0. История развития методов решения задач дифракции и распространения волн насчитывает несколько веков. Это не удивительно поскольку почти все технические нововведения связаны с процессом волнового распространения. С ним постоянно имеют дело в таких областях как оптика, радиоинженерия, электроника, теплотехника, навигация, сейсморазведка, акустика и т.д. Трудно найти область техники, не связанную с вопросами дифракции и распространения волн. Давно было показано, что весь огромный спектр задач волнового распространения может быть сведен к рассмотрению небольшого числа основных математических моделей. Так области оптики, радиоинженерии, навигации сводятся к рассмотрению уравнений Максвелла с теми или другими дополнительными условиями. Задачи акустики сводятся к рассмотрению волнового уравнения или уравнения Гельмгольца. Любые продвижения в решении этих модельных задач, как правило, приводят к большому числу новых технических и научных разработок.

Рассмотрение этих модельных задач привело к созданию большого числа методов как аналитических, так и численных. Но большая часть этих методов относится к исследованию задач с гладкими объектами. Это либо гладкие тела либо среды с гладко меняющимися характеристиками. Для этих задач создано большое количество как аналитических (преимущественно асимптотических методов), так и численных методов.

Гораздо хуже обстоит дело с решениями модельных задач в тех случаях, когда границы, среды и т.д. имеют особенности. Этими особенностями могут быть ребра, трещины, линии сопряжений (линии разрыва кривизны, производных от кривизн и т.д.).

Для таких задач удается исследовать решение либо в простых случаях (когда можно найти точное решение) либо описать решение с не очень большой точностью (асимптотические методы, метод Кирхгофа, метод геометрической теории дифракции), либо вычислить решение для случаев, когда волновое число не слишком велико (численные методы).

В последнее время наметилось некоторое продвижение в развитии асимптотических и численных методов для указанного класса задач. Существенный вклад в развитие этих методов внесли и авторы предлагаемой статьи [1, 2, 3].

Так в работе Н. В. Сивицкой и В. Б. Филиппова [2] рассмотрена задача о поведении волн шепчущей галереи, набегающих на вертикальную границу скачка показателя преломления в акустической среде. Для однородной упругой среды в статье Н. Я. Кирпичниковой и В. Б. Филиппова [3] изучалось поведение волн типа шепчущей галереи, удерживаемых кривизной поверхности и набегающих на полуплоскость.

Синтез результатов этих работ помог авторам решить задачу о поведении приповерхностных волн шепчущей галереи при переходе через линию разрыва эффективного радиуса кривизны, лежащую на свободной от напряжений поверхности неоднородного упругого тела. Рассмотрен случай трехмерной среды, неоднородной по координатам x, z и однородной лишь в направлении оси y.

2^0. Перейдем к постановке задачи. Рассмотрим неоднородное изотропное упругое выпуклое тело $\Omega \in \mathbf{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, $z \geqslant 0$, ограниченное поверхностью $\partial\Omega$, на которой отсутствуют напряжения. Поверхность $\partial\Omega$ состоит из двух непрерывно переходящих друг в друга гладких цилиндрических поверхностей $\partial\Omega^-$ $(z \geqslant 0, x \leqslant 0)$ и $\partial\Omega^+$ $(z \geqslant 0, x \geqslant 0)$ с одной образующей, параллельной оси y. При переходе через ось y – линию сопряжения поверхностей $\partial\Omega^-$, $\partial\Omega^+$ касательная плоскость к поверхности $\partial\Omega$ изменяется непрерывно, а эффективный радиус кривизны нормального сечения этой поверхности в каждой точке оси y имеет разрыв первого рода, величина которого не зависит от координаты y.

Фактически исследован квазидвумерный случай неоднородной упругой среды, параметры Ламе которой не зависят от координаты y, и все рассмотрения проводятся, например, в плоскости $x, z, y = y_0$.

Обозначим через L_b луч, расположенный в плоскости x, z и целиком лежащий на поверхности $\partial\Omega$. Под лучами понимаются экстремали интеграла Ферма $\int ds/b$, где ds – элемент длины дуги кривой, по которой происходит интегрирование, b – скорость распространения упругих поперечных волн в Ω.

Пусть вблизи гладкой свободной от напряжений поверхности $\partial\Omega$, ограничивающей неоднородное упругое тело, со стороны, например, левой ее части $\partial\Omega^-$ при соответствующих условиях могут сосредотачиваться два вида поперечных волн типа шепчущей галереи различной поляризации: волны [4], у которых смещение частиц происходит по направлению нормали к поверхности $\partial\Omega$, и волны [5], у которых смещение частиц происходит перпендикулярно плоскости нормального сечения поверхности вдоль луча L_b, как у волн Лява.

Рассматривается задача дифракции волн шепчущей галереи на линии разрыва эффективного радиуса кривизны, набегающих со стороны поверхности $\partial\Omega^-$ на выпуклую поверхность $\partial\Omega^+$. При переходе через эту линию (ось y) касательная плоскость к поверхности $\partial\Omega$, состоящей из двух частей $\partial\Omega^-$ и $\partial\Omega^+$, изменяется непрерывно, а эффективный радиус кривизны нормального сечения поверхности вдоль луча L_b на этой линии имеет разрыв первого рода.

Вектор смещений $\mathbf{u}$ упругой среды в области, ограниченной $\partial\Omega^-$, выберем в виде суммы продольной $\mathbf{u}_a$ и поперечной $\mathbf{u}_b$ волн, удовлетворяющих условиям отсутствия напряжения на границе. Продольная волна сразу убывает при удалении от границы вглубь тела. Поперечная же волна сосредоточена в некотором приповерхностном объемном волноводе вблизи луча L_b.

3^0. Приведем необходимые нам в дальнейшем известные результаты. Пусть q^1, q^2, q^3 – криволинейные координаты в Ω. Уравнения теории упругости в произвольной криволинейной системе координат имеют вид [4]

$$\sigma_{ij}\sqrt{g}\frac{\partial G^{ij}}{\partial q^r} + 2\frac{\partial}{\partial q^i}(\sigma_{rj}G^{ij}\sqrt{g}) - 2\rho G_{ir}\sqrt{g}\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} = 0,$$
$$i,\ j,\ r = 1,2,3, \tag{1}$$

здесь как обычно по всем повторяющимся индексам производится суммирование, t – время, через σ_{ij} обозначены компоненты тензора напряжений. В общем случае изотропной неоднородной среды компоненты σ_{ij} тензора напряжений связаны с компонентами вектора смещений $\mathbf{u} = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ следующими соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda}{\sqrt{g}} G_{ij} \frac{\partial}{\partial q^r}(\sqrt{g} u^{(r)}) + \mu \left[\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^r} u^{(r)} + G_{ri} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial q^j} + G_{rj} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial q^i} \right],$$

$$r, i, j, k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $\lambda(q^1, q^2, q^3)$, $\mu(q^1, q^2, q^3)$ – параметры Ламе, $\rho(q^1, q^2, q^3)$ – плотность среды. Элемент длины ds в системе координат q^1, q^2, q^3 определяется равенством

$$ds^2 = G_{ij} dq^i dq^j.$$

Матрица $\|G_{ij}\|$ из компонент метрического тензора в пространстве q^1, q^2, q^3 обратна матрице $\left\|G^{ij}\right\|$, $g = \det \|G_{ij}\|$. Здесь функции λ, μ, ρ предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз.

В рассматриваемом нами случае λ, μ, ρ и скорость поперечных волн $b = \mu/\rho$ являются функциями двух переменных.

Введем в окрестности поверхности $\partial\Omega$ следующую криволинейную систему координат. За координатную линию q^1 возьмем луч L_b, так что параметр $q^1 = \tau$ характеризует положение точки M_1 на луче

$$\tau(M_0, M_1) = \int\limits_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{b},$$

где M_0 – некоторая фиксированная точка луча с координатами $(\tau_0, \alpha_0 = y_0)$, причем $\tau \leqslant 0$ для точек поверхности $\partial\Omega^-$, параметр $q^2 = \alpha$ – расстояние до луча L, проведенное ортогонально лучу L на $\partial\Omega$, т.е. в рассматриваемом случае $\alpha \equiv y$, а параметр $q^3 = \nu$ есть расстояние от произвольной точки M тела Ω до поверхности $\partial\Omega$ по нормали к ней так, что внутренним точкам Ω соответствуют значения $\nu > 0$. Иногда нам будет удобно вместо параметра τ использовать параметр $s = b\tau$ – длину дуги луча L_b.

Радиус-вектор $\mathbf{R}(M)$ произвольной точки M вблизи поверхности $\partial\Omega$ тела Ω имеет вид

$$\mathbf{R}(M) = \mathbf{r}(\tau) + \alpha \mathbf{e}_\alpha + \nu \mathbf{n}(\tau),$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\tau) + \alpha \mathbf{e}_\alpha$ – параметрическое уравнение поверхности $\partial\Omega$, $\mathbf{e}_\alpha$ – орт вдоль оси y, $\mathbf{n}(\tau)$ – орт нормали к поверхности $\partial\Omega$, направленный внутрь тела Ω.

Для компонент метрического тензора имеем

$$G_{\tau\tau} = g_{\tau\tau} - 2\nu b_{\tau\tau} + \nu^2(\mathbf{n}'_\tau, \mathbf{n}'_\tau), \quad G_{\tau\nu} = 0,$$
$$G_{\tau\alpha} = 0, \quad G_{\alpha\nu} = 0, \quad G_{\alpha\alpha} = 1, \quad G_{\nu\nu} = 1,$$

где $g_{\tau\tau}$ и $b_{\tau\tau}$ – коэффициенты соответственно первой и второй квадратичных форм Гаусса для поверхности $\partial\Omega$.

Ввиду того, что строятся решения, осциллирующие вблизи луча L_b на поверхности $\partial\Omega$ и экспоненциально затухающие при удалении от $\partial\Omega$, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$k(\tau) + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0} > 0, \tag{3}$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{G_{\tau\tau}}{b^2}\right)\bigg|_{\nu=0} < 0.$$

Из полученных ниже формул будет следовать физический смысл неравенства (3). При его выполнении внутри тела Ω вблизи $\partial\Omega$ сосредотачиваются волны типа шепчущей галереи. В формуле (3) через $k(\tau)$ обозначена кривизна нормального сечения поверхности $\partial\Omega$ вдоль луча L_b в точке с координатами $(\tau, \alpha_0 = y_0, 0)$ равная

$$k(\tau) = \frac{b_{\tau\tau}}{b^2} = -\frac{(\mathbf{r}'_\tau, \mathbf{n}'_\tau)}{b^2},$$

где $\mathbf{r}'_\tau/b$ – единичный вектор касательной к лучу L_b, направленный в сторону возрастания параметра τ. Величина $\mathcal{K}(\tau)$ равная

$$\mathcal{K}(\tau) = \left(k(\tau) + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial \nu}\right)$$

играет роль эффективной кривизны нормального сечения поверхности $\partial\Omega$ вдоль луча L_b, а обратная ей величина $\mathcal{R} = (\mathcal{K})^{-1}$ обычно называется соответственно эффективным радиусом кривизны. Если скорость b постоянна, то условие (3) означает, что центр кривизны нормального сечения поверхности вдоль кривой лежит с той стороны, где $\nu > 0$. Следовательно эффект сосредоточенности решения в слое по ν возникает внутри упругого тела. Краевые условия отсутствия напряжений на границе $\partial\Omega$ тела Ω запишутся следующим образом

$$\sigma_{i\nu}\big|_{\nu=0} = 0, \quad i = \tau, \alpha, \nu, \tag{4}$$

где тензор напряжений σ_{ij} определен выше.

Вектор смещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющий уравнениям (1), (2) и граничным условиям отсутствия напряжений (4) берем в виде суммы продольной $\mathbf{u}_a$ и поперечной $\mathbf{u}_b$ частей поля, учтя две различные поляризации поперечной части волнового поля,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b, \quad \mathbf{u} = (u^\tau, u^\alpha, u^\nu). \tag{5}$$

Следует заметить, что в области Ω асимптотически существенную роль играют поперечные смещения среды, однако на свободной от напряжения границе $\partial\Omega^-, \tau \leqslant 0$, необходимо учитывать и продольные смещения, для того чтобы удовлетворить во всех приближениях по обратным степеням большого параметра $\omega^\gamma, 0 < \gamma \leqslant 1$, не только уравнениям (1), (2), но и граничным условиям (4). На границе составляющие $\mathbf{u}_a$ и $\mathbf{u}_b$ в случае поперечного смещения направленного по нормали имеют асимптотически одинаковый порядок.

Каждая волна состоит из продольной $\mathbf{u}_a$ и поперечной $\mathbf{u}_b$ компонент, распространяющихся по поверхности $\partial\Omega$ с одной и той же фазовой скоростью

$$v_{\mathrm{ph}}^{(p,q)} = b(\tau, y_0, 0) + \omega^{-2/3}\frac{\xi\psi^2 b^3}{2} - \omega^{-1} 2Mb^5\psi^3 + O(\omega^{-4/3}).$$

Здесь неизвестные функции ψ, M и число ξ будут определены ниже.

Продольная компонента $\mathbf{u}_a$ при удалении от границы затухает по закону $\exp(-\omega\nu M)$, где

$$M = \sqrt{\frac{1}{g_{\tau\tau}} - \frac{1}{a^2}}\Bigg|_{L_b},$$

т. е. имеет комплексный эйконал $\tau_a = \tau + i\nu\sqrt{b^{-2} - a^{-2}}$ и характеризует лучевую часть поля в асимптотическом разложении.

Поперечная компонента $\mathbf{u}_b$ при выполнении условия (3) сосредоточивается вблизи границы $\partial\Omega$ в слое по ν порядка $\omega^{-2/3}$, образуя эффект шепчущей галереи. При удалении от этого слоя вглубь тела Ω поперечная компонента экспоненциально убывает, стремясь к нулю, подобно убыванию $v(x)$ при $x \to \infty$, т. е. ведет себя характерно волнам пограничного слоя и определяет дифракционную часть поля смещений, в отличие от лучевой части поля $\mathbf{u}_a$. Глубина проникновения продольной волны значительно меньше глубины проникновения поперечной.

Мы приведем две формулы для вектора смещений $\mathbf{u}$, соответствующие двум различным поляризациям поперечной составляющей $\mathbf{u}_b$. В первом случае смещение в главном происходит в плоскости нормального сечения поверхности $\partial\Omega^-$ вдоль луча L_b по нормали к поверхности. Смещение для второго случая происходит перпендикулярно плоскости нормального сечения поверхности $\partial\Omega^-$ вдоль луча L_b.

Ограничиваясь лишь первыми отличными от нуля коэффициентами асимптотического разложения продольной составляющей вектора смещений, запишем лучевую часть поля в виде

$$\mathbf{u}_a = e^{-i\omega(t-\tau)} e^{\Phi(\tau,\alpha,\omega)} \big(V_a^\tau, \omega^{-1/2} V_a^\alpha, V_a^\nu\big) \omega^{-1/3}\ e^{-\omega\nu M},$$

где фазовая функция $\Phi(\tau,\omega)$ имеет вид

$$\Phi(\tau,\omega) = i\omega^{1/3}\varphi(\tau)(-\xi)\ +\ 2i\int\limits_{\tau_0}^{\tau} Mb^4\psi^3(\tau)d\tau, \tag{6}$$

а составляющие V_a^i, $i = \nu, \tau, \alpha$ равны соответственно

$$V_a^\nu = iMV_a^\tau,\ V_a^\tau = 2v'(-\xi)\psi(\tau),$$

причем составляющая V_a^α является функцией от V_a^τ, V_a^ν, которую мы не приводим, так как она не используется ниже. В равенстве (6) введены новые функции

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \psi^2(\tau)b^2(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$\psi^3(\tau) = -\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{G_{\tau\tau}}{b^2}\Big)\Big|_{\nu=0} = \frac{2}{b^2\mathcal{R}}\Big|_{\nu=0} > 0, \tag{8}$$

причем параметр ξ определен для рассматриваемых смещений по разному: либо $\xi = x_p < 0$, где $\{x_p\}$, $p = 1, 2, \dots,$ – корни функции Эйри $v(x)$ для смещений одного типа, либо этот же параметр $\xi = x'_p < 0$, где $\{x'_p\}$, $p = 1, 2, \dots,$ – корни производной функции Эйри $v'(x)$ для смещений другого типа.

Подчеркнем, что в приведенных выше формулах функция

$$M = \sqrt{\frac{1}{g_{\tau\tau}} - \frac{1}{a^2}}\Big|_{L_b} = \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}$$

всегда положительна, так как продольная скорость a распространения волн больше поперечной скорости b.

Представляющие дифракционную часть поля векторы $\mathbf{u}_b^{(\nu)}$, $\mathbf{u}_b^{(\alpha)}$ в соответствии с двумя поляризациями имеют следующие выражения

$$\mathbf{u}_b^{(\nu)} = e^{-i\omega(t-\tau)} e^{\Phi(\tau,\omega)} \big(\omega^{-1/3} V^\tau, \omega^{-1/3} V^\alpha, V^\nu\big), \tag{9}$$

$$\mathbf{u}_b^{(\alpha)} = e^{-i\omega(t-\tau)} e^{\Phi(\tau,\omega)} \big(\omega^{-1/3} W^\tau, W^\alpha, \omega^{-1/3} W^\nu\big). \tag{10}$$

Здесь фазовая функция $\Phi(\tau,\omega)$ определяется формулой (6).

Мы рассматриваем квазидвумерный случай, когда компонента вектора смещения вдоль координаты $\alpha \equiv y$ учитывается, но при этом сам вектор смещения и все введенные выше функции от этой координаты $\alpha \equiv y$ не зависят. Ввиду этого опустим ниже координату $\alpha \equiv y$ из аргументов рассматриваемых функций в формулах (3), (6)–(8).

Из формул (9), (10) следует, что главными членами искомых асимптотик являются составляющие V^ν, W^α. Эти составляющие удовлетворяют одному и тому же параболическому уравнению

$$\left(2i\frac{\omega}{b^2}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - \omega^2\frac{2\nu}{b^2\mathcal{R}(\tau)}\right)U = 0. \tag{11}$$

Для $U = V^\nu e^{\Phi(\tau,\omega)}$ из условий отсутствия напряжений на $\partial\Omega$ имеем граничное условие Дирихле

$$V^\nu\big|_{\nu=0} = 0, \tag{12}$$

а для $U = W^\alpha e^{\Phi(\tau,\omega)}$ – граничное условие Неймана

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=0} = 0. \tag{13}$$

Ввиду сосредоточенности решения вблизи границы $\partial\Omega$ следует учитывать предельное условие относительно функции U

$$U\big|_{\nu\to\infty} \to 0. \tag{14}$$

Составляющие V^ν, W^α волн шепчущей галереи являются решениями краевых задач Штурма–Лиувилля для уравнения (11), граничных условий либо (12), либо (13) и предельного условия (14) по переменной ν. В каждом случае граничных условий (13) или (14) асимптотически главными являются волны шепчущей галереи

$$U^{wg} \sim \exp\left\{i\Big(\frac{\omega}{2b(\tau)}\Big)^{1/3}(-\xi)\int\limits_{\tau_0}^{\tau} b(\tau)\mathcal{K}(\tau)^{2/3}d\tau\right\}A_0(\tau)\times$$
$$\times v\left(\Big(\frac{\omega}{b(\tau)}\Big)^{2/3}(2\mathcal{K}(\tau))^{1/3}\nu-\xi\right), \tag{15}$$

причем величина ξ в случае смещения, соответствующего граничному условию (12), равна одному из корней функции Эйри $v(x)$ номера p, а для граничного условия (13) – p-му корню производной функции Эйри. Функциональный множитель $A_0(\tau)$ может быть записан в виде

$$A_0(\tau) = A_p\sqrt[6]{\frac{b(\tau)\mathcal{R}(\tau_0)}{b(\tau_0)\mathcal{R}(\tau)}},\quad \tau=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{d}{s}b(s),\quad A_p=\mathrm{const}\,.$$

4^0. Перейдем теперь к исследованию задачи дифракции волн шепчущей галереи, набегающих со стороны цилиндрической поверхности $\partial\Omega^-$ на цилиндрическую поверхность $\partial\Omega^+$ с общей образующей (ось y). В зависимости от поляризации падающего поля вблизи $\partial\Omega^-$, рассеянное поле будет удовлетворять соответственно либо условию Дирихле (12), либо краевому условию Неймана (13) на границе тела $\partial\Omega^+$.

Рассмотрим сначала предельную (по переменной τ) задачу Дирихле для неизвестной функции U вблизи $\partial\Omega^+$

$$\left(2i\frac{\omega}{b^2}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}-\omega^2 2\frac{\nu}{b^2}\mathcal{K}(\tau)\right)U=0, \tag{16}$$

$$U\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{17}$$

$$(U-U^{wg})\big|_{\tau\to-\infty}\to 0, \tag{18}$$

причем в последнем соотношении функция U^{wg}, определена формулой (15).

Введем в окрестности линии скачка кривизны $(0, y_0, 0)$ растянутые координаты σ^+, σ^-, ζ^+, ζ^- по формулам

$$\sigma^{+(-)} = (\frac{\omega}{2b})^{1/3} b\mathcal{K}^{+(-)}(0)^{2/3}\tau, \tag{19}$$

$$\zeta^{+(-)} = (\frac{\omega}{b})^{2/3}(2\mathcal{K}^{+(-)}(0))^{1/3}\nu, \tag{20}$$

при этом знаки $+(-)$ соответствуют знакам $\partial\Omega^{+(-)}$.

Вблизи точки $(0, y_0, 0)$ уравнение (11) в координатах (σ, y, ζ), определенных формулами (19), (20), перейдет в следующее:

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - \zeta\Big)U = 0. \tag{21}$$

Решение уравнения (21) имеет следующий вид:

$$U^{wg} = \exp\{i\sigma(-\xi)\}A_0(\tau)v(\zeta - \xi), \quad v(-\xi) = 0. \tag{22}$$

Волна шепчущей галереи, определяемая в главном приближении формулой (22), набегает на границу перехода цилиндрической поверхности $\partial\Omega^-$ с цилиндрической поверхностью $\partial\Omega^+$. Ясно, что справа от этой линии $\sigma^+ \geqslant 0$, $\zeta^+ \geqslant 0$ формула (22) перестает быть решением задачи.

Из физических соображений, а также из рассмотрения аналогичных эталонных задач, следует ожидать, что волна отраженная от границы скачка кривизны и идущая обратно будет величиной второго порядка малости, следовательно в первом приближении ею можно пренебречь.

В этом предположении решение задачи (в главном приближении) можно найти следующим способом.

В окрестности границы волна после выделения главного осциллирующего множителя $\exp\{-i\omega(t-\tau)\}$ будет удовлетворять параболическому уравнению (21) и, естественно, граничному условию

$$U\big|_{\partial\Omega^+} = 0.$$

Тогда для решения U справа от точки разрыва получим следующую задачу:

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - \zeta\Big)U = 0, \quad \zeta = \zeta^+ > 0, \ \sigma = \sigma^+ > 0,$$

$$U = 0, \quad \zeta = \zeta^+ = 0, \quad \sigma = \sigma^+ > 0, \tag{24}$$

$$U = U^{wg}, \quad \zeta = \zeta^+ > 0, \quad \sigma = \sigma^+ = 0,$$

где U^{wg} решение слева от точки $(0, y_0, 0)$, определенное формулой (22) при $\tau^- = \sigma^- = 0$.

5^0. Для исследования решения задачи (24) построим функцию Грина $G(\sigma,\zeta,\zeta')$ смешанной задачи, удовлетворяющей условиям:

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - \zeta\Big)G(\sigma,\zeta,\zeta') = 0, \sigma > 0, \zeta > 0,$$

$$G(\sigma,\zeta,\zeta') = 0, \quad \sigma > 0,\ \zeta = 0, \tag{25}$$

$$G(\sigma,\zeta,\zeta') = \partial l(\zeta-\zeta'), \quad \sigma = 0, \quad ze > 0.$$

Всюду ниже при упоминании о функции Грина будем считать, что $\sigma = \sigma^+$, $\zeta = \zeta^+$, $\zeta' = (\zeta')^+$.

Тогда решение задачи (24) будет даваться квадратурой:

$$U(\sigma,\zeta) = \int\limits_0^\infty U^{wg}(\sigma,\zeta')G(\sigma,\zeta,\zeta')d\zeta'. \tag{26}$$

Функцию Грина задачи (25) $G^D(\sigma,\zeta;0,\zeta')$ будем искать методом обобщенной функции Грина [6], т. е. в виде суперпозиции собственных функций типа волн шепчущей галереи.

Проводя ряд преобразований, окончательно для функции Грина $G^D(\sigma,\zeta;0,\zeta')$ получим формулу в случае, если переменные ζ,ζ' принадлежат рассматриваемому пограничному слою и, следовательно, удовлетворяют условию $\zeta = O(\omega^\epsilon)$, $\zeta' = O(\omega^\epsilon)$, $\epsilon < 2/3$. Эта формула будет в главном приближении следующей:

$$G^D(\sigma,\zeta;0,\zeta') =$$

$$= \Big(\frac{2b}{\omega}\Big)^{1/3}\frac{e^{i\sigma(-\xi)}}{2[v'(-\xi)]^2}v(\zeta-\xi)v(\zeta'-\xi)\frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{R}^+(\tau)\mathcal{R}^+(0)}}. \tag{27}$$

Пусть ζ' принадлежит пограничному слою, а ζ находится вне слоя – в зоне тени, в том числе на сколь угодно большом расстоянии от границы $\partial\Omega$. Введем в области тени для точки с координатами (s,ν) другие координаты (q,r). Проведем из точки (τ,ν) касательную и нормаль к границе $\partial\Omega$, пусть q – значение длины дуги в точке касания, а r – длина касательной. Положение точки можно характеризовать также лучевыми координатами $\tau_1 = q+r$, и q. Эти координаты ортогональны. При $\nu \to 0$ стремятся к нулю также $s-q$ и r. Используя естественное уравнение границы, можно найти связь координат s, ν с лучевыми координатами при $\nu \to 0$ $(r \to 0)$:

$$s = q + r - \frac{1}{3\rho^2} r^3 + \frac{7}{24} \frac{\rho'}{\rho^3} r^4 + \dots,$$

$$\nu \frac{1}{2\rho} r^2 - \frac{\rho'}{6\rho^2} r^3 + \frac{2{\rho'}^2 - \rho\rho'' - 3}{24\rho^3} r^4 \dots,$$

здесь ρ – радиус кривизны нормального сечения поверхности вдоль луча L_b в точке $(q, 0)$.

Функция Грина $G^D(\sigma, \zeta; 0, \zeta')$ в главном для случая такого расположения точек приобретает вид:

$$G^D(\sigma, \zeta; 0, \zeta') = (\rho(q))^{1/6} \frac{e^{-i\pi/4}\sqrt{b}}{\sqrt{2\omega r}[v'(-\xi)]^2} e^{i\sigma(-\xi)} v(\zeta' - \xi). \tag{28}$$

Пусть теперь обе точки ζ, ζ' находятся вне пограничного слоя. Их положение будем характеризовать длинами касательных r, r', проведенных из этих точек к границе, и точками касания $s = q$, $s' = q'$. Функция Грина, соответствующая задаче Дирихле, для данного положения точек получается вида:

$$G^D(\sigma, \zeta; 0, \zeta') = \frac{(\rho(q)\rho(q'))^{1/6} b^{2/3}}{2^{1/3}(\omega)^{2/3}\sqrt{r}[v'(-\xi)]^2} e^{-i\sigma\xi}. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь построение функции Грина задачи Неймана для различного положения точек ζ, ζ'. В соответствии с формулами (27)–(29) представим различные выражения для функций Грина задачи Неймана для трех случаев расположения точек ζ, ζ':

$$G^N(\sigma, \zeta; 0, \zeta') = \left(\frac{2b}{\omega}\right)^{1/3} \frac{e^{i\sigma\zeta_1}}{2(-\xi)[v(-\xi)]^2} v(\zeta' - \xi') v(\zeta - \xi'). \tag{30}$$

$$G^N(\sigma, \zeta; 0, \zeta') = (\rho(q))^{1/6} \frac{e^{-i\pi/4}\sqrt{b}}{\sqrt{2\omega r}(-\xi)[v(-\xi')]^2} e^{-i\sigma\xi'} v(\zeta' - \xi'). \tag{31}$$

$$G^N(\sigma, \zeta; 0, \zeta') = \frac{(\rho(q)\rho(q'))^{1/6} b^{2/3}}{2^{1/3}\omega^{2/3}\sqrt{r}(-\xi')[v(-\xi')]^2} e^{-i\sigma\xi'}. \tag{32}$$

Возвращаясь к формулам задачи (24), находим, что решение справа от точки скачка кривизны будет в главном приближении определяться равенством

$$U(\sigma,\zeta) = A(0)\int\limits_0^{+\infty} v\left(\zeta'\sqrt[3]{\frac{\mathcal{R}^+(0)}{\mathcal{R}^-(0)}}-\xi\right)G^D(\sigma,\zeta;0,\zeta')d\zeta', \tag{33}$$

где для различных положений точек ζ и ζ' функция $G^D(\sigma,\zeta;0,\zeta')$ определена формулами (27), (28), (29).

Проанализируем поведение интенсивности волнового процесса $U(\sigma,\zeta)$ в окрестности границы после перехода через точку сопряжения $(0,y_0,0)$ на поверхности $\partial\Omega^+$, т.е. при увеличении σ^+ от нуля. Для этого найдем для функции (32) разложение вблизи границы $\partial\Omega$

$$U(\sigma,\zeta) = U(\sigma,\zeta)\Big|_{\zeta=0} + \frac{\partial U}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0}\zeta + \dots . \tag{34}$$

В силу граничных условий для задачи Дирихле (вектор смещений поляризован по нормали к поверхности $\partial\Omega$) первое слагаемое в правой части формулы (34) равно тождественно нулю, а для задачи Неймана (вектор смещений поляризован вдоль оси y) - второе слагаемое равно тождественно нулю. В связи с этим по аналогии с теорией распространения электромагнитных волн [7] первый отличный от нуля коэффициент правой части формулы (34), т.е. $\frac{\partial U}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0}$ в задаче Дирихле и $U(\sigma,\zeta)\Big|_{\zeta=0} = U(\sigma,0)$ в задаче Неймана, будем называть поверхностным током вдоль границы для волнового процесса.

Тогда поверхностный ток вдоль границы, определяемый волной шепчущей галереи и соответствующий задаче Дирихле, будет характеризоваться следующим выражением для второго случая расположения точек (формула (28) для функции Грина)

$$\Psi(\sigma) = \frac{\partial U}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} =$$

$$= A(0)\int\limits_0^{\infty}(\rho(q))^{5/3}e^{-i\pi/4}\frac{b^{1/2}}{\sqrt{2\omega r^5}[v'(-\xi)]^2}(\frac{b}{\omega})^{2/3}e^{-i\sigma\xi}v(\zeta'-\xi)d\zeta'.$$

Последняя формула показывает, что величина рассматриваемого поверхностного тока волнового процесса быстро убывает при смещении от точки $(0, y_0, 0)$ вправо, т.е. при возрастании r (как $O(r^{-5/2})$).

Аналогичным образом может быть решена задача Неймана. Здесь волна соскальзывания будет в окрестности точки $(0, y_0, 0)$ равна

$$U^{wg}(\sigma, \zeta) = U^{wg}(0) e^{-i\sigma\xi'} \frac{v(\zeta - \xi')}{v(-\xi')},$$

где ξ' – корень производной $v'(t)$ функции Эйри $v(t)$.

Сделаем некоторые окончательные выводы.

Функция Грина в случае задачи Неймана будет определяться формулами (30)–(32).

Решение справа от точки $(0, y_0, 0)$ плавно переходит в решение слева от этой точки.

Ток на границе, связанный с задачей Неймана, убывает гораздо медленнее, чем ток, связанный с задачей Дирихле, т.е. при удалении от точки разрыва будет преобладать одна поляризация (которой соответствует задача Неймана). Поле на любых расстояниях от границы можно найти двумя способами: либо продолжая решения, найденные в окрестности границы за ее пределы; либо используя формулу Грина.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00666).

Литература

1. V. B. Philippov, *Diffraction by nonplanar screen.* — Wave Notion **3** (1981), 78–81.
2. Н. В. Сивицкая, В. Б. Филиппов, *О распространении волн шепчущей галереи в среде с вертикальной границей раздела..* — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **179** (1989), 147–151.
3. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), ???.
4. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы.* — 1971 **CXV**, 127–145.
5. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого неоднородного тела произвольной формы.* Сборник “Проблемы математического анализа”, Вып. 2. Изд-во ЛГУ, (1969) С. 134-140.
6. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* т. IV, ч. 2, М., Наука, (1981) 550с.
7. В. А. Фок, *Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн.* М.: Изд–во “Советское радио”, (1970) 520с.

Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B. Diffraction of the whispering gallery waves near the line of the curvature jump.

A nonhomogeneous elastic body with a stress-free boundary is considered. The boundary consists of two smooth cylindrical surfaces with a continuous tangent plane but a discontinuity of the curvature on the junction line.

The behaviour of the two kinds of the whispering gallery transversal surface waves passing through the junction line is studied. The displacement vector of the first kind (the Dirichlet boundary condition) wave is normal to the boundary and the displacement vector of the second kind (the Neumann boundary condition) wave is tangent to the boundary and normal to the ray, similar to the displacement vector of the Love waves.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 30 сентября 1996 г.