Предисловие

Работа посвящена вычислительным методам решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц общего вида (регулярных и сингулярных), зависящих от одного и двух параметров.

Этими задачами являются следующие. Для однопараметрических матриц:

- вычисление всех или части особых точек (нулей и полюсов) и им соответствующих структурных индексов, собственных векторов и жордановых цепочек;
- вычисление полиномиальных решений минимальных индексов и минимальных базисов нуль-пространств из полиномиальных решений.

Для двухпараметрических матриц:

- разделение непрерывного и дискретного спектров;
- вычисление точек дискретного спектра и им соотвтетсвующих собственных векторов и жордановых цепочек;
- вычисление полиномиальных решений, минимальных индексов и минимальных базисов нуль-пространств из полиномиальных решений.

Приведен обзор некоторых известных методов решения спектральных задач для однопараметрических полиномиальных матриц и пучков матриц; основанных, как правило, на применении элементарных ортогональных матриц, дана их классификация. Описан общий подход к построению методов, основанный на ранговой факторизации матричного оператора. Так, на примере ΔW-q алгоритмов ($q = 0, 1, 2$) и их применений к решению спектральных задач матриц и систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений с q-параметрами продемонстрирован общий подход построения методов и алгоритмов, который может быть индуктивно по числу параметров продолжен на многопараметрические ($q > 2$) задачи.

Вопросы численной стабильности и оценка ошибок округления методов не рассматриваются. Но основными ремеслами, используемыми для построения предлагаемых методов и алгоритмов, являются хорошо зарекомендовавшие себя в вычислительной практике к влиянию ошибок округления матрицы плоских вращений и отражений и строящиеся на их базе унимодулярные треугольные матрицы. Кроме того для сингулярной матрицы выбрана стратегия изолирования регулярной и сингулярной ее частей с последующим вычислением для каждой из них спектральных характеристик. Все это позволяет упростить решение задачи, избежать неопределенность и добиться лучшей численной стабильности в вычислении спектральных характеристик. При построении методов широко используются свойства понижающих подпространств и исчерпывание известных спектральных характеристик. Наряду с эквивалентными преобразованиями применяются более общие преобразования перехода к так называемым согласованным пучкам, обеспечивающие исчерпывание спектральных характеристик без предварительного их вычисления.

Материал статьи можно разбить на две части. В первой части, включающей главы 1–3, представлены методы решения задач для однопараметрических полиномиальных матриц. Во второй части, включающей главы 4–8, рассмотрены методы решения задач для двухпараметрических полиномиальных матриц, а также для одно- и двухпараметрических рациональных матриц.

В главе 1 приведены известные теоретические результаты об однопараметрических матрицах, которые используются при описании методов решения спектральных задач.

В главе 2 рассмотрены методы решения спектральных задач для пучков постоянных матриц как регулярных, так и сингулярных. Дана систематизация методов, описаны принципы их построения.

При этом мы не рассматриваем методов решения спектральных задач для пучков симметричных матриц и итерационных методов решения частичной проблемы для регулярных пучков с учетом их разреженности, хотя последние имеют большую практическую значимость. Методы решения этих задач широко освещены в литературе (см. напр. [69, 183, 267, 275, 17]).

В главе 3 приведены методы решения спектральных задач для полиномиальных матриц общего вида. Предлагается новый подход к построению методов, не требующий линеаризации задачи. Этот подход основан на ранговой факторизации сингулярных полиномиальных матриц. Предлагаются алгоритмы ранговой факторизации и их применение к решению спектральных задач. Рассмотрены алгоритмы вычисления структурных индексов конечного собственного значения и полюсно-нулевой структуры особой точки полиномиальной матрицы на бесконечности. Приводится краткое описание принципов построения известных методов решения проблемы собственных значений для регулярных полиномиальных матриц. Рассмотрены способы исчерпывания известных спектральных характеристик (сингулярных и регулярных).

В главе 4 даются некоторые сведения в спектральных характеристиках двухпараметрических полиномиальных матриц. Понятия понижающих подпространств и согласованных пучков обобщаются на случай пучков полиномиальных матриц. Приводятся алгоритмы построения понижающих подпространств и согласованных пучков, а так же алгоритмы исчерпывания одномерных собственных значений специального вида.

Глава 5 посвящена алгоритмам решения спектральных задач для сингулярных пучков полиномиальных матриц: разделению непрерывного и дискретного спектров, вычислению точек дискретного спектра и им соответствующих собственных векторов и жордановых цепочек. Рассмотрены способы раскрытия функционального определителя.

В главе 6 представлены методы решения спектральных задач для двухпараметрических полиномиальных матриц произвольных степеней по обоим параметрам. Рассмотрены два подхода. Первый подход основан на линеаризации задачи, т.е. переходу к сопровождающим пучкам полиномиальных матриц. Второй подход основан на ранговой факторизации двухпараметрической полиномиальной матрицы. Рассмотрены различные виды ранговой факторизации и алгоритмы их построения. Метод ранговой факторизации применяется к построению минимального базиса нуль-пространства из полиномиальных решений, к вычислению точек дискретного спектра, к выделению регулярного ядра.

В главе 7 предложены методы решения спектральных задач для одно- и двухпараметрических рациональных матриц. Приведена классификация некоторых факторизаций, способы построения несократимых факторизаций и, в частности, минимальной несократимой факторизации. Приведены методы решения спектральных задач (вычисление особых точек, построение базисов нульпространств из полиномиальных решений).

В главе 8 рассматривается применение методов решения спектральных задач к решению параметрических задач алгебры. Предложены алгоритмы выполнения операций над скалярными полиномами от одной и двух переменных; алгоритмы выполнения некоторых операций над матричными полиномами; методы решения линейно-алгебраических систем с полиномиальными и рациональными матрицами, в частности, вычисление псевдообратной матрицы; методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений от одной и двух переменных. Предложен способ оценки неустранимой погрешности полиномиального и рационального видов.

В конце приводится библиография статей, имеющих отношение к решению упомянутых выше спектральных задач и их применению. При этом мы не претендуем на исчерпывающий список всех работ в этой области.

Автор благодарит В. Б. Хазанова за неизменное внимание к ее работе и участие в совместных статьях, а также глубоко признателен коллегам по работе Т. Я. Коньковой, В. Н. Симоновой и Н. Б. Сциборской за оказанную ими неоценимую помощь в экспериментальной проверке на ЭВМ большинства из предлагаемых алгоритмов.

Глава 1. Некоторые сведения об однопараметрических полиномальных и рациональных матрицах

Основными объектами исследований являются λ-матрицы двух видов: рациональная матрица $R(\lambda)$, как элемент $C^{m\times n}(\lambda)$–пространства $m \times n$ матриц над полем рациональных функций, и ее частный случай полиномиальная матрица $D(\lambda)$, как элемент $C^{m\times n}[\lambda]$-пространства $m \times n$ матриц над кольцом скалярных полиномов. Для $D(\lambda)$ используется также запись

$$D(\lambda) = C_s\lambda^s + C_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + C_0$$

в виде матричного полинома целой степени $s \geqslant 1$ и, в частности, при $s = 1$ запись в виде пучка матриц

$$D(\lambda) = A - \lambda B.$$

Здесь $C_k \quad (k = 0, 1), \quad A$ и B суть элементы $C^{m\times n}$ пространства $m \times n$ матриц над полем комплексных чисел.

Под словами "λ-матрица" понимается любая из матриц $R(\lambda)$ или $D(\lambda)$. Различаются сингулярные и регулярные λ-матрицы. Сингулярной называется λ-матрица, для которой выполняется одно из условий: $m \neq n$ или при $m = n$ определитель λ-матрицы тождественно относительно λ равен нулю. В противном случае λ-матрица называется регулярной.

В главе приводятся известные теоретические положения для λ-матриц.

В §1.1 дается описание спектральных характеристик и формулировка спектральных задач, методы и алгоритмы решения которых рассматриваются в 1 части книги.

В §1.2 вводятся в рассмотрение понижающие подпространства и исследуются их свойства.

В §1.3 вводятся в рассмотрение согласованные пучки и исследуются их свойства. Они в некотором смысле обобщают понятие эквивалентных пучков и будут использоваться в последующих главах при конструировании алгоритмов решения спектральных задач.

В §1.4 приведены способы линеаризации полиномиальных матриц, позволяющие решение спектральных задач для полиномиальных матриц степени $s > 1$ сводить к решению аналогичных задач для пучков матриц. Указана связь между спектральными характеристиками.

В §1.5 рассматриваются некоторые факторизации постоянных матриц. В частности, рассмотрено ΔW-0 разложение и алгоритмы, его ркализующие. Исследованы свойства рангового сечения ΔW-0 разложения, приведено его применение к решению некоторых вспомогательных задач, на котрых базируются многие алгоритмы решения спектральных задач для пучка матриц.

§1.1. Спектральные характеристики λ-матриц [10, 225, 214, 235]

Для определения спектральных характеристик λ-матрицы рассмотрим их простейшие (канонические) формы. Приведение λ-матриц к канонической форме осуществляется с помощью эквивалентных и строго эквивалентных преобразований.

Преобразование вида

$$\widehat{W}(\lambda)R(\lambda)W(\lambda) = R_1(\lambda) \qquad \widehat{W}(\lambda)D(\lambda)W(\lambda) = D_1(\lambda)$$

называется эквивалентным, если $\widehat{W}(\lambda)$ и $W(\lambda)$ унимодулярные матрицы, и строго эквивалентным, если $\widehat{W}$ и W не особенные постоянные (не зависящие от λ) матрицы.

1.1.1. Канонические формы Смита. Особые точки и их полюс но-нулевая структура.

Теорема 1.1. *Любая λ-матрица размеров $m \times n$ ранга ρ эквивалентна*

а) *канонической форме Смита–Милана вида*

$$\widehat{W}(\lambda)R(\lambda)W(\lambda) = \text{block diag}\left\{\frac{e_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}, \cdots, \frac{e_\rho(\lambda)}{f_\rho(\lambda)}, 0_{uv}\right\} \tag{1.1.1}$$

в случае рациональной λ-матрицы $R(\lambda)$.

б) *канонической форме Смита вида*

$$\widehat{W}(\lambda)D(\lambda)W(\lambda) = \text{block diag}\left\{m_1(\lambda), \ldots, m_\rho(\lambda), 0_{vu}\right\} \tag{1.1.2}$$

в случае полиномиальной λ-матрицы $R(\lambda)$.

Здесь $W(\lambda)$ и $\widehat{W}(\lambda)$ унимодулярные $n\times n$ и $m\times m$ матрицы, соответственно. Скалярные полиномы $e_1(\lambda), \ldots, e_\rho(\lambda)$; $f_1(\lambda), \ldots, f_\rho(\lambda)$; $m_1(\lambda), \ldots, m_\rho(\lambda)$, входящие в каждую из указанных групп, являются взаимно простыми и нормированы так, что коэффициент при старшей степени λ каждого полинома равен единице, при этом делятся без остатка следующие скалярные полиномы $e_{i+1}(\lambda)$

на $e_i(\lambda)$; $f_i(\lambda)$ на $f_{i+1}(\lambda)$; $m_{i+1}(\lambda)$ на $m_i(\lambda)$ $i := 1, \ldots, \rho$; 0_{vu} – нулевая $v \times u$ матрица, где числа $v = m - \rho$, $u = n - \rho$ совпадают с размерностями левого и правого нуль-пространств λ-матрицы.

Ненулевые элементы в канонических формах (1.1.1) и (1.1.2) называются инвариантными множителями λ-матрицы. Точка $\lambda = \lambda_j$, в которой, по крайней мере, один из инвариантных множителей обращается в нуль (в бесконечность) называется конечным нулем (конечным полюсом) λ-матрицы. В обоих случаях эта точка называется особой.

Для введения понятия полюсно-нулевой структуры особой точки каждый из инвариантных множителей запишем в виде

$$\frac{e_i(\lambda)}{f_i(\lambda)} = r_i(\lambda)\big(\lambda - \lambda_j\big)^{\sigma_{ij}} \qquad (i = 1, \ldots, \rho), \tag{1.1.3}$$

где $r_i(\lambda)$ – рациональная функция, для которой $\lambda = \lambda_j$ не является особой точкой.

Набор неубывающих чисел

$$\big\{\sigma_{1j}, \ldots, \sigma_{\rho j}\big\} \equiv S\big[R; \lambda_j\big] \tag{1.1.4}$$

называется набором структурных индексов λ-матрицы в ее особой точке λ_j. Число $\sigma_{ij} < 0$ определяют полюсную структуру, числа $\sigma_{ij} > 0$ определяют нулевую структуру особой точки λ_j; равенство нулю σ_{ij} указывает на отсутствие особенности в точке $\lambda = \lambda_j$.

Полюсно-нулевая структура λ-матрицы в точке $\lambda = \infty$ полагается (по определению) равной полюсно-нулевой структуре в точке $\lambda = 0$ матриц

$$\overline{R}(\lambda) = \lambda^s R\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \overline{D}(\lambda) = \lambda^s D\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.1.5}$$

соответственно для рациональной и полиномиальной λ-матрицы.

Для полиномиальных матриц наравне с названиями особая точка типа нуль и ее структурные индексы будут использованы названия собственное значение и его элементарные делители.

Как следует из (1.1.2) и (1.1.3), каждому конечному собственному значению λ_j с набором элементарных делителей $(\lambda - \lambda_j)^{\sigma_{ij}}$ $(i = 1, \ldots, \rho)$ взаимно однозначно соответствует конечная особая точка λ_j типа нуль с набором структурных индексов $S[D, \lambda_j] = [\sigma_{1j}, \ldots, \sigma_{\rho j}]$. Такого соответствия нет для бесконечной особой точки. Так по определению матрица $D(\lambda)$ имеет бесконечный элементарный делитель степени $t_{i\infty}$, если $\overline{D}(\lambda)$ имеет элементарный делитель $\lambda^{t_{i\infty}}$. Связь между структурными индексами $\sigma_{i\infty}$ бесконечной особой точки и степенями бесконечных элементарных делителей $t_{i\infty}$ задается соотношением

$$\sigma_{i\infty} = t_{i\infty} - s, \qquad (1, \dots, \rho). \tag{1.1.6}$$

Отсюда следует, что наличие бесконечного собственного значения еще не гарантирует существование особенности типа нуль матрицы $D(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$.

1.1.2. Канонические формы для пучка матриц.

Для пучка матриц $D(\lambda) = A - \lambda B$, кроме канонических форм Смита из п. 1.1.1, имеют место каноническая форма Жордана–Вейерштрасса и каноническая форма Кронекера.

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1.2. *Любой регулярный пучок $D(\lambda) = A - \lambda B$ строго эквивалентен канонической форме Жордана–Вейерштрасса вида*

$$\widehat{W} D(\lambda) W = \text{block diag}\left\{J - \lambda I, I - \lambda P\right\}. \tag{1.1.7}$$

Здесь $\widehat{W}$ и W – постоянные неособенные матрицы порядка n; I – единичная $n \times n$ матрица, J – блочно-диагональная матрица с жордановыми блоками вида

$$J_t(\lambda_*) = \begin{bmatrix} \lambda_* & 1 & & & \\ & \lambda_* & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_* \end{bmatrix};$$

N – блочно-диагональная нильпотентная матрица с блоками $P_t = J_t(0)$. Блоку $J_t(\lambda_*)$ соответствует конечный элементарный делитель $(\lambda - \lambda_*)^t$; блоку P_t соответствует бесконечный элементарный делитель пучка $D(\lambda)$, т.е. другими словами, элементарный делитель матрицы B пучка $D(\lambda)$, соответствующий ее нулевому собственному значению.

Теорема 1.3. *Любой $m \times n$ сингулярный пучок $D(\lambda) = A - \lambda B$ ранга ρ строго эквивалентен канонической форме Кронекера вида*

$$\widehat{W} D(\lambda) W = \text{block diag}\left\{S(\lambda), T(\lambda), \widehat{D}_\rho(\lambda)\right\}. \tag{1.1.8}$$

Здесь $\widehat{W}$ и W – постоянные $m \times m$ и $n \times n$ неособенные матрицы; $\widehat{D}_\rho(\lambda)$ – регулярный $\rho \times \rho$ пучок, имеющий форму Жордана–Вейерштрасса; $S(\lambda) = \text{block diag}\{L_{\varepsilon_1}, \dots, L_{\varepsilon_q}\}$; $T(\lambda) = \text{block diag}\{L^T_{\eta_1}, \dots, L^T_{\eta_r}\}$. Блоки L_ε и L^T_η имеют размеры $\varepsilon \times (\varepsilon+1)$ и $(\eta+1)\eta$ соответственно и вид

$$L_\varepsilon(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{bmatrix},$$

$$L^T_\eta(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & & & & \\ 1 & -\lambda & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -\lambda \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

им соответствуют правый минимальный индекс ε и левый минимальный индекс η.

1.1.3. Собственные векторы и жордановы цепочки векторов.

Каждому конечному элементарному делителю $(\lambda - \lambda_*)^t$ полиномиальной $m \times n$ матрицы

$$D(\lambda) = \lambda^s C_s + \lambda^{s-1} C_{s-1} + \dots + C_0$$

отвечает правая $x_1, \dots, x_t$ и левая $y_1, \dots, y_t$ жордановы цепочки векторов, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_*) x_{l-k+1} = 0, \quad \sum_{k=0}^{l} y^H_{t-l+k} \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_*) = 0,$$
$$l = 0, 1, \dots, t-1 \qquad (1.1.9)$$

(индексы у левой жордановой цепочки пронумерованы в обратном порядке*), причем системы

$$D(\lambda_*) z = -\sum_{k=1}^{t} \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_*) x_{t-k+1},$$

$$z^H D(\lambda_*) = -\sum_{k=1}^{t} y^H_k \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_*)$$

*Здесь символ $D^{(k)}(\lambda_*)$ означает $\frac{d^k}{d\lambda^k} D(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_*$

несовместны.

Для пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ соотношения (1.1.9) имеют вид

$$\begin{aligned} &(A-\lambda_* B)x_1 = 0; \quad (A-\lambda_* B)x_i = Bx_{i-1} \quad i=2,\dots,t \\ &y_t^H(A-\lambda_* B) = 0; \quad y_i^H(A-\lambda_* B) = y_{i-1}^H B \quad i=2,\dots,t \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

причем системы $(A-\lambda_* B)\eta = Bx_t$ и $\eta^H(A-\lambda_* B) = y_t^H B$ несовместны.

Каждому бесконечному элементарному делителю матрицы $D(\lambda)$ отвечают правая и левая жордановы цепочки, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{l} C_{s-k}x_{l-k+1} = 0 \\ &\sum_{k=0}^{l} y_{t-l+k}^H C_{s-k} = 0 \qquad l=0,1,\dots,t-1 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

причем системы $C_s\eta = -\sum\limits_{k=1}^{t} C_{s-k}x_{t-k+1}$ и $\eta^H C_s = -\sum\limits_{k=1}^{t} y_k^H C_{s-k}$ несовместны.

Для пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ соотношения (1.1.11) имеют вид

$$\begin{aligned} &Bx_1 = 0 \qquad Bx_i = Ax_{i-1} \qquad i=2,\dots,t \\ &y_1^H B = 0 \qquad y_i^H B = y_{i-1}^H A \qquad i=2,\dots,t \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

причем системы $B\eta = Ax_t$ и $\eta^H B = y_t^H A$ несовместны.

Векторы x_1 и y_t, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} D(\lambda_*)x_1 = 0 \qquad y_t^H D(\lambda_*) = 0 \qquad &\text{для} \quad \lambda_* < \infty \\ C_s x_1 = 0 \qquad y_t^H C_s = 0 \qquad &\text{для} \quad \lambda_* = \infty \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

называются соответственно правым и левым собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_*.

В случае пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ собственные векторы x_1 и y_t удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (A-\lambda_* B)x_1 = 0 \quad y_t^H(A-\lambda_* B) = 0 \quad &\text{для} \quad \lambda_* < \infty \\ Bx_1 = 0 \qquad y_t^H B = 0 \quad &\text{для} \quad \lambda_* = \infty. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Понятие собственных векторов и жордановых цепочек можно ввести и для рациональной матрицы. Так пусть в особой точке

λ_j матрица $R(\lambda)$ имеет только нулевую особенность: $S[R,\lambda_j] = \{\sigma_{1j},\dots,\sigma_{\rho j}\}$. Тогда для каждого $\sigma_{ij} > 0$ можно построить правую и левую жордановы цепочки длины σ_{ij}, определяемые формулами (1.1.9)–(1.1.14).

Регулярной частью сингулярной λ-матрицы ранга ρ назовем порядка ρ регулярную λ-матрицу, имеющую с сингулярной λ-матрицей одинаковые наборы конечных особых точек и им соответствующие структурные индексы, так что каноническая форма регулярной части совпадает с канонической формой без нулевых диагональных элементов соответствующей ей сингулярной λ-матрицы.

Под регулярной частью сингулярного пучка $A - \lambda B$ ранга ρ будем понимать так же регулярный пучок порядка ρ, каноническая форма Жордана–Вейерштрасса которого совпадает с блоком $\widehat{D}_\rho(\lambda)$ в форме Кронекера (1.1.8) рассматриваемого пучка.

1.1.4. Минимальные базисы и минимальные индексы [169, 317].

Пусть векторы

$$x_i(\lambda) = \lambda^{s_i} x_{s_i} + \lambda^{s_i - 1} x_{s_i - 1} + \dots + x_{0_i} \quad i = 1,\dots,q \qquad (1.1.15)$$

образуют полиномиальный базис в векторном пространстве $C^n(\lambda)$ над полем рациональных функций. Здесь $||x_{s_i}|| \neq 0$ и $||x_{0_i}|| \neq 0$, так что целое число s_i есть индекс вектора $x_i(\lambda)$; $\sum_{i=1}^{q} s_i$ – порядок полиномиального базиса (1.1.15).

Минимальным базисом называется базис, имеющий минимальный порядок, а его индексы называются минимальными.

Справедливы следующие утверждения.

1^0. *В любом векторном пространстве над полем рациональных функций существует минимальный полиномиальный базис.*

2^0. *Индексы минимальных базисов одного и того же векторного пространства совпадают.*

3^0. *Для того, чтобы полиномиальный базис* (1.1.15) *был минимальным, необходимо и достаточно, чтобы каждая из матриц*

$$\left[x_1(\lambda),\dots,x_q(\lambda)\right] \in C^{n\times q}[\lambda] \quad \text{и} \quad \left[x_{s_1},\dots,x_{s_q}\right] \in C^{n\times q},$$

образованных соответственно из полиномиальных векторов базиса (1.1.15) *и коэффициентов при старших степенях λ в этих векторах, имела полный столбцовый ранг.*

Нас будут интересовать правое N_c и левое N_r нуль-пространства λ-матрицы, состоящие из правых и левых полиномиальных решений ее, минимальные базисы и минимальные индексы этих нуль-пространств.

Полиномиальными решениями (правым $x(\lambda)$ и левым $y(\lambda)$) матрицы $D(\lambda)$ называются полиномиальные векторы из нуль-пространств N_c и N_r, удовлетворяющие при любом λ уравнениям

$$D(\lambda)x(\lambda) = 0 \qquad y^H(\lambda)D(\lambda) = 0. \tag{1.1.16}$$

Векторные коэффициенты полиномиальных решений $x(\lambda) = x_0 + \lambda x_1 + \cdots + \lambda^t x_t$ и $y(\lambda) = y_0 + \lambda y_1 + \cdots + \lambda^t y_t$ связаны соотношениями

$$\begin{array}{ll}
C_0x_0 = 0, & y_0^H C_0 = 0,\\
C_1x_0 + C_0x_1 = 0, & y_0^H C_1 + y_1^H C_0 = 0,\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
C_sx_0 + C_{s-1}x_1 + \ldots + C_{s-t}x_t = 0, & y_0^H C_s + y_1^H C_{s-1} + \ldots + y_t^H C_{s-t} = 0,\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
C_sx_t = 0, & y_t^H C_s = 0.
\end{array} \tag{1.1.17}$$

1.1.5. Свойства унимодулярных матриц, приводящих λ-матрицу к канонической форме [316].

Ниже будет установлено, что вычисление спектральных характеристик рациональной матрицы сводится к вычислению аналогичных спектральных характеристик полиномиальной матрицы. Поэтому в дальнейшем изложении под λ-матрицей, как правило, будем иметь в виду полиномиальную матрицу.

Отметим свойства унимодулярных матриц $W(\lambda)$ и $\widehat{W}(\lambda)$, участвующих в приведении $D(\lambda)$ к канонической форме Смита (1.1.2). Для определенности рассмотрим свойства столбцов $W_j(\lambda)$ $(j = 1, \ldots, n)$ матрицы $W(\lambda)$. Все сказанное аналогично распространяется на строки матрицы $\widehat{W}(\lambda)$.

Теорема 1.4. *Пусть* $(\lambda - \lambda_*)^t$ *есть элементарный делитель матрицы* $D(\lambda)$, *входящий в инвариантный множитель* $m_j(\lambda)$ $(j \leqslant \rho)$ *канонической формы* (1.1.2). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

Векторы

$$x_{*i+1} = \frac{1}{i!}\,\frac{d^i}{d\lambda^i}\,W_j(\lambda_*) \qquad (i = 0, 1, \ldots, t-1) \tag{1.1.18}$$

образуют правую жорданову цепочку длины t, отвечающую этому элементарному делителю.

Векторы $W_j(\lambda)$ $(j = \rho+1, \dots, n)$ являются правыми полиномиальными решениями матрицы $D(\lambda)$ и образуют унимодулярный базис нуль-пространства $N_c[D]$ из правых полиномиальных решений $D(\lambda)$. Причем существует такая унимодулярная матрица $W(\lambda)$, что этот базис будет минимальным.

Векторы вида (1.1.18), порождаемые полиномиальными решениями $W_j(\lambda)$ $(j > \rho)$ при любом значении λ_*, удовлетворяют соотношениям (1.1.9) без ограничения на индекс i. В дальнейшем эти векторы будем называть паразитической жордановой цепочкой матрицы $D(\lambda)$.

Соотношения (1.1.9) и (1.1.18) соответственно могут быть записаны для $j \leqslant \rho$ в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[D(\lambda_*)q_j(\lambda_*)\right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1; \\ &\frac{d^t}{d\lambda^t}\left[D(\lambda_*)q_j(\lambda_*)\right] \neq 0; \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

и для $j > \rho$ в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[D(\lambda_*)q_j(\lambda_*)\right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots; \\ &\frac{d^{t+1}}{d\lambda^{t+1}}\left[q_j(\lambda)\right] = 0; \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

причем (1.1.20) имеет место для любой точки $\lambda = \lambda_*$. Здесь обозначено $q_j(\lambda) \equiv W_j(\lambda)$. Вектор $q_j(\lambda)$ из (1.1.19) назовем порождающим вектором высоты t, отвечающим элементарному делителю $(\lambda - \lambda_*)^t$ матрицы $D(\lambda)$. Вектор $q_j(\lambda)$, удовлетворяющий (1.1.20) при любом λ_*, назовем порождающим вектором матрицы $D(\lambda)$, совпадающим с ее полиномиальным решением индекса t.

1.1.6. Балансные соотношения между спектральными характеристиками [90, 155, 156, 316].

Множество всех особых точек с их структурными индексами и множество соответствующих им собственных векторов и жордановых цепочек будем относить к регулярным спектральным (скалярным и векторным) характеристикам λ-матрицы.

Множество минимальных индексов и минимальных базисов нуль-пространств из правых и левых полиномиальных решений

λ-матрицы будем относить к сингулярным спектральным характеристикам (скалярным и векторным) λ-матрицы. Справедливы следующие утверждения.

• *Строго эквивалентные преобразования λ-матрицы сохраняют все ее скалярные спектральные характеристики.*

• *Эквивалентные преобразования λ-матрицы сохраняют только конечные особые точки и соответствующие им структурные индексы.*

При обоих видах преобразований

а) *сохраняются ранг матрицы, размерности правого и левого нуль-пространств;*

б) *между векторными спектральными характеристиками устанавливается взаимнооднозначное соответствие.*

Между скалярными спектральными характеристиками λ-матрицы имеют место следующие "балансные" соотношения:

а) *для рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda)$ ранга ρ*

$$\gamma_p[R] = \gamma_z[R] + \varepsilon[R] + \eta[R]. \qquad (1.1.21)$$

б) *для полиномиальной $m \times n$ матрицы $D(\lambda)$ ранга ρ степени s:*

$$\beta_c[D] + \beta_\infty[D] + \varepsilon[D] + \eta[D] = \rho s. \qquad (1.1.22)$$

Здесь $\gamma_p[R]$ – сумма отрицательных структурных индексов всех особых точек $R(\lambda)$; $\gamma_z[R]$ – сумма положительных структурных индексов всех особых точек $R(\lambda)$; $\beta_c[D]$ – сумма всех конечных элементарных делителей $D(\lambda)$; $\beta_\infty[D]$ – сумма всех бесконечных элементарных делителей $D(\lambda)$; $\varepsilon[R]$, $\varepsilon[D]$ – суммы всех правых минимальных индексов матриц $R(\lambda)$ и $D(\lambda)$ соответственно; $\eta[R]$, $\eta[D]$ – суммы всех левых минимальных индексов матриц $R(\lambda)$ и $D(\lambda)$ соответственно;

1.1.7. Блочные спектральные характеристики и их свойства [87].

Ниже вводятся блочные спектральные характеристики, как-то: матричное решение полиномиальной матрицы, блочное собственное значение и блочный собственный вектор, которые будут полезны при решении некоторых спектральных задач для полиномиальной матрицы и, в частности, в задаче исчерпывания спектральных характеристик.

Постоянные матрицы S и T размеров $n \times n$ и $m \times m$, удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} C_s S^s + C_{s-1} S^{s-1} + \cdots + C_0 = 0 \\ T^s C_s + T^{s-1} C_{s-1} + \cdots + C_0 = 0 \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

называются правым S и левым T матричным решением $D(\lambda)$.

Матрица $\Lambda \in \mathbb{C}^{l \times l}$ называется правым блочным собственным значением порядка $l \quad (1 \leqslant l \leqslant n)$ для $D(\lambda)$, если существует матрица $X \in \mathbb{C}^{n \times l}$ полного столбцового ранга такая, что Λ является правым матричным решением $m \times l$ матрицы $D_X(\lambda) \equiv D(\lambda)X$, т.е. имеет место равенство

$$C_0 X + C_1 X \Lambda + \cdots + C_s X \Lambda^s = \mathbb{O}. \tag{1.1.24}$$

Матрица X, удовлетворяющая (1.1.24), называется правым блочным собственным вектором, отвечающим блочному собственному значению Λ.

Правое блочное собственное значение M матрицы $\overline{D}(\mu) = \mu^s D(\mu^{-1})$ называется правым обратным блочным собственным значением $D(\lambda)$. В этом случае из (1.1.24) имеем

$$C_0 X M^s + C_1 X M^{s-1} + \cdots + C_s X = \mathbb{O}.$$

Матрица X, удовлетворяющая этому соотношению, называется правым блочным собственным вектором, отвечающим обратному блочному собственному значению M.

При $l = 1$ матрица X является вектором x, а матрица Λ (матрица M) есть скаляр λ_* (скаляр μ_*); так что имеем

$$D(\lambda_*)x = 0 \qquad \big(\overline{D}(\mu_*)x = 0\big).$$

Следовательно, x является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_* матрицы $D(\lambda)$ (собственному значению μ_* матрицы $\overline{D}(\mu)$, или значением правого полиномиального решения матрицы $D(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_*$ (матрицы $\overline{D}(\mu)$ при $\mu = \mu_*$).

При $l = n$ матрица $X \Lambda X^{-1}$ (матрица $X M X^{-1}$) является правым матричным решением матрицы $D(\lambda)$ (матрицы $\overline{D}(\mu)$).

Аналогично вводятся левые блочные характеристики.

Для матричных решений справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.5 (Теорема Безу). *Если S, T – правое и левое матричные решения $D(\lambda)$ степени $s > 1$, то существуют полиномиальные матрицы $F(\lambda), H(\lambda)$ размера $m \times n$ степени $s-1$ такие, что*

$$D(\lambda) = H(\lambda)\big(\lambda I_n - S\big) = \big(\lambda I_m - T\big)F(\lambda), \tag{1.1.25}$$

где

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{s-1} \lambda^k F_k, \qquad F_{i-1} = \sum_{k=0}^{s-i} T^k C_{k+i}, \qquad i = 1, \dots, s,$$

$$H(\lambda) = \sum_{k=0}^{s-1} \lambda^k H_k, \qquad H_{i-1} = \sum_{k=0}^{s-i} C_{k+i} S^k, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Условия существования матричных решений сформулированы в следующей теореме [87].

Теорема 1.6. *Для существования у $D(\lambda)$ правого матричного решения S порядка n необходимо и достаточно, чтобы базис пространства $\mathbb{C}^n$ мог быть образован из начальных векторов некоторых жордановых и паразитических жордановых цепочек $D(\lambda)$.*

Существует следующая связь между спектральными характеристиками полиномиальных матриц $D(\lambda), H(\lambda)$ и матрицы S разложения (1.1.25)*:*

1. *Левые минимальные индексы и бесконечные элементарные делители полиномиальных матриц $D(\lambda)$ и $H(\lambda)$ совпадают.*

2. *Если $(\lambda - \lambda_*)^t$ – элементарный делитель $D(\lambda)$, а $(\lambda - \lambda_*)^r$ – элементарный делитель матрицы S $(0 \leqslant r \leqslant t)$, то $(\lambda - \lambda_*)^{t-r}$ есть элементарный делитель $H(\lambda)$.*

3. *Если t – минимальный индекс правого полиномиального решения $D(\lambda)$, порождающего при $\lambda = \lambda_*$ паразитическую жорданову цепочку, совпадающую с жордановой цепочкой для элементарного делителя $(\lambda - \lambda_*)^r$ матрицы S $(0 \leqslant r \leqslant t+1)$, то соответствующий минимальный индекс $H(\lambda)$ равен $t - r + 1$.*

Рассмотрим более общий случай разложения $D(\lambda)$.

Теорема 1.7. *Пусть*

$$D(\lambda) = H(\lambda)F(\lambda),$$

где $D(\lambda)$ и $H(\lambda)$ – $m \times n$ полиномиальные матрицы общего вида, $F(\lambda)$ – регулярная $n \times n$ полиномиальная матрица степени s', для которой $q(\lambda)$ есть правый порождающий вектор высоты r, соответствующий элементарному делителю $(\lambda - \lambda_*)^r$.

Тогда левые минимальные индексы и соответствующие им полиномиальные решения $D(\lambda)$ и $H(\lambda)$ совпадают, и имеет место одно из следующих утверждений.

1. *Вектор $q(\lambda)$ является для $D(\lambda)$ правым порождающим вектором высоты t ($t \geqslant r$), соответствующим элементарному делителю $(\lambda-\lambda_*)^t$, и при $t > r$ матрица $H(\lambda)$ имеет элементарный делитель $(\lambda-\lambda_*)^{t-r}$.*

2. *Вектор $q(\lambda)$ совпадает с правым полиномиальным решением индекса $t \geqslant r-1$ матрицы $D(\lambda)$; при этом $H(\lambda)$ имеет правое полиномиальное решение индекса не выше $t-r+s'$.*

Для блочных собственных значений и блочных собственных векторов справедливы следующие утверждения.

1^0. *Если $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_r$ – правая жорданова цепочка блочного собственного значения Λ, соответствующая его элементарному делителю $(\lambda-\lambda_*)^r$, то векторы*

$$x_i = X\widetilde{x}_i, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

являются начальными векторами или жордановой цепочки $D(\lambda)$, отвечающей элементарному делителю $(\lambda-\lambda_*)^t$ ($t \geqslant r$), или паразитической жордановой цепочки $D(\lambda)$, порожденной при $\lambda=\lambda_*$ ее правым полиномиальным решением минимального индекса $t \geqslant r-1$.

2^0. *Одна и та же матрица Λ может быть одновременно и правым и левым блочным собственным значением для $D(\lambda)$. Примером может служить так называемое полное блочное собственное значение, все элементарные делители которого являются элементарными делителями $D(\lambda)$.*

3^0. *Если Λ – полное блочное собственное значение пучка $D(\lambda) = -\lambda B + A$, то существует правое X и левое Y блочные собственные векторы такие, что выполнено соотношение*

$$Y^H B X = I. \tag{1.1.26}$$

4^0. *Если $\Lambda_1 \in \mathbb{C}^{l_1 \times l_1}$ и $\Lambda_2 \in \mathbb{C}^{l_2 \times l_2}$ – правое и левое блочные собственные значения пучка $D(\lambda) = -\lambda B + A$, отвечающие различным элементам его спектральной структуры, то существуют соответствующие им правый X_1 и левый Y_2 блочные собственные векторы, которые удовлетворяют соотношениям*

$$Y_2^H B X_1 = Y_2^H A X_1 = \mathbb{O}. \tag{1.1.27}$$

Соотношения (1.1.26) и (1.1.27) можно обобщить на случай полиномиальной матрицы степени $s > 1$:

$$\sum_{k=1}^{s}\Big[\sum_{i=0}^{s-k}\Lambda^{i}Y^{H}C_{k+i}\Big]X\Lambda^{k-1}=\sum_{k=1}^{s}\Lambda^{k-1}Y^{H}\sum_{i=0}^{s-k}C_{k+i}X\Lambda^{i} = I; \tag{1.1.28}$$

$$\sum_{k=1}^{s}\Big[\sum_{i=0}^{s-k}\Lambda_2^{i}Y_2^{H}C_{k+i}\Big]X_1\Lambda_1^{k-1}=\sum_{k=1}^{s}\Lambda_2^{k-1}Y_2^{H}\sum_{i=0}^{s-k}C_{k+i}X_1\Lambda_1^{i} = \mathbb{O}. \tag{1.1.29}$$

1.1.8. Спектральные задачи для λ-матриц.

Для λ-матриц будем рассматривать решение следующих спектральных задач.

. Вычисление всех или части особых точек

. Вычисление собственных векторов и жордановых цепочек

. Вычисление полюсно нулевой структуры особой точки

. Вычисление минимальных индексов

. Вычисление минимальных базисов нуль-пространств из полиномиальных решений

В последующих главах при рассмотрении алгоритмов решения спектральных задач для простоты будем рассматривать полиномиальные и рациональные матрицы над полем вещественных чисел и определять, как правило, только правые спектральные характеристики их. Все сказанное без труда переносится на случай комплексных матриц и левых спектральных характеристик.

§1.2. Понижающие подпространства

В параграфе вводятся в рассмотрение, так называемые, понижающие подпространства и устанавливаются их свойства. Понятие понижающего подпространства для пучка матриц обобщает понятие инвариантного подпространства для матриц. Они играют ту же роль, что и инвариантные подпространства: знание понижающих подпространств позволяет от произвольного пучка переходить к строго эквивалентному ему пучку квазитреугольной формы, что в свою очередь, позволяет сводить решение спектральных задач для заданного пучка к пучкам меньших размеров, исчерпывать из пучка известные спектральные характеристики.

1.2.1. Понижающие подпространства для регулярного пучка [103, 287, 289].

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ – регулярный пучок порядка n; X – подпространство размерности l в n-мерном векторном пространстве C^n над полем комплексных чисел; $Y = AX + BX$.

Говорят, что пара X, Y образует пару правых понижающих (deflating) подпространств регулярного пучка $D(\lambda)$, если

$$\dim Y = \dim X. \tag{1.2.1}$$

Пара U, V левых понижающих подпространств определяется как правая пара для пучка $D^H(\lambda) = A^H - \lambda B^H$.

Пусть унитарные матрицы $Z = [Z_1, Z_2]$ и $P = [P_1, P_2]$ таковы, что столбцы матриц Z_1 и P_1 образуют унитарные базисы некоторых подпространств X и Y одинаковой размерности. Образуем пучок

$$\widehat{D}(\lambda) = P^H D(\lambda) Z = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{11}(\lambda) & \widehat{D}_{12}(\lambda) \\ \widehat{D}_{21}(\lambda) & \widehat{D}_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

где $D_{ij}(\lambda) = P_i^H D(\lambda) Z_j = \widehat{A}_{ij} - \lambda \widehat{B}_{ij}$ $i, j = 1, 2$.

Справедлива теорема.

Теорема 1.8. *Для того, чтобы пара X, Y являлась парой правых понижающих подпространств для регулярного пучка $D(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\widehat{A}_{21}$ и $\widehat{B}_{21}$ были нулевыми матрицами ($\widehat{A}_{21} = \widehat{B}_{21} = \mathbb{O}$). При этом имеют место следующие свойства.*

1. *Объединение спектров пучков $\widehat{D}_{11}(\lambda)$ и $\widehat{D}_{22}(\lambda)$ образуют спектр пучка $D(\lambda)$.*

2. *Правые и левые пары понижающих подпространств взаимно связаны: если унитарные матрицы Z и P таковы, что Z_1, P_1 – правая пара, то P_2, Z_2 – левая пара.*

3. *Если правая пара Z_1, P_1 отвечает части спектра пучка $D(\lambda)$, которая определяется блоком $\widehat{D}_{11}(\lambda)$, то левая пара Z_2, P_2 соответствует спектру блока $\widehat{D}_{22}(\lambda)$.*

1.2.2. Понижающие подпространства для сингулярного пучка [155, 119, 156].

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ – сингулярный $m \times n$ пучок; $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – подпространства размерности l и k соответственно в пространствах C^n и C^m, причем

$$\widetilde{Y} = A\widetilde{X} + B\widetilde{X}.$$

Говорят, что $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ образуют пару понижающих (reducing) подпространств пучка $D(\lambda)$, если

$$\dim \widetilde{Y} = \dim \widetilde{X} - \dim N_c, \tag{1.2.3}$$

где N_c – нуль-пространство из правых полиномиальных решений пучка $D(\lambda)$.

Пусть унитарные $m \times m$ и $n \times n$ матрицы $\widetilde{Z} = [\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2]$ и $\widetilde{Q} = [\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2]$ таковы, что $\widetilde{Z}_1$ и $\widetilde{Q}_1$ образуют унитарные базисы некоторых подпространств $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ соответственно. Как и в случае регулярного пучка, образуем пучок

$$\widetilde{D}(\lambda) = \widetilde{Q}^H D(\lambda) \widetilde{Z} = \begin{bmatrix} \widetilde{D}_{11}(\lambda) & \widetilde{D}_{12}(\lambda) \\ \widetilde{D}_{21}(\lambda) & \widetilde{D}_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\widetilde{D}_{ij}(\lambda) = \widetilde{Q}_i^H D(\lambda) \widetilde{Z}_j \equiv \widetilde{A}_{ij} - \lambda \widetilde{B}_{ij}, \quad i, j = 1, 2$. С учетом соответствующих размеров унитарных матриц $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{Z}$ и их блоков справедлива теорема, аналогичная теореме 1.8.

Теорема 1.9. *Для того, чтобы пара подпространств $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ являлась парой правых понижающих подпространств для сингулярного пучка $D(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{A}_{21}$ и $\widetilde{B}_{21}$ были нулевыми матрицами ($\widetilde{A}_{21} = \widetilde{B}_{21} = \mathbb{O}$). При этом имеют место следующие свойства.*

1. Объединение спектров пучков $\widetilde{D}_{11}(\lambda)$ и $\widetilde{D}_{22}(\lambda)$ совпадает со спектром сингулярного пучка $D(\lambda)$.

2. Все правые минимальные индексы $D(\lambda)$ определяются блоком $\widetilde{D}_{11}(\lambda)$; а все левые минимальные индексы $D(\lambda)$ определяются блоком $\widetilde{D}_{22}(\lambda)$.

3. Правые и левые пары понижающих подпространств взаимосвязаны: если унитарные матрицы Z и Q таковы, что Z_1, Q_1 – правая пара, то Q_2, Z_2 – левая пара.

4. Если правая пара отвечает части спектральных характеристик пучка $D(\lambda)$, которые определяются блоком $\widetilde{D}_{11}(\lambda)$, то левая пара отвечает спектральным характеристикам, которые определяются блоком $\widetilde{D}_{22}(\lambda)$.

Понятие понижающих подпространств и доказательство теорем 1.2.1 и 1.2.2 для пучка $D(\lambda)$ с постоянными матрицами было введено в [287, 155].

§1.3. Согласованные пучки и их спектральные свойства [44]

1.3.1. Определение.

При конструировании алгоритмов решения спектральных задач для полиномиальных матриц наряду с эквивалентными и строго эквивалентными пучками будут использоваться, так называемые, согласованные пучки.

Два пучка $D(\lambda) = A-\lambda B$ и $D_1(\lambda) = A_1-\lambda B_1$ называются согласованными (справа), если их матрицы связаны, так называемым, базовым соотношением вида

$$AB_1 = BA_1, \tag{1.3.1}$$

или, что то же, соотношением

$$[A, -B] \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = 0. \tag{1.3.2}$$

Из (1.3.2) следует, что столбцы матрицы $\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix}$ принадлежат правому нуль-пространству постоянной матрицы $[A, -B]$. Согласование пучков будет полным, если столбцы матрицы $\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix}$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $[A, -B]$. В противном случае согласование пучков называется неполным (частичным). В дальнейшем, если не оговорено, будем иметь дело с полным согласованием. При этом слова "справа" и "полным" будем опускать. Заметим, что согласованные регулярные пучки являются также строго эквивалентными, если они одного и того же порядка и имеют каждый одну из матриц (например, B и B_1) неособенной.

Действительно, пусть B и B_1 – неособенные матрицы. Тогда из (1.3.1) имеем $B^{-1}A = A_1B_1^{-1}$, так что $B^{-1}D(\lambda) = D_1(\lambda)B_1^{-1}$, т.е. $D(\lambda) = BD_1(\lambda)B_1^{-1}$.

1.3.2. Спектральные свойства согласованных пучков*.

1^0 *Между правыми полиномиальными решениями $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ согласованных пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ существует взаимно однозначное соответствие*

$$x(\lambda) = W_+y(\lambda), \qquad y(\lambda) = W_0^H[x(\lambda), \lambda x(\lambda)]^B. \tag{1.3.3}$$

При этом степень $y(\lambda)$ на единицу больше степени $x(\lambda)$; пучок $D_1(\lambda)$ не имеет правых полиномиальных решений нулевой степени.

*Свойства согласованных пучков с постоянными матрицами были исследованы в [77] и в работах автора в связи с изучением свойств AB-алгоритма и его модификаций

Здесь и ниже W_0 – унитарный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A} \equiv [A, -B]$, W_+ – матрица, составленная из первых n строк матрицы W_0.

2^0 *Между минимальными базисами пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ существует взаимно однозначное соответствие:*

$$X(\lambda) \equiv \left[x_1(\lambda), \dots, x_N(\lambda)\right] = W_+Y(\lambda), \tag{1.3.4}$$
$$Y(\lambda) = \left[y_1(\lambda), \dots, y_N(\lambda)\right],$$
$$Y(\lambda) = W_0^H\left[X(\lambda), \lambda X(\lambda)\right]^B.$$

При этом каждый правый минимальный индекс пучка $D_1(\lambda)$ на единицу больше правого минимального индекса пучка $D(\lambda)$, каждый левый минимальный индекс пучка $D_1(\lambda)$ на единицу меньше соответствующего левого минимального индекса пучка $D(\lambda)$.
Здесь через $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ обозначены матрицы, столбцы которых составляют минимальные базисы из правых полиномиальных решений пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$, соответственно.

3^0 *Собственные значения пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ совпадают, а между соответствующими им собственными векторами существует взаимно однозначное соответствие:*

$$x_* = W_+y_*, \qquad y_* = W_0^H\left(x_*, \lambda_*x_*\right)^B. \tag{1.3.5}$$

Здесь x_* и y_* суть собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению λ_* пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$.

4^0 *Между правыми жордановыми цепочками векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$, существует взаимно однозначное соответствие*

$$x_k = W_+y_k \qquad y_k = W_0^H\begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1}\end{bmatrix} \qquad k = 1, \dots, t \quad (x_0 \equiv 0). \tag{1.3.6}$$

Здесь обозначены $x_1, \dots, x_t$ – жорданова цепочка векторов пучка $D(\lambda)$; $y_1, \dots, y_t$ – соответствующая ей жорданова цепочка векторов пучка $D_1(\lambda)$.

§1.4. Способы линеаризации полиномиальных матриц [90, 155, 287]

Пусть
$$D(\lambda) = C_s\lambda^s + C_{s-1}\lambda^{s-1} + \dots + C_0 \tag{1.4.1}$$

полиномиальная $m \times n$ матрица.

Подобно тому, как для скалярных полиномов вводится сопровождающая матрица, собственные значения которой являются корнями скалярного полинома, для полиномиальных матриц общего вида (регулярных и сингулярных) могут быть введены соответствующие им линейные пучки, называемые сопровождающими.

Ниже рассматриваются некоторые виды линейных сопровождающих $D(\lambda)$ пучков и устанавливается связь между спектральными характеристиками этих пучков и матрицы $D(\lambda)$.

1.4.1. Односторонние сопровождающие пучки.

Рассмотрим пучки следующего вида:

$$\begin{gathered} D_L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda I_n & -I_n \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{s-2} & C_{s-1}+\lambda C_s \end{bmatrix} \\ D_R(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_m & \dots & \dots & \dots & C_0 \\ -I_m & \ddots & & & C_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda I_m & C_{s-2} \\ & & & -I_m & C_{s-1}+\lambda C_s \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{1.4.2}$$

Они называются соответственно левым и правым сопровождающими пучками для полиномиальной матрицы (1.4.1).

Лемма 1.10. *Имеют место следующие эквивалентные соотношения*

$$\begin{aligned} \text{block diag}\left\{D(\lambda), I_{n(s-1)}\right\} &= P_L(\lambda) D_L(\lambda) Q_L(\lambda) \\ \text{block diag}\left\{D(\lambda), I_{m(s-1)}\right\} &= P_R(\lambda) D_R(\lambda) Q_R(\lambda). \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Здесь $P_L(\lambda), Q_L(\lambda), P_R(\lambda), Q_R(\lambda)$ – матрицы, осуществляющие эквивалентные преобразования (1.4.3). Приведем вид первых блочных строк матриц $P_L(\lambda)$ и $P_R(\lambda)$ и первых блочных столбцов матриц $Q_L(\lambda)$ и $Q_R(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &P_{L1}(\lambda) = \left[B_1(\lambda), \dots, B_{s-1}(\lambda), I_m\right], \; Q_{L1}(\lambda) = \left[I_n, \lambda I_n, \dots, \lambda^{s-1} I_n\right]^B, \\ &P_{R1}(\lambda) = \left[I_m, \lambda I_m, \dots, \lambda^{s-1} I_m\right], \quad Q_{R1}(\lambda) = \left[B_1(\lambda), \dots, B_{s-1}(\lambda), I_n\right]^B, \end{aligned}$$

где $B_k(\lambda) = \sum\limits_{l=0}^{s-k} \lambda^l C_{k+l}$.

Теорема 1.11. *Между спектральными характеристиками полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ и ее сопровождающих пучков $D_L(\lambda)$ и $D_R(\lambda)$ существует взаимнооднозначное соответствие:*

1. *Конечные (и бесконечные) элементарные делители совпадают; жордановы цепочки, отвечающие элементарным делителям вида $(\lambda-\lambda_*)^t$ (или μ^t), связаны соотношениями*

$$\text{a)}\quad x_{lL}=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\,Q_{L1}^{(k)}(\lambda_*)x_{l-k},\quad y_{t-l+1,L}^H\sum_{k=0}^{l-1}y_{t-l+k+1}\frac{1}{k!}\,P_L^{(k)}(\lambda_*),\qquad l=1,\dots,t;$$

$$\text{b)}\quad x_{lR}=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\,Q_{R1}^{(k)}(\lambda_*)x_{i-k},\quad y_{t-l+1,R}^H=\sum_{k=0}^{l-1}y_{t-l+k+1}^H\frac{1}{k!}\,P_{R1}^{(k)}(\lambda_*),\qquad l=1,\dots,t.$$

Здесь $x_{lL}, y_{t-l+1,L}$ $(l=1,\dots,t)$ – жордановы цепочки пучка $D_L(\lambda)$; x_{lR}, $y_{t-l+1,R}$ $(l=1,\dots,t)$ – жордановы цепочки пучка $D_R(\lambda)$; x_{lk}, $y_{t-l+k+1}$ $(l=1,\dots,t)$ – жордановы цепочки матрицы $D(\lambda)$.

2. *Левые минимальные индексы пучка $D_L(\lambda)$ и правые минимальные индексы пучка $D_R(\lambda)$ совпадают с соответствующими минимальными индексами полиномиальной матрицы $D(\lambda)$. Правые минимальные индексы пучка $D_L(\lambda)$ и левые минимальные индексы пучка $D_R(\lambda)$ больше соответствующих минимальных индексов полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ на величину $(s-1)$. Полиномиальные решения связаны соотношением*

$$\begin{aligned} x_L(\lambda)&=Q_{L1}(\lambda)x(\lambda), & y_L^H(\lambda)&=y^H(\lambda)P_{L1}(\lambda)\\ x_R(\lambda)&=Q_{R1}(\lambda)x(\lambda), & y_R^H(\lambda)&=y^H(\lambda)P_{R1}(\lambda)\end{aligned}\qquad(1.4.4)$$

3. *Сумма кратности спектра t_σ и минимальных порядков ε и η базисов нуль-пространств из полиномиальных решений полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ равна произведению ее ранга на степень, т.е. справедливо следующее равенство*

$$t_\sigma+\varepsilon+\eta=\rho s.\qquad(1.4.5)$$

1.4.2. Двухсторонний сопровождающий пучок.

Линейный пучок

$$\widehat{D}(\lambda)=\begin{bmatrix} & & & -C_s & \lambda C_s\\ & & & \lambda C_s-C_{s-1} & \lambda C_{s-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -C_s & \lambda C_s-C_{s-1} & \dots & \lambda C_3-C_2 & \lambda C_2\\ \lambda C_s & \lambda C_{s-1} & \dots & \lambda C_2 & \lambda C_1+C_0\end{bmatrix}\qquad(1.4.6)$$

называется двусторонним сопровождающим пучком для полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ вида (1.4.1).

Лемма 1.12. *Двусторонний сопровождающий пучок* (1.4.6) *эквивалентен блочно диагональной матрице:*

$$\widehat{P}(\lambda)\widehat{D}(\lambda)\widehat{Q}(\lambda) =$$
$$= \text{block diag}\left\{\begin{bmatrix} & & & C_s \\ & & & \dots \\ & C_s & \dots & C_1 \\ C_s & C_{s-1} & \dots & C_0 \end{bmatrix}, D(\lambda)\right\}. \tag{1.4.7}$$

Обозначим $\widehat{P}_s(\lambda)$ и $\widehat{Q}_s(\lambda)$ – последние блочную строку и блочный столбец матриц $\widehat{P}(\lambda)$ и $\widehat{Q}(\lambda)$.

Теорема 1.13. *Спектральные характеристики сопровождающего пучка $D_B(\lambda)$ и полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ связаны следующими соотношениями:*

1. *Конечные элементарные делители совпадают. Жордановы цепочки, отвечающие элементарным делителям вида $(\lambda-\lambda_*)^t$, связаны соотношениями*

$$\widehat{x}_l = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!}\,\widehat{Q}_s^{(k)}(\lambda_*)x_{l-k},$$
$$\widehat{y}_{t-l+1}^H = \sum_{k=0}^{l-1} y_{t-l+k+1}^H \frac{1}{k!}\,\widehat{P}_s^{(k)}(\lambda_*).$$

2. *Если μ^t – бесконечный элементарный делитель матрицы $D(\lambda)$ с соответствующими жордановыми цепочками x_l, y_l $(l = 1, \dots, t)$, то векторы*

$$\widehat{x}_l = \sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\,\widehat{Q}_s^{(k)}(0)x_{l-k},\ \ \widehat{y}_{t-l+1}^H = \sum_{k=0}^{l-1} y_{t-l+k+1}^H\frac{1}{k!}\,\widehat{P}_s^{(k)}(0),\ \ l = 1, \dots, t$$

обладают следующими свойствами:

векторы $\widehat{x}_l, \widehat{y}_{t-l+1}$ $\quad l = 1, \dots, t \quad (t < s)$ являются полиномиальными решениями нулевой степени пучка $\widehat{D}(\lambda)$;

при $t \geqslant s$ векторы $\widehat{x}_s, \dots, \widehat{x}_t$ и $\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_{t-s+1}$ образуют правую и левую жордановы цепочки, отвечающие бесконечному элементарному делителю μ^{t-s+1} пучка $\widehat{D}(\lambda)$.

3. *Если* $x(\lambda) = \sum\limits_{l=0}^{\varepsilon} \lambda^l x_l$ *– правое полиномиальное решение матрицы* $D(\lambda)$ *индекса* ε, *то векторные коэффициенты полиномиального вектора*

$$\widehat{Q}_s(\lambda)x(\lambda) = \sum_{l=0}^{\varepsilon+s-1} \lambda^l \widehat{x}_l$$

имеют следующие свойства:

векторы $\widehat{x}^{[1]}(\lambda) \equiv \sum\limits_{l=0}^{s} \lambda^l \widehat{x}_l$, $\widehat{x}^{[k]}(\lambda) \equiv \widehat{x}_{\varepsilon+k-1}$, $k = 2, \dots, s$ *являются правыми полиномиальными решениями пучка* $D_B(\lambda)$ *(первый – индекса* ε, *остальные – нулевого индекса).*

4. *Если*

$$y(\lambda) = \sum_{l=0}^{\eta} \lambda^l y_l$$

есть левое полиномиальное решение матрицы $D(\lambda)$ *индекса* η, *то векторные коэффициенты полиномиального вектора*

$$y^H(\lambda)\widehat{P}_s(\lambda) = \sum_{l=0}^{\eta+s-1} \lambda^l \widehat{y}_l^H$$

имеют следующие свойства:

векторы $\widehat{y}^{[1]}(\lambda) \equiv \sum\limits_{l=0}^{\eta} \lambda^l \widehat{y}_l$, $\widehat{y}^{[k]} \equiv \widehat{y}_{\eta+k-1}$ $(k = 2, \dots, s)$ *являются левыми полиномиальными решениями пучка* $\widehat{D}(\lambda)$ *(первый – индекса* η, *остальные – нулевого индекса).*

1.4.3. Другие способы построения сопровождающих пучков.

Рассмотрим односторонние сопровождающие пучки, построенные не в терминах коэффициентов матричного полинома $D(\lambda)$. Введем в рассмотрение вектор $\Lambda = (\lambda^s x, \dots, x)^T$ и постоянную матрицу $\mathfrak{A} = [C_s, \dots, C_0]$, блочные столбцы которой суть коэффициенты матричного полинома $D(\lambda)$. Тогда уравнение

$$D(\lambda)x = 0 \tag{1.4.8}$$

можно записать в следующем эквивалентном виде

$$\mathfrak{A}\Lambda = 0. \tag{1.4.9}$$

Обозначим через Q – матрицу, столбцы которой образуют ортонормальный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}$. Представим Q в блочном виде

$$Q = \left[Q_s, Q_{s-1}, \dots, Q_0\right]^B,$$

где $Q_k \quad (k = s, \dots, 0)$ суть $n \times d$ матрицы, $d = \dim N_c[\mathfrak{A}]$, и введем в рассмотрение матрицы Q_+ и Q_-, составленные из s первых и s последних строк Q

$$Q_+ = \big[Q_s, \dots, Q_1\big] \qquad \text{и} \qquad Q_- = \big[Q_{s-1}, \dots, Q_0\big].$$

Рассмотрим уравнение

$$\big[Q_+ - \lambda Q_-\big] y = 0, \tag{1.4.10}$$

и установим связь между спектральными характеристиками исходной матрицы $D(\lambda)$ и пучка $Q_+ - \lambda Q_-$.

1) Пусть (λ_*, x_*) есть собственная пара уравнения (1.4.8). Тогда вектор $\Lambda_* = (\lambda_*^s x_*, \dots, x_*)^B$ принадлежит правому нуль-пространству Q матрицы $\mathfrak{A}$, так что существует такой вектор y_*, что имеет место равенство

$$Q y_* = \Lambda_*. \tag{1.4.11}$$

Очевидно, y_* есть решение переопределенной совместной системы с матрицей Q полного столбцового ранга, так что имеем $y_* = Q^T \Lambda_*$.

Учитывая строение вектора Λ_*, равенство (1.4.11) запишем в виде

$$\big(Q_* - \lambda_* Q_-\big) y_* = 0. \tag{1.4.12}$$

Отсюда следует, что (λ_*, y_*) есть собственная пара пучка $Q_+ - \lambda Q_-$.

Обратно, пусть (λ_*, y_*) есть собственная пара пучка $Q_+ - \lambda Q_-$, т.е. имеет место равенство (1.4.12). Запишем его в развернутом виде

$$\begin{aligned} Q_1 y_* = &\quad \lambda_* Q_0 y_* \\ Q_2 y_* = &\quad \lambda_* Q_1 y_* = \lambda_*^2 Q_0 y_* \\ \dots\dots \quad & \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ Q_s y_* = & \lambda_* Q_{s-1} y_* = \dots = \lambda_*^s Q_0 y_*. \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Обозначим $Q_0 y_* = x_*$. Если

$$Q_0 y_* \neq 0, \tag{1.4.14}$$

т.е. y_* не принадлежит правому нуль-пространству последнего блока Q_0 матрицы Q, то из (1.4.13) следует, что вектор $\Lambda_* = (\lambda_*^s x_*, \dots, x_*)^T$ принадлежит $Q : \mathfrak{A} \Lambda_* = 0$. Отсюда следует, что (λ_*, x_*) есть собственная пара $D(\lambda)$.

Из сказанного выше вытекает справедливость утверждения.

Теорема 1.14. *Каждой собственной паре* (λ_*, x_*) *матрицы* $D(\lambda)$ *соответствует единственная собственная пара* (λ_*, y_*) *пучка* $Q_+ - \lambda Q_-$ *и, наоборот, каждой собственной паре* (λ_*, y_*) *пучка* $Q_+ - \lambda Q_-$ *соответствует при выполнении условия* $Q_0 y_* \neq 0$ *единственная собственная пара* $(\lambda_*, Q_0 y_*)$ *матрицы* $D(\lambda)$.

Замечание.

Условие (1.4.14) всегда имеет место, если $D(\lambda)$ имеет полный столбцовый ранг.

Пусть $x(\lambda)$ есть полиномиальное решение $D(\lambda)$, так что при любом λ имеет место тождество

$$D(\lambda)x(\lambda) = 0$$

или, другими словами, при любом λ вектор $\Lambda(\lambda) = (\lambda^s x(\lambda), \dots, x(\lambda))^T$ принадлежит $Q = \ker \mathfrak{A}$, так что найдется вектор $y(\lambda)$ такой, что при любом λ имеет место тождество

$$Qy(\lambda) = \Lambda(\lambda). \tag{1.4.15}$$

Это есть переопределенная совместная система с матрицей Q полного столбцового ранга, составленной из ортонормированных столбцов, так что $y(\lambda) = Q^T \Lambda(\lambda)$ для любого λ.

В силу строения вектора $\Lambda(\lambda)$ равенство (1.4.15) можно записать в виде

$$\big(Q_+ - \lambda Q_-\big) y(\lambda) = 0. \tag{1.4.16}$$

Откуда следует, что $y(\lambda)$ есть правое полиномиальное решение пучка $Q_+ - \lambda Q_-$, причем $y(\lambda)$ определяется однозначно из (1.4.15).

Обратно, пусть (1.4.16) имеет место при любом λ и $Q_0 y(\lambda) \neq 0$, т.е. не все коэффициенты полиномиального решения $y(\lambda)$ принадлежат правому нуль-пространству матрицы Q_0. Тогда рассуждая, как и в случае 1), получим, что вектор $x(\lambda)$ при любом λ удовлетворяет уравнению (1.4.8), т.е. $x(\lambda)$ есть полиномиальное решение матрицы $D(\lambda)$. Из приведенных рассуждений следует справедливость утверждения.

Теорема 1.15. *Каждому правому полиномиальному решению* $x(\lambda)$ *матрицы* $D(\lambda)$ *однозначно соответствует правое полиномиальное решение* $y(\lambda) = Q^T \big(\lambda^s x\ (\lambda), \dots, \lambda x(\lambda), x(\lambda)\big)^T$ *пучка* $Q_+ - \lambda Q_-$. *Обратно, каждому правому полиномиальному решению* $y(\lambda)$ *пучка* $Q_+ - \lambda Q_-$ *при выполнении условия, что по крайней мере, один из коэффициентов* $y(\lambda)$ *не принадлежит правому нуль-пространству* *матрицы Q_0 (последнему блоку матрицы Q), однозначно соответствует правое полиномиальное решение $x(\lambda) \equiv Q_0 y(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$.*

§1.5. Некоторые разложения постоянных матриц

Ниже приводятся разложения постоянных матриц, которые будут использованы при построении алгоритмов решения спектральных задач.

1.5.1. Сингулярное разложение [10, 178, 179].

Теорема 1.16. *Для любой $m \times n$ матрицы A ранга ρ существуют унитарные матрицы U и V порядков m и n, соответственно, такие что имеет место разложение*

$$A = U\Sigma V^H = U_1 \Sigma_\rho V_1^H, \tag{1.5.1}$$

называемое сингулярным разложением матрицы A.

Здесь $\Sigma = \text{block diag}\{\Sigma_\rho, 0\}$, $\Sigma_\rho = \text{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho\}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_\rho > 0$, σ_i – сингулярные числа матрицы A; 0 – нулевая $(m-\rho)\times(n-\rho)$ матрица; $U = [U_1, U_0]$ и $V = [V_1, V_0]$ – унитарные матрицы с блоками U_1, U_0 и V_1, V_0 соответственно размеров $m\times\rho$, $m\times(m-\rho)$ и $n\times\rho$, $n\times(n-\rho)$.

Разложение (1.5.1) может быть осуществлено различными способами. Приводим одну из версий SVD алгоритма, реализующей разложение (1.5.1).

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом исходная матрица A за конечное число шагов приводится к двухдиагональной матрице J_0:

$$PAQ = P_n \ldots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix} = J_0$$

где матрицы отражения P_k и Q_k строятся из условия последовательного аннулирования соответственно поддиагональных элементов столбца с номером k и элементов строки с номером k, начиная с номера $(k+2)$.

На втором этапе с помощью QR алгоритма осуществляется приведение матрицы J_0 к диагональному виду. Для чего строится последовательность матриц $J_{i+1} = S_i^H J_i T_i$, $i = 0, 1, \ldots$ Каждый шаг преобразования основан на неявном применении QR

алгоритма со сдвигом для трехдиагональной матрицы $M_i = J_i^H J_i$ с сохранением у матрицы J_{i+1} двухдиагональной формы . Преобразование осуществляется с помощью матриц вращения

$$J_{i+1} = \widetilde{T}_{n-1,n}^{(i)H} \dots \widetilde{T}_{23}^{(i)H} \widetilde{T}_{12}^{(i)H} J_i T_{12}^{(i)} T_{23}^{(i)} \dots T_{n-1,n}^{(i)}.$$

Здесь первый столбец $T_{12}^{(i)}$ (совпадающий с первым столбцом результирующей матрицы T_i) определяется из условия коллениарности его первому столбцу матрицы $[M_i - s_i I]$. Параметр сдвига s_i выбирается как собственное значение нижнего минора 2-го порядка матрицы.

1.5.2. Нормализованное разложение (ND) [80, 178, 237].

Теорема 1.17. *Для любой $m \times n$ – матрицы A ранга ρ существуют унитарная матрица Q порядка n и матрица перестановок порядка m такие, что имеет место разложение вида*

$$\theta A Q = L = \left[L_0, \mathbb{O}\right], \tag{1.5.2}$$

называемое нормализованным разложением матрицы A.

Здесь θ – матрица перестановок, $\mathbb{O}$ нулевая $m \times (n-\rho)$ – матрица, $L_0 = \{l_{ij}\}$ – левая трапецеидальная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, элементы которой удовлетворяют неравенствам

$$|l_{11}| \geqslant |l_{22}| \geqslant \dots \geqslant |l_{\rho\rho}|; \qquad |l_{ii}| \geqslant |l_{ji}| \qquad \text{для} \quad j \geqslant i.$$

Построение разложения (1.5.2) осуществляется с помощью ND алгоритма* за конечное число шагов.

Типичный шаг k ND алгоритма состоит в выполнении следующих операций.

(1) Выполняется такая перестановка строки k со строкой i ($i \geqslant k$) преобразуемой матрицы, чтобы на месте ведущей (k-ой) стояла строка, сумма s_k квадратов модулей элементов в позициях (k, j), $j = k, \dots, n$ которой была максимальной.

(2) Аннулируются элементы ведущей строки в позициях (k, j), $(j = k+1, \dots, n)$ с помощью правостороннего умножения на цепочку матриц плоских вращений или на матрицу отражения.

Выполнение операций (1), (2) прекращается, когда $s_k = 0$. Это означает, что ранг матрицы $\rho = k-1$, преобразуемая матрица совпадает с матрицей L. Параллельно идет вычисление унитарной

*Разложение (1.5.2) и ND алгоритм, его реализующий, совпадают с алгоритмом QR разложения [178], примененном к матрице A^H.

матрицы Q, для чего столбцы единичной матрицы подвергаются тем же преобразованиям, что и столбцы матрицы A для приведения ее к виду L.

1.5.3. ΔW-0 разложение.

Для дальнейшего целесообразно объединить оба сингулярное и нормализованное разложение, записав их в виде так называемого ΔW-0 разложения:

$$AW = [\Delta, \mathbb{O}] \qquad \text{или} \qquad A = \Delta S. \tag{1.5.3}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица, Δ – матрица $m \times \rho$ полного столбцового ранга $W = [W_1, W_0]$ – унитарная $n \times n$ матрица с блоками W_1 и W_0 размеров $n \times \rho$ и $n \times (n-\rho)$ соответственно, $S = W_1^H$ – матрица $\rho \times n$ полного строчного ранга. В случае сингулярного разложения $W = V$, $W_1 = V_1$, $W_0 = V_0$, $\Delta = U\Sigma_\rho$. В случае нормализованного разложения $W = Q$, $W_1 = Q_1$, $W_0 = Q_0$, $\Delta = \theta^T L_0$.

ΔW-0 разложение может быть вычислено с помощью SVD алгоритма, реализующего сингулярное разложение матрицы A, или с помощью ND алгоритма, реализующего нормализованное разложение матрицы A.

В дальнейшем на любой из этих алгоритмов будем ссылаться как на ΔW-0 алгоритм.

1.5.4. Применение ΔW-0 алгоритма.

Рассмотрим решение некоторых вспомогательных задач, основанное на применении ΔW-0 алгоритма.

1.5.4.1. Ранговое сечение пространства.

Ранговое сечение векторного пространства C^n, в котором действует $m \times n$ матричный оператор A ранга ρ, получается из блочного разбиения унитарной матрицы W разложения (1.5.3):

$$C^n = W_1 \oplus W_0, \qquad W_1 = \operatorname{im} A^H, \qquad W_0 = \ker A.$$

1.5.4.2. Построение унитарного дополнения подпространства до полного пространства.

Пусть матрица M_1 определяет вложение подпространств $M_1 \subseteq C_n$ и пусть ΔW-0 разложение $\rho \times n$ матрицы M_1^H, полного строчного ранга, имеет вид

$$M_1^H W^{(1)} = [\Delta^{(1)}, \mathbb{O}],$$

где $W^{(1)} \equiv [W_{11}, W_{10}]$, $W_{11} = \operatorname{im} M_1$, $W_{10} = [M_1^H]$. Тогда столбцы матрицы W_{10} образуют базис унитарного дополнения M_1 до C^n.

1.5.4.3. Построение унитарного дополнения одного подпространства до другого.

Пусть матрицы M_1 и M_2 определяют вложение подпространств

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq C^n.$$

Последовательное выполнение ΔW-0 разложения сначала для матрицы M_1^H:

$$M_1^H W^{(1)} = \left[\Delta^{(1)}, \mathbb{O}\right]$$

(где $W^{(1)} = [W_{11}, W_{10}]$, $W_{11} = \operatorname{im} M_1$, $W_{10} = \ker M_1^H$), а затем для матрицы $M_3^H = [W_{10}, M_2]^H$:

$$M_3^H W^{(3)} = \left[\Delta^{(3)}, \mathbb{O}\right]$$

(где $W^{(3)} = [W_{31}, W_{30}]$, $W_{31} = \operatorname{im} M_3$, $W_{30} = N_c[M_3^H]$) позволяет находить W_{30}, т.е. базис унитарного дополнения подпространства M_2 до подпространства M_1.

1.5.4.4. Вычисление унитарного базиса подпространства.

Пусть $X = [x_1, \dots, x_q]$ есть $n \times q$ матрица. Для вычисления унитарного базиса W_1 подпространства $X \subseteq C^n$ следует применить ΔW-0 разложение к матрице X^H. Имеем

$$X^H W = \left[\Delta, \mathbb{O}\right].$$

Здесь 0 есть $q \times (n - \rho)$ – нулевая матрица (ρ – $\operatorname{rank} X$), Δ есть $q \times \rho$ матрица, $W = [W_1, W_0]$ – унитарная матрица. Блок W_1 есть $n \times \rho$ – матрица, столбцы которой образуют искомый унитарный базис X.

1.5.4.5. Вычисление унитарного базиса пересечения нуль-пространств матричных операторов.

Пусть требуется построить унитарный базис пересечения правых нуль-пространств матриц $A_1, \dots, A_q$ размеров $m_1 \times n, \dots, m_q \times n$. Для этого следует сформировать матрицу $\mathfrak{A} = [A_1 \dots A_q]^B$ размеров $N \times n$, $(N = m_1 + \dots + m_q)$ и осуществить ее ΔW-0 разложение. Имеем

$$\mathfrak{A} W = \left[\Delta, \mathbb{O}\right].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $N \times (n - \rho)$ матрица, $\rho = \operatorname{rank} \mathfrak{A}$, Δ – матрица $N \times \rho$ полного ранга ρ, $W = [W_1, W_0]$, так что столбцы $n \times (n - \rho)$ матрицы W_0 образуют искомый базис.

1.5.4.6. Построение понижающих подпространств для матриц и пучков матриц.

Пусть A есть $n\times n$ особенная матрица. В качестве понижающего подпространства берется матрица W_0 из разложения (1.5.3), столбцы которой образуют унитарный базис $N_c[A]$, т.е., унитарный базис инвариантного подпространства, соответствующего нулевому собственному значению матрицы A. Имеем

$$W^H AW = \begin{bmatrix} W_1^H AW_1 & \mathbb{O} \\ W_0^H AW_1 & \mathbb{O} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbb{O} \\ A_{21} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

где A_{11} есть $\rho \times \rho$ матрица, собственные значения которой совпадают с собственными значениями матрицы A, за исключением $(n-\rho)$ нулевых собственных значений, вошедших в нулевой блок $A_{22} = W_0^H AW_0$. Унитарные матрицы Z и P, преобразующие пучок $D(\lambda) = A - \lambda B$ в эквивалентный пучок $\widehat{D}(\lambda) = P^H D(\lambda) Z$ квазитреугольной формы (теорема 1.8), могут быть вычислены выполнением следующих операций.

(1) Находится унитарная матрица W, осуществляющая ΔW-0 разложение матрицы B. Имеем

$$BW = [\Delta, \mathbb{O}], \qquad W = [W_1, W_0],$$

где W_0 образует унитарный базис $N_c[B]$.

(2) Находится унитарная матрица $\widehat{W}$, осуществляющая ΔW-0 разложение матрицы $\widehat{A} \equiv [AW_0]^H$. Имеем

$$\widehat{A}\widehat{W} = [\widehat{\Delta}, \mathbb{O}], \qquad \widehat{W} = [\widehat{W}_1, \widehat{W}_0],$$

$\widehat{W}_0$ образует унитарный базис правого нуль-пространства $\widehat{A}$.

Так построенные унитарные матрицы W и $\widehat{W}$ только порядком следования блоков Z_1, Z_2 и P_1, P_2 отличаются от искомых матриц Z и P, а именно, $Z = [W_0, W_1]$, $P = [\widehat{W}_1, \widehat{W}_0]$. Легко проверить справедливость равенства

$$W^H D(\lambda) W \equiv \widehat{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{12}(\lambda) & \widehat{D}_{11}(\lambda) \\ \widehat{D}_{22}(\lambda) & \widehat{D}_{21}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{12}(\lambda) & \widehat{D}_{11}(\lambda) \\ \widehat{D}_{22}(\lambda) & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

Подпространства $X = W_0$ и $Y = \widehat{W}_1$ образуют пару понижающих подпространств для пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$. Так что объединение спектров блоков $\widehat{D}_{11}(\lambda)$ и $\widehat{D}_{22}(\lambda)$ дает спектр $D(\lambda)$.

Пусть $D(\lambda)$ есть $m \times n$ сингулярный пучок ранга $\rho < n \leqslant m$. В качестве пары $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ понижающих подпространств можно взять любые из двух пар

$$\widetilde{X} = N_c[A] \equiv \widetilde{W}_{0\mathrm{a}}, \qquad \widetilde{Y} = \operatorname{im} B\widetilde{W}_{0\mathrm{a}},$$

где $W_{0\mathrm{a}}$ – унитарный базис $N_c[A]$,
или

$$\widetilde{X} = N_c[B] \equiv \widetilde{W}_{0\mathrm{b}}, \qquad \widetilde{Y} = \operatorname{im}\big[A\widetilde{W}_{0\mathrm{b}}\big],$$

где $W_{0\mathrm{b}}$ – унитарный базис $N_c[B]$.

Для определенности считаем

$$\widetilde{X} = N_c[B] \equiv \widetilde{W}_0, \qquad \widetilde{Y} = \operatorname{im}\big[AW_0\big].$$

В качестве унитарных матриц $\widetilde{Z}$ и $\widetilde{Q}$ теоремы 1.9 (с точностью до перестановок блочных компонент) можно взять соответственно матрицы $\widetilde{W}^{(1)}$ и $\widetilde{W}^{(2)}$, осуществляющие ΔW-0 разложение матриц A и $(B\widetilde{W}_{0\mathrm{a}})^H$. Имеем

$$A\widetilde{W}^{(1)} = \big[\widehat{\Delta}^{(1)}, \mathbb{O}\big], \qquad \widetilde{W}^{(1)} = \big[\widetilde{W}_1^{(1)}, \widetilde{W}_0^{(1)}\big];$$
$$\big(A\widetilde{W}_{0\mathrm{a}}\big)^H \widetilde{W}^{(2)} = \big[\widehat{\Delta}^{(2)}, \mathbb{O}\big], \qquad \widetilde{W}^{(2)} = \big[\widetilde{W}_1^{(2)}, \widetilde{W}_0^{(2)}\big].$$

Учитывая, что столбцы матрицы $\widetilde{W}_0^{(1)}$ образуют унитарный базис $N_c[A]$, строки матрицы $[\widetilde{W}_0^{(2)}]^H$ образуют унитарный базис $N_r[BW_{0\mathrm{a}}]$, легко проверить справедливость равенства

$$\big[\widetilde{W}^{(2)}\big]^H D(\lambda)\widetilde{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} \widetilde{D}_{12}(\lambda) & \widetilde{D}_{11}(\lambda) \\ \widetilde{D}_{22}(\lambda) & \widetilde{D}_{21}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{D}_{12}(\lambda) & \widetilde{D}_{11}(\lambda) \\ \widetilde{D}_{22}(\lambda) & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

где $D_{21}(\lambda)$ – нулевая матрица.

Подпространства $X = W_0^{(2)}$ и $Y = W_1^{(2)}$ образуют пару понижающих подпространств для сингулярного пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$, так что объединение соответствующих спектральных характеристик блоков $\widetilde{D}_{11}(\lambda)$ и $\widetilde{D}_{22}(\lambda)$ дает весь спектр, правые и левые минимальные индексы исходного пучка $D(\lambda)$.

1.5.4.7. Построение согласованных пучков.

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ – исходный $m \times n$ пучок. Никаких ограничений на соотношения чисел m и n не накладывается. Требуется построить согласованный с $D(\lambda)$ пучок $D_1(\lambda) = A_1 - \lambda B_1$ такой, чтобы выполнялось базовое соотношение

$$AB_1 = BA_1,$$

или другими словами, столбцы матрицы $[B_1, A_1]^B$ являлись унитарным базисом правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A} = [A, -B]$.

Для построения $D_1(\lambda)$ надо выполнить следующие операции.

(1) Получить унитарный базис W_0 правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}$, применив к $\mathfrak{A}$ алгоритм ΔW-0 разложения. Имеем

$$\mathfrak{A}W = [\Delta, \mathbb{O}],$$

где $W = [W_1, W_0]$ – унитарная порядка $2n$ матрица с блоками W_1 и W_0 соответственно размеров $2n \times \rho$ и $2n \times (2n - \rho)$; ρ – $\operatorname{rank} \mathfrak{A}$.

(2) Записать матрицу W_0 в блочном виде $W_0 = \left[\begin{smallmatrix} B_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right]$, где B_1 и A_1 – матрицы размеров $n \times (2n - \rho)$.

Искомый, согласованный с $D(\lambda)$, пучок будет $A_1 - \lambda B_1 \equiv D_1(\lambda)$.

1.5.5. Косинус–синусное разложение (CSD) [232, 234, 294].

Теорема 1.18. *Пусть $Q = [Q_1 Q_2]^B$ – матрица из ортонормированных столбцов с блоками Q_1, Q_2 размеров $m \times n$. Тогда существуют унитарные матрицы U и V порядка m и унитарная матрица W порядка n такие, что имеет место разложение*

$$\begin{bmatrix} U^H & \\ & V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} \Sigma_c \\ \Sigma_s \end{bmatrix}, \tag{1.5.4}$$

называемое косинус–синусное разложение.

Здесь $m \times n$ – матрицы Σ_c, Σ_s имеют вид

$$\begin{aligned} &\Sigma_c = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m-n,n} \\ C \end{bmatrix}, \quad \Sigma_s = \begin{bmatrix} S \\ \mathbb{O}_{m-n,n} \end{bmatrix}, \quad \text{при} \quad n \leqslant m, \\ &\Sigma_c = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,n-m} \ C \end{bmatrix}, \quad \Sigma_s = \begin{bmatrix} S \ \mathbb{O}_{m,n-m} \end{bmatrix}, \quad \text{при} \quad n > m; \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

$$\begin{aligned} &C = \operatorname{diag}\{c_1, \ldots, c_t\}, && 0 \leqslant c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_t \leqslant 1, \\ &S = \operatorname{diag}\{s_1, \ldots, s_t\}, && 1 \geqslant s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_t \geqslant 0, \\ &t = \min\{m, n\}, && C^2 + S^2 = I. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Приводим конструктивное доказательство [228] разложения (1.5.4), описывая CSD-алгоритм, его реализующий. Строится сингулярное разложение матрицы Q_1

$$Q_1 = U \Sigma_c W^H,$$

где диагональная матрица Σ_c имеет вид (1.5.5) с элементами, удовлетворяющими (1.5.6).

Из равенства $Q_1^H Q_1 + Q_2^H Q_2 = I$ следует, что $\widehat{Q}_2^H \widehat{Q}_2$ (где $\widehat{Q}_2 = Q_2 W$) есть диагональная матрица $I - C^2$, так что искомая унитарная матрица V отличается от $\widehat{Q}_2$ лишь нормировкой столбцов: $v_i = \widehat{q}_i^{(2)} / ||\widehat{q}_i^{(2)}||$, где $\widehat{q}_i^{(2)}$ – столбцы матрицы $\widehat{Q}_2$. Учитывая, что $||\widehat{q}_i^{(2)}||_2^2 = 1 - c_i^2$, имеем $V^H \widehat{Q}_2 = V^H Q_2 W = \Sigma_s$, где $s_i^2 = 1 - c_i^2$.

Заметим, что матрица V может быть получена применением QR-разложения к матрице $\widehat{Q}_2$.

1.5.6. Обобщенное сингулярное разложение ($GSVD$) **[144, 242, 247, 293].**

Теорема 1.19. *Пусть $[A, B]^B$ – матрица ранга ρ с блоками A, B размеров $m \times n$. Тогда существуют унитарные матрицы U и V порядка m и неособенная матрица X порядка n такие, что имеет место разложение вида*

$$\begin{bmatrix} U^H & \\ & V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \Sigma_a \\ \Sigma_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,n-\rho} & \Sigma_c \\ \mathbb{O}_{m,n-\rho} & \Sigma_s \end{bmatrix}, \tag{1.5.7}$$

называемое обобщенным сингулярным разложением.

Здесь $m \times \rho$ – матрицы Σ_c, Σ_s имеют вид

$$\begin{aligned} &\Sigma_c = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m-\rho,\rho} \\ C \end{bmatrix}, \quad \Sigma_s = \begin{bmatrix} S \\ \mathbb{O}_{m-\rho,\rho} \end{bmatrix}, \ \text{при } \rho \leqslant \min\{m, n\}, \\ &\Sigma_c = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,\rho-m} & C \end{bmatrix}, \Sigma_s = \begin{bmatrix} S & \mathbb{O}_{m,\rho-m} \end{bmatrix}, \ \text{при } n \geqslant \rho > m; \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

$$\begin{aligned} &C = \operatorname{diag}\{c_1, \ldots, c_t\}, && 0 \leqslant c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_t \leqslant 1, \\ &S = \operatorname{diag}\{s_1, \ldots, s_t\}, && 1 \geqslant s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_t \geqslant 0, \\ &t = \min\{m, \rho\}, && C^2 + S^2 = I. \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Приводим конструктивное доказательство разложения (1.5.5), описывая $GSVD$ алгоритм, его реализующий.

Строится сингулярное разложение матрицы $[A \ B]^B$:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Q \Sigma Z, \qquad \Sigma = \text{block diag}\{\mathbb{O}, \Sigma_\rho\}, \tag{1.5.10}$$

где $\Sigma_\rho = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho\}$, $0 < \sigma_1 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_\rho$, Z – унитарная матрица порядка n, Q – $2m \times n$ – матрица из ортонормированных столбцов.

Матрица Q представляется в блочном виде $Q = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix}$ с блоками Q_1, Q_2 размеров $m \times \rho$.

Выполняется косинус–синусное разложение матрицы $[Q_1\ Q_2]^B$:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & \\ & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_c \\ \Sigma_s \end{bmatrix} W^H, \tag{1.5.11}$$

где матрицы Σ_c, Σ_s имеют в зависимости от соотношения ранга ρ с размерами m, n указанный выше вид (1.5.8), (1.5.9).

Из (1.5.10) и (1.5.11) получаем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,n-\rho} & Q_1\Sigma_\rho \\ \mathbb{O}_{m,n-\rho} & Q_2\Sigma_\rho \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} U & \\ & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_a \\ \Sigma_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-\rho} & \\ & \Sigma_\rho W^H \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Положив $X \equiv Z \begin{bmatrix} I_{n-\rho} & \\ & W\Sigma_\rho^{-1} \end{bmatrix}$, получим требуемое разложение (1.5.7).

1.5.6.1. Геометрические свойства.

Обозначим через r_1 и p_1 – число нулевых диагональных элементов соответственно матриц C и S, $h_1 = \dim N_c(A)$, $t = \min\{m, \rho\}$; x_i, $i = 1, \ldots, n$ – столбцы матрицы X; u_i, v_i, $i = 1, \ldots, m$ – столбцы матриц U, V соответственно. Тогда из разложения (1.5.7) имеем:

1. $N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = [x_1 \ldots x_{n-\rho}]$, $\quad \dim N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = n - \rho$;
2. $N_r(A) = [u_1 \ldots u_{m-t+r_1}]$, $\quad \dim N_r(A) = m - t + r_1$;
3. $N_r(B) = [v_{t-p_1+1} \ldots v_m]$, $\quad \dim N_r(B) = m - t + p_1$;
4. $N_c(A) = [x_1 \ldots x_{n-t+r_1}]$, $\dim N_c(A) = n - t + r_1 = h_1$,

   $N_c(A) \setminus N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = [x_{n-\rho+1} \ldots x_{n-t+r_1}]$, $\dim N_c(A) \setminus N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = \rho - t + r_1$;
5. $N_c(B) = N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) \oplus [x_{n-\rho+t-p_1+1} \ldots x_n]$, $\dim N_c(B) = n - t + p_1$,

   $N_c(B) \setminus N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = [x_{n-\rho+t-p_1+1} \ldots x_n]$, $\dim N_c(B) \setminus N_c\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = \rho - t + p_1$.

1.5.7. Обобщенное QZ-разложение ($RGQZD$) [194, 196].

Теорема 1.20. *Пусть $[A\ B]^B$ – матрица ранга ρ с блоками A, B размеров $m \times n$. Тогда существуют унитарные матрицы U и V*

порядка m и унитарная матрица Q порядка n такие, что имеет место разложение вида

$$\begin{bmatrix} U^H & \\ & V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,n-\rho} & R_a \\ \mathbb{O}_{m,n-\rho} & R_b \end{bmatrix}, \tag{1.5.13}$$

называемое обобщенным QZ разложением.

Здесь $m \times \rho$ – матрицы R_a, R_b имеют вид

$$R_a = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m-\rho,\rho} \\ R_c \end{bmatrix}, \qquad R_b = \begin{bmatrix} R_s \\ \mathbb{O}_{m-\rho,\rho} \end{bmatrix},$$
$$\text{при} \quad \rho \leqslant \min\{m,n\},$$
$$R_a = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,\rho-m} & R_c \end{bmatrix}, \quad R_b = \begin{bmatrix} R_s & \mathbb{O}_{m,\rho-m} \end{bmatrix},$$
$$\text{при} \quad n \geqslant \rho > m; \tag{1.5.14}$$

где R_c, R_s – правые треугольные матрицы порядка ρ, удовлетворяющие соотношению

$$||R_c^H R_c + R_s^H R_s||_F = ||\Sigma_\rho^2||, \tag{1.5.15}$$

$\Sigma_\rho = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho\}$, σ_i – ненулевые сингулярные числа матрицы $[A\ B]^B$.

Конструктивное доказательство разложения (1.5.13) основано на применении разложения (1.5.12) матрицы $[A\ B]^B$:

$$\begin{bmatrix} U^H & \\ & V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \Sigma_a \\ \Sigma_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-\rho} & \\ & \Sigma_\rho W^H \end{bmatrix}. \tag{1.5.16}$$

Для невырожденной матрицы $\Sigma_\rho W^H$ порядка ρ выполняется QR – разложение $\Sigma_\rho W^H = R_\rho Q_\rho$, где R_ρ – верхняя треугольная, а Q_ρ – унитарная матрица порядка ρ. Подстановка этого разложения в (1.5.16) дает с учетом (1.5.8)

$$\begin{bmatrix} U^H & \\ & V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m,n-\rho} & R_a \\ \mathbb{O}_{m,n-\rho} & R_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-\rho} & \\ & Q_\rho \end{bmatrix},$$

где $R_a = \Sigma_c R_\rho$, $R_b = \Sigma_s R_\rho$, так что матрица $Q = Z \begin{bmatrix} I_{n-\rho} & \\ & Q_\rho^H \end{bmatrix}$.

Из цепочки равенств

$$R_a^H R_a + R_b^H R_b = R_\rho^H C^2 R_\rho + R_\rho^H S^2 R_\rho = R_\rho^H R_\rho =$$
$$= \left(W^H \Sigma_\rho Q_\rho^H\right)^H \left(W^H \Sigma_\rho Q_\rho^H\right) = Q_\rho \Sigma_\rho^2 Q_\rho^H$$

и равенства $||Q_\rho^H \Sigma_\rho^2 Q_\rho||_F = ||\Sigma_\rho^2||_F$ следует справедливость (1.5.13).

1.5.7.1. Геометрические свойства.

Пусть r_1 и p_1 – число нулевых диагональных элементов матриц Σ_c и Σ_s соотвественно, $h_1 = \dim N_c(A)$, $t = \min\{m, \rho\}$; q_i, $i = 1, \ldots, n$ – столбцы матрицы Q; u_i, v_i, $i = 1, \ldots m$ – столбцы матриц U, V соответственно. Тогда из разложения (1.5.13) имеем:

1. $N_c\Big(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\Big) = [q_1 \ldots q_{n-\rho}]$, $\quad \dim N_c\Big(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\Big) = n - \rho$;
2. $N_r(A) = [u_1 \ldots u_{m-t+r_1}]$, $\quad \dim N_r(A) = m - t + r_1$;
3. $N_r(B) = [v_{t-p_1+1} \ldots v_m]$, $\quad \dim N_r(B) = m - t + p_1$;
4. $N_c(A) = [q_1 \ldots q_{n-t+r_1}]$, $\quad \dim N_c(A) = n - t + r_1 = h_1$,

$N_c(A) \setminus N_c\Big(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\Big) = [q_{n-\rho+1} \ldots q_{n-t+r_1}]$, $\dim N_c(A) \setminus N_c\Big(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\Big) = \rho - t + r_1$.

1.5.8. Обобщенное нормализованное разложение (GND).

Теорема 1.21. *Пусть $[A\ B]$ – матрица ранга ρ с блоками A, B размеров $m \times n$. Тогда существуют унитарные матрицы U и V порядка n и унитарная матрица W порядка ρ и $m \times \rho$ – матрица L полного столбцового ранга такие, что имеет место разложение вида*

$$[A\ B] = LW[\Sigma_c\ \Sigma_s] \begin{bmatrix} U^H & \\ & V^H \end{bmatrix} \tag{1.5.17}$$

или

$$W^H L^+ [A\ B] \begin{bmatrix} U & \\ & V \end{bmatrix} = [\Sigma_c\ \Sigma_s],$$

называемое обобщенным нормализованным разложением.

Здесь $\rho \times n$ – матрицы Σ_c, Σ_s имеют вид

$$\begin{aligned} &\Sigma_c = [\mathbb{O}_{\rho,n-\rho}\ C], \quad \Sigma_s = [S\ \mathbb{O}_{\rho,n-\rho}], \\ &\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad \rho \leqslant \min\{m, n\}, \\ &\Sigma_c = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{\rho-n,n} \\ C \end{bmatrix}, \quad \Sigma_s = \begin{bmatrix} S \\ \mathbb{O}_{\rho-n,n} \end{bmatrix}, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad m \geqslant \rho > n, \end{aligned} \tag{1.5.18}$$

$$\begin{aligned} &C = \operatorname{diag}\{c_1, \ldots, c_t\}, && 0 \leqslant c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_t \leqslant 1, \\ &S = \operatorname{diag}\{s_1, \ldots, s_t\}, && 1 \geqslant s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_t > 0, \\ &t = \min\{\rho, n\}, && C^2 + S^2 = I. \end{aligned} \tag{1.5.19}$$

Приводим конструктивное доказательство разложения (1.5.17).

Строится нормализованное разложение матрицы $[A\ B]$:

$$\theta\big[A\ B\big] = L_0 Q_0^H, \qquad \big[A\ B\big] = L\big[Q_1^H\ Q_2^H\big], \tag{1.5.20}$$

где θ – $m \times m$ – матрица перестановок, L_0 – левая трапецеидальная $m \times \rho$ матрица, $L = \theta^T L_0$, $Q_0 = [Q_1\ Q_2]^B$ – матрица, составленная из ортогональных столбцов с блоками Q_1, Q_2 размеров $n \times \rho$. Выполняется косинус–синусное разложение вида (1.5.7) матрицы $[Q_1\ Q_2]^B$:

$$Q_1 = U\Sigma_c W^H, \qquad Q_2 = V\Sigma_s W^H, \tag{1.5.21}$$

где матрицы Σ_c, Σ_s имеют в зависимости от соотношения ранга ρ с размерами m, n указанный вид (1.5.18), (1.5.19). Подстановка (1.5.21) в (1.5.20) дает разложение вида (1.5.17).

1.5.8.1. Геометрические свойства.

Пусть r_1 и p_1 – число нулевых диагональных элементов матриц C и S соотвественно, $t = \min\{\rho, n\}$; $u_i, v_i,\ i = 1, \ldots n$ – столбцы матриц U, V соответственно, $y_i,\ i = 1, \ldots, \rho$ – строки матрицы $Y = W^H L^+$. Тогда из разложения (1.5.17) имеем:

1. $N_r(L) = N_r(A) \cap N_r(B), \quad \dim N_r(L) = m - \rho;$
2. $N_c(A) = [u_1 \ldots u_{n-t+r_1}], \quad \dim N_c(A) = n - t + r_1;$
3. $N_c(B) = [v_{t-p_1+1} \ldots v_n], \quad \dim N_c(B) = n - t + p_1;$
4. $N_r(A) = N_r(L) \oplus [y_1^H \ldots y_{\rho-t+r_1}^H], \quad \dim N_r(A) = m - t + r_1,$
   $N_r(A) \setminus N_r(L) = [y_1^H \ldots y_{\rho-t+r_1}^H], \quad \dim N_r(A) \setminus N_r(L) = \rho - t + r_1;$
5. $N_r(B) = N_r(L) \oplus [y_{t-p_1+1}^H \cdots y_\rho^H], \quad \dim N_r(B) = n - t + p_1,$
   $N_r(B) \setminus N_r(L) = [y_{t-p_1+1}^H \cdots y_\rho^H], \quad \dim N_r(B) \setminus N_r(L) = \rho - t + p_1;$

Глава 2. Решение спектральных задач для пучка матриц

Рассматриваются методы и алгоритмы решения спектральных задач раздельно для регулярных и сингулярных пучков. Основное внимание уделено методам, основанным на применении элементарных ортогональных матриц (плоских вращений и отражений).

В §2.1 рассматривается вычисление собственных значений регулярного пучка. Предлагаются два метода, решающие полную проблему собственных значений, и различные варианты метода итерирования подпространств, решающий частичную проблему. Мы не останавливаемся на методах вычисления собственных значений для пучков специального вида и, в том числе, для пучков с симметричными матрицами, хотя последние являются наиболее интересными в практических приложениях. Для численного решения спектральных задач симметричных пучков разработано и реализовано на ЭВМ большое число алгоритмов. Они широко освящены в литературе (см., например, [69, 182]).

В §2.2 рассматриваются алгоритмы вычисления структурных индексов для конечных собственных значений регулярного пучка и полюсно-нулевая структура пучка на бесконечности.

В §2.3 предлагаются методы анализа кронекеровской канонической формы сингулярного пучка (вычисления минимальных индексов и выделения регулярного блока пучка).

В §2.4 рассматриваются алгоритмы выделения регулярного блока как пучка полного ранга, так и произвольного сингулярного пучка, отличные от алгоритмов §2.3.

В §2.5 рассмотрены алгоритмы построения векторных спектральных характеристик: собственных векторов и жордановых цепочек, алгоритмы построения минимального базиса из полиномиальных решений.

В §2.6 предлагаются алгоритмы вычисления полиномиальных решений пучка и нахождения минимального базиса из них.

В §2.7 предлагаются алгоритмы исчерпывания найденных спектральных характеристик пучка.

В дальнейшем для простоты рассуждений алгоритмы вычисления спектральных характеристик будут рассмотрены только для вещественных λ-матриц. При описании алгоритмов будет рассматриваться определение только правых спектральных характеристик. Все сказанное аналогично переносится как на λ-матрицы с комплексными элементами, так и на вычисление левых спектральных характеристик λ-матриц.

§2.1. Вычисление собственных значений регулярного пучка

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ регулярный $n \times n$ пучок вещественных матриц. Ниже описываются два алгоритма (QZ алгоритм и AB алгоритм), решающие полную проблему собственных значений $D(\lambda)$, т.е. вычисление всех собственных значений . Оба алгоритма инвариантны к так называемой треугольно–хессенберговой форме пучка, когда одна из матриц пучка является треугольной, другая – почти треугольная, т.е., имеет форму Хессенберга.

В пункте 2.1.1 приводится алгоритм преобразования произвольного регулярного пучка к треугольно–хессенберговой форме. В пунктах 2.1.2 и 2.1.3 приводится краткое описание алгоритмов QZ и AB. Оба алгоритма основаны на использовании элементарных ортогональных матриц плоских вращений и отражений.

В пункте 2.1.4 приводятся итерационные методы решения частичной проблемы собственных значений регулярного линейного пучка общего вида.

2.1.1. Приведение пучка к треугольно–хессенберговой форме [237].

Треугольно–хессенберговой формой пучка называется пучок, у которого одна из матриц является правой (левой) треугольной, другая – правая (левая) почти треугольная. В дальнейшем для определенности будем говорить о пучках правой треугольно–хессенберговой формы, опуская слово правый.

В пунктах 2.2 и 2.3 будут рассмотрены итерационные методы вычисления собственных значений регулярного пучка матриц. Важным свойством этих методов является инвариантность их к треугольно–хессенберговой форме пучка. Поэтому возникает потребность в конечном алгоритме, преобразующем произвольный регулярный пучок в эквивалентный пучок треугольно–хессенберговой формы.

Следующая теорема гарантирует возможность такого преобразования, а ее доказательство является и алгоритмом.

Теорема 2.1. *Любой регулярный пучок $D(\lambda) = A - \lambda B$ порядка n с помощью элементарных ортогональных матриц (плоских враще-*

ний) за конечное число шагов может быть преобразован в пучок

$$D_l(\lambda) = Q^T D(\lambda) Z$$

треугольно-хессенберговой формы.

Здесь Q^T и Z – результирующие ортогональные матрицы.

Доказательство проводится конструктивно, описывая алгоритм построения $D_l(\lambda)$. Без умаления общности считаем, что матрица B исходного пучка $D_0(\lambda) = A - \lambda B$ является верхней треугольной. В противном случае с помощью левосторонних умножений $D(\lambda)$ на цепочку матриц вращения или отражения можно перейти к пучку $D_0(\lambda)$.

Алгоритм преобразования $D_0(\lambda)$ в пучок $D_l(\lambda)$ состоит из конечного числа шагов. Типичный шаг перехода от $D_{k-1}(\lambda)$ к $D_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, l)$ сводится к преобразованиям видов:

$$D_{k-1/2}(\lambda) = Q^T_{n-k,n-k+1} D_{k-1}(\lambda) \tag{2.1.1}$$

$$D_k(\lambda) = D_{k-1/2}(\lambda) Z_{n-k,n-k+1} \tag{2.1.2}$$

$$k = 1, \ldots, n-1-j, \quad j = 1, \ldots, n-2.$$

Здесь $Q^T_{n-k,n-k+1}$ – матрица плоских вращений, аннулирующая элемент матрицы A_{k-1} пучка $D_{k-1}(\lambda)$ в позиции $(n-k+1, j)$; $Z_{n-k,n-k+1}$ – матрица плоских вращений, восстанавливающая нулевой элемент в позиции $(n-k+1, n-k)$ матрицы $B_{k-1/2}$ пучка $D_{k-1/2}(\lambda)$.

Таким образом, каждый шаг начинается с преобразования (2.1.1), аннулирующего очередной элемент в позиции $(n-k+1, j)$ матрицы A преобразуемого пучка для приведения ее к форме Хессенберга. При этом нулевой элемент в позиции $(n-k+1, n-k)$ матрицы B преобразуемого пучка становится ненулевым. Для восстановления треугольной формы матрицы B преобразуемого пучка применяется преобразование (2.1.2), которое также сохраняет нулевые элементы, уже полученные в нужных позициях матриц A и B. Зануление элементов матрицы A проводится последовательно по столбцам, начиная с первого $(j = 1)$. В каждом столбце аннулируются элементы снизу вверх, начиная с последнего.

Процесс (2.1.1), (2.1.2) заканчивается занулением элементов у A в позиции $(n, n-2)$, у B в позиции $(n, n-1)$. В результате $l = 1/2(n-1)(n-2)$ шагов будет построен пучок $D_l(\lambda)$ в треугольно–

хессенберговой форме

$$Q^T = \prod_{j=1}^{n-2} \prod_{k=1}^{n-1-j} Q^T_{n-k,n-k+1}, \qquad Z = \prod_{j=1}^{n-2} \prod_{k=1}^{n-1-j} Z_{n-k,n-k+1}.$$

2.1.2. QZ-алгоритм [110–112, 172, 173, 209] позволяет регулярный пучок $A - \lambda B$ (B – треугольная, A – хессенбергова матрицы) простой структуры с помощью ортогональных преобразований приводить к пучку в форме Шура

$$Q^H \big(A - \lambda B\big) Z = \widetilde{A} - \lambda \widetilde{B}, \tag{2.1.3}$$

где $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ либо обе треугольные, если все собственные значения пучка вещественные, либо $\widetilde{B}$ – треугольная, $\widetilde{A}$ – квазитреугольная с блоками 1×1 и 2×2, если среди собственных значений пучка есть комплексно сопряженные собственные значения.

Алгоритм итерационный и состоит в построении последовательности строго эквивалентных пучков $\{A_k - \lambda B_k\}$ ($A_0 = A, \quad B_0 = B$). Каждый шаг реализуется как двойной шаг QR-метода с неявными сдвигами для матрицы $C = AB^{-1}$. При этом одна из последовательностей $\{B_k\}$ является последовательностью треугольных матриц, другая $\{A_k\}$ – последовательностью матриц хессенберговой формы. Типичный (первый) шаг QZ – алгоритма требует выполнения следующих операций.

(1) Вычисляются собственные значения a и b верхнего главного минора 2×2 матрицы $M = AB^{-1}$ и первый столбец матрицы

$$\big(M - aI\big)\big(M - bI\big) = \big(x, y, z, 0, \dots, 0\big)^T.$$

(2) Для каждого фиксированного $k = 1, \dots, n-2$

(2a) Находится ортогональная матрица Q_k такая, что

$$Q_k \big[x, y, z\big]^T = \big(*, 0, 0\big)^T$$

.

(2b) Вычисляются

$$A := \operatorname{diag}\big\{I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2}\big\}\, A$$
$$B := \operatorname{diag}\big\{I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2}\big\}\, B.$$

(2c) Находится ортогональная матрица Z_{k1} такая, что

$$\big[b_{k+2,k},\ b_{k+2,k+1},\ b_{k+2,k+2}\big]\, Z_{k1} = \big[0, 0, *\big].$$

$(2d)$ Вычисляются

$$A := A\,\mathrm{diag}\left\{I_{k-1}, Z_{k1}, I_{n-k-2}\right\}$$
$$B := B\,\mathrm{diag}\left\{I_{k-1}, Z_{k1}, I_{n-k-2}\right\}.$$

$(2e)$ Находится ортогональная матрица Z_{k2} такая, что

$$\left[b_{k+1,k}\, b_{k+1,k+1}\right] Z_{k2} = \left[0, *\right].$$

$(2f)$ Вычисляются

$$A := A\,\mathrm{diag}\left\{I_{k-1}, Z_{k2}, I_{n-k-1}\right\}$$
$$B := B\,\mathrm{diag}\left\{I_{k-1}, Z_{k2}, I_{n-k-1}\right\}.$$

$$x := a_{k+1,k} \qquad y := a_{k+2,k}$$

если $k < n-2$, то $Z := a_{k+3,k}$. Число k увеличивается на 1. Пункт 2 заканчивается при $k = n-2$.

$(3a)$ Находится ортогональная матрица Q_{n-1} такая, что $Q_{n-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$.

$(3b)$ Вычисляются

$$A := \mathrm{diag}\left\{I_{n-2}, Q_{n-1}\right\} A$$
$$B := \mathrm{diag}\left\{I_{n-2}, Q_{n-1}\right\} B.$$

$(3c)$ Находится ортогональная матрица Z_{n-1} такая, что

$$\left[b_{n,n-1},\, b_{n,n}\right] Z_{n-1} = \left[0, *\right].$$

$(3d)$ Вычисляются

$$A := A\,\mathrm{diag}\left\{I_{n-2}, Z_{n-1}\right\}$$
$$B := B\,\mathrm{diag}\left\{I_{n-2}, Z_{n-1}\right\}.$$

Выполнением $(3d)$ заканчивается элементарный шаг QZ алгоритма.

Последовательность QZ шагов применяется к хессенберго–треугольному пучку $A - \lambda B$ простой структуры до приведения матрицы A к квазитреугольной (треугольной) форме.

2.1.3. AB-алгоритм [31, 32, 218] позволяет регулярный пучок $A - \lambda B$, имеющий не все собственные значения равные по модулю, приводить к квазитреугольному пучку, собственные значения диагональных блоков которого совпадают с собственными значениями исходного пучка и равны по модулю.

Алгоритм состоит в построении последовательности согласованных пучков $\{A_k - \lambda B_k\}$, $A_0 = A$, $B_0 = B$, т.е. пучков, матрицы которых связаны соотношением

$$A_k B_{k+1} = B_k A_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.4}$$

причем одна из последовательностей $\{B_k\}$ является последовательностью треугольных матриц, другая $\{A_k\}$ – последовательностью матриц хессенберговой формы. Типичный (первый) шаг алгоритма состоит в вычислении правого нуль-пространства вспомогательной матрицы $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix}$. Для этого находится ΔW-0 разложение $\mathfrak{A}Q = [L\ \mathbb{O}]$, где $Q = \prod T_{ij}$ – результирующая ортогональная матрица плоских вращений, L – матрица полного столбцового ранга. Последние n столбцов ортогональной матрицы Q, образующие матрицу $Q_1 = [-B_1\ A_1]^B$, дадут пучок $A_1 - \lambda B_1$ для следующего шага.

Выбор индексов (ij) в T_{ij}, т.е. порядок аннулирования элементов $\mathfrak{A}$, позволяющий сохранить треугольно-хессенбергову форму пучка, следующий

$$\begin{aligned} &\bigl(k, n+k-1\bigr), \bigl(k, n+k\bigr), \ldots, \bigl(k, 2n\bigr), \qquad k = n, n-1, \ldots, 2 \\ &\bigl(1, n+1\bigr), \bigl(1, n+2\bigr), \ldots, \bigl(1, 2n\bigr). \end{aligned}$$

При выполнении некоторых условий алгоритм сходится по форме к пучку квазитреугольного вида. Сходимость является линейной и зависит от разрыва между собственными значениями пучка.

В случае пучка простой структуры сходимость можно улучшить применением модификаций AB-алгоритма со сдвигом. Приводим одну из модификаций AB-алгоритма со сдвигом:

$$\widehat{A}_k = A_k - \bigl(t_k - t_{k-1}\bigr)\, B_k, \qquad \widehat{B}_k = B_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$A_0 = A$, $B_0 = B$; $t_1, t_2, \ldots$ – некоторые сдвиги. Матрицы A_{k+1} и B_{k+1} получаются из $\widehat{A}_k$ и $\widehat{B}_k$ применением шага AB – алгоритма (2.1.4) так, что

$$\widehat{A}_k B_{k+1} = \widehat{B}_k A_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

$B_1, B_2, \ldots$ являются верхними треугольными матрицами.

Процесс построения $\{A_k - \lambda B_k\}$ заканчивается при $|t_k - t_{k-1}| \leqslant \varepsilon$, где ε – заданная (рабочая) точность. В этом случае t_k будет приближением к собственному значению пучка $A-\lambda B$. В качестве сдвигов берут

$$t_k = t_{k-1} + \frac{a_{11}^{(k)}}{b_{11}^{(k)}},$$

где $a_{ij}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ элементы матриц A_k и B_k соответственно. При необходимости вычисления остальных собственных значений процесс аналогично продолжается с пучком меньших размеров.

В случае пучка простой структуры при выполнении некоторых условий такой выбор сдвига дает асимптотически квадратичную сходимость к последовательно определенным собственным значениям пучка $A - \lambda B$, начиная с наименьшего по модулю.

2.1.4. Метод одновременных итераций.

Метод одновременных итераций (или другими словами, метод итерирования подпространств) предназначен для решения частичной проблемы собственных значений регулярного пучка: вычислению $l \geqslant 1$ экстремальных собственных значений или l собственных значений, ближайших по модулю к заданному числу комплексной плоскости.

Для регулярного пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ порядка n метод состоит в построении последовательности матриц $\{Z_k\}$ размеров $n \times l$, столбцы которых рассматриваются как базисы некоторых подпространств, являющихся приближением к инвариантному подпространству, натянутому на правые собственные векторы пучка $D(\lambda)$, соответствующие “l” искомым собственным значениям, т.е. к подпространству, называемому блочным собственным вектором пучка $D(\lambda)$.

Общая схема метода вычисления (см., например, [120]) максимальных по модулю собственных значений состоит в выполнении следующих операций.

$$\begin{aligned} B\widetilde{Z}_k &= AZ_{k-1} \\ Z_k &= \widetilde{Z}_k\Gamma_k^{-1} \qquad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Здесь Z_0 – начальное приближение, $n \times l$ – матрица полного столбцового ранга. Приближение $\widetilde{Z}_k$ однозначно определяется, если $\det B \neq 0$, т.е. исходный пучок не имеет бесконечного собственного значения; Γ_k – невырожденная $l \times l$ – матрица, осуществляющая перестройку базиса.

При выполнении некоторых условий последовательность подпространств $\{Z_k\}$ линейно сходится к правому инвариантному подпространству пучка $D(\lambda)$. Матрица Z_k является приближением к правому блочному собственному вектору пучка; соответствующее ему приближение Λ_k к преобладающему собственному значению может определяться, например, из уравнения

$$Z_{k-1}\Lambda_k = \widetilde{Z}_k,$$

решаемого методом наименьших квадратов. Различные алгоритмы метода отличаются выбором матриц Γ_k.

Приводим некоторые алгоритмы метода одновременных итераций, обобщающие на случай пучков известные алгоритмы для матриц.

а) $\widetilde{Z}_k = L_k R_k \qquad Z_k = L_k$. Здесь L_k – левая трапецевидная, R_k – правая треугольная матрицы, $\Gamma_k = R_k$, $\Lambda_k = Z_{k-1}^T Z_k$. Алгортим является обобщением метода Бауэра [281, 183, 81].

б) $\widetilde{Z}_k = Q_k R_k, \qquad Z_k = Q_k$. Здесь Q_k – матрица с ортонормированными столбцами, R_k – правая треугольная матрица ($\Gamma_k = R_k$). Алгоритм является обобщением ортогонально–треугольного степенного метода [9, 81, 183].

в) $Z_k = \widetilde{Z}_k\Gamma_k^{-1}$. Здесь Γ_k – матрица, составленная из l линейно независимых строк матрицы $\widetilde{Z}_k$. Алгоритм является блочным обобщением степенного метода с нормировкой векторов по ненулевой компоненте [147].

г) $\Gamma_k = \left(Z_{k-1}^T Z_{k-1}\right)^{-1}\left(Z_{k-1}^T \widetilde{Z}_k\right), \quad Z_k = \widetilde{Z}_k\Gamma_k^{-1}$. Алгоритм является блочным обобщением [88, 89] степенного метода с вычислением собственных значений через отношение скалярных произведений.

д) $H_k = \left(Z_{k-1}^T Z_{k-1}\right)^{-1}\left(Z_{k-1}^T \widetilde{Z}_k\right), \qquad H_k U_k = U_k J_k, \quad Z_k = \widetilde{Z}_k U_k$, где J_k – каноническая форма Жордана, U_k – канонический базис матрицы $H_k \quad (\Gamma_k = U_k^{-1})$. Этот алгоритм для обычной проблемы описан в [190].

е) $\Gamma_k = Z_{k-1}^T B Z_{k-1}, \qquad Z_k = \widetilde{Z}_k\Gamma_k^{-1}$. Алгоритм является частным случаем биодновременных итераций, применяется для симметричного пучка. Для обычной проблемы описан в [81].

Заметим, что в алгоритмах в) и г) из сходимости подпространств $\{Z_k\}$ следует сходимость матриц $\{Z_k\}$, нормирующие матрицы $\{\Gamma_k\}$ сходятся к соответствующему преобладающему блочному собственному значению. В алгоритме е) аналогичными свойствами обладают подпоследовательности $\{Z_{2k}\}$, $\{Z_{2k+1}^T B Z_{2k}\}$ и $\{Z_{2k+1}\}$, $\{Z_{2k}^T B Z_{2k+1}\}$. При этом сходимость к блочному собственному значению является квадратичной. В алгоритме д) структура преобладающих по модулю собственных значений исходного пучка полностью определяется жордановой структурой J_k.

Для вычисления наименьших по модулю собственных значений пучка следует в процессе (2.1.5) заменить второе из равенств на $A\widetilde{Z}_k = BZ_{k-1}$. В этом случае собственные значения вычисленного блочного собственного значения являются обратными к искомым.

Для вычисления собственных значений, ближайших к некоторому числу α, используются соотношения

$$D(\alpha)\widetilde{Z}_k = BZ_{k-1},$$
$$D(\alpha)\widetilde{Z}_k = AZ_{k-1},$$

или, в более общей форме, соотношения

$$D(\alpha)\widetilde{Z}_k = D(p)Z_{k-1}.$$

В каждом из алгоритмов искомые собственные значения связаны простыми соотношениями с собственными значениями преобладающего блочного собственного значения.

§2.2. Алгоритмы анализа канонической формы Жордана–Вейерштрасса

Анализ канонической формы Жордана–Вейерштрасса регулярного пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ состоит в вычислении структурных индексов его собственных значений.

Пусть $\lambda = \lambda_*$ есть конечное фиксированное собственное значение $D(\lambda)$, структурные индексы которого следует вычислить. Не умаляя общности, считаем $\lambda_* = 0$. В противном случае в $D(\lambda)$ делаем замену переменных, полагая $\lambda := \lambda + \lambda_*$. Такая замена переводит λ_* в нулевое собственное значение, не изменяя при этом структурных индексов ни λ_*, ни других собственных значений $D(\lambda)$.

Рассмотрим некоторые алгоритмы, решающие задачу вычисления структурных индексов нулевого собственного значения пучка $D(\lambda)$.

2.2.1. Первый алгоритм [155] является обобщением алгоритма [21, 257], предложенного для матрицы. Алгоритм состоит в построении конечной последовательности пучков $\{A_{kk} - \lambda B_{kk}\}$

уменьшающихся размеров. Полагая $n_1 = n$, $A_{11} = A$, $B_{11} = B$ опишем типичный (первый) шаг, который сводится к выполнению для пучка $A_{11} - \lambda B_{11}$ следующих операций.

(1) Вычисляется ΔW-0 разложение матрицы A_{11}:

$$A_{11} W_{\text{a}} = [\Delta, 0],$$

где W_{a} – ортогональная матрица, последние h_1 столбцов которой образуют правое нуль-пространство A_{11}.

Пучок $A_{11} - \lambda B_{11}$ справа умножается на W_{a}:

$$(A_{11} - \lambda B_{11}) W_{\text{a}} = [\underbrace{A_2 - \lambda B_2}_{n_1 - h_1} \qquad \underbrace{-\lambda B_1}_{h_1}].$$

Происходит столбцовое “сжатие” матрицы A_{11} до полного столбцового ранга (последние h_1 столбцов $A_{11} W_{\text{a}}$ будут нулевыми).

(2) Вычисляется ΔW-0 разложение B_1^T:

$$B_1^T W_{\text{b}} = [\Delta_{\text{b}}, 0].$$

Преобразуемый пучок слева умножается на W_{b}^T. Происходит сжатие B_1 до полного строчного ранга. Имеем

$$W_{\text{b}}^T (A_{11} - \lambda B_{11}) W_{\text{a}} = \begin{bmatrix} A_{21} - \lambda B_{21} & -\lambda B_{11} \\ A_{22} - \lambda B_{22} & \mathbb{O}_{n_2 h_1} \end{bmatrix}, \qquad n_2 = n_1 - h_1.$$

(3) Блоки построенного пучка переставляются с помощью матрицы перестановок θ_1:

$$\theta_1 W_{\text{b}}^T (A_{11} - \lambda B_{11}) W_{\text{a}} = \begin{bmatrix} A_{22} - \lambda B_{22} & \mathbb{O}_{n_2 h_1} \\ A_{21} - \lambda B_{21} & -\lambda B_{11} \end{bmatrix} = P_1 (A_{11} - \lambda B_{11}) Q_1,$$

где $P_1 = \widehat{P}_1 = \theta_1 W_{\text{b}}^T$, $\quad Q_1 = \widehat{Q}_1 = W_{\text{a}}$ – ортогональные матрицы.

В результате решение спектральной задачи для $A_{11} - \lambda B_{11}$ свелось к решению спектральных задач для двух пучков: $A_{22} - \lambda B_{22}$ порядка n_2 и $-\lambda B_{11}$ порядка h_1.

Процесс аналогично продолжается и заканчивается на некотором шаге l, когда матрица $A_{l+1,l+1}$ будет иметь полный столбцовый ранг.

В результате будет получена следующая информация.

а) Последовательность чисел $\{h_k\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$h_1 \geqslant h_2 \geqslant \cdots \geqslant h_l > h_{l+1} = 0,$$

которые дают информацию о структуре нулевого собственного значения пучка $A-\lambda B$: $\sigma_{k0}=h_k-h_{k+1}$, $k=1,\dots,l$ есть число элементарных делителей λ^k.

б) Пучок $A_{l+1,l+1}-\lambda B_{l+1,l+1}$, все собственные значения и структурные индексы которого совпадают с ненулевыми собственными значениями исходного пучка и их структурными индексами.

2.2.2. Второй алгоритм* состоит в построении конечной последовательности пучков $D_k(\lambda)=C_0^k+\lambda C_1^k$, $k=0,1,\dots,l$,

$$D_{k+1}(\lambda)=D_k(\lambda)W^k \operatorname{diag}\{I_{r_{k+1}},\lambda^{-1}I_{n-r_{k+1}}\}$$
$$D_0(\lambda)=C_0+\lambda C_1 \qquad (C_0=A,\ C_1=-B).$$

Здесь W^k есть ортогональная $n\times n$ матрица, реализующая $\Delta W-0$ разложение матрицы $D_k(0)\equiv C_0^k$, $r_{k+1}=\operatorname{rank} D_k(0)$.

Переход от $D_k(\lambda)$ к $D_{k+1}(\lambda)$ осуществляется выполнением следующих операций.

(1) Находится ортогональная матрица $W^k\equiv[W_1^k,W_2^k]$, реализующая ΔW-0 разложение матрицы C_0^k:

$$C_0^kW^k=\big[\Delta_k,\mathbb{O}\big].$$

Здесь $\mathbb{O}$ есть нулевая $n\times(n-r_{k+1})$ матрица, матричные блоки W_1^k и W_2^k имеют соответственно размеры $n\times r_{k+1}$ и $n\times(n-r_{k+1})$.

(2) Осуществляется переход к пучку $D_{k+1}(\lambda)=C_0^{k+1}+\lambda C_1^{k+1}$ по формулам $C_0^{k+1}=[C_0^kW_1^k,C_1^kW_2^k]$; $C_1^{k+1}=[C_1^kW_1^k,\mathbb{O}]$.

Алгоритм построения последовательности пучков $D_k(\lambda)$ продолжается до тех пор, пока при некотором шаге l получим матрицу C_0^{l+1} полного столбцового ранга. В результате будет получена следующая информация.

а) Последовательность чисел

$$r_1\leqslant r_2\leqslant\dots\leqslant r_{l+1},$$

где $\sigma_{k0}\equiv r_{k+1}-r_k$ есть число элементарных делителей λ^k.

б) Пучок $D_l(\lambda)=C_0^l+\lambda C_1^l$, все собственные значения и структурные индексы которого совпадают с ненулевыми собственными значениями исходного пучка и их структурными индексами.

2.2.3. Третий алгоритм** вычисления структурных индексов регулярного пучка $A-\lambda B$, соответствующих собственному зна-

*Алгоритм применим к полиномиальной матрице произвольной степени $s\geqslant 1$. В главе 5 приведено его обоснование для $s\geqslant 1$.

**Здесь описывается алгоритм, использующий технику нормализованного разложения. Вариант алгоритма с применением сингулярного разложения описан в [153].

чению $\lambda_* = 0$ состоит в построении конечной последовательности пучков $\{A_k - \lambda B_k\}$ невозрастающих порядков. Алгоритм заканчивается на шаге l, когда будет построен пучок $A_{l+1} - \lambda B_{l+1}$ с неособенной матрицей A_{l+1}.

Опишем типичный (первый) шаг, который сводится к выполнению следующих операций.

(1) Находится нормализованное разложение матрицы $\mathfrak{A} = [A, B]$:

$$\theta\mathfrak{A}Q = \big[L, \mathbb{O}\big],$$

где Q – результирующая ортогональная матрица, L – матрица полного столбцового ранга, $\mathbb{O}$ – нулевая $n\times n$ матрица, θ – результирующая матрица перестановок, которая на каждом шаге разложения выбирается не по всей преобразуемой матрице $\mathfrak{A}$, а только по ее первому блоку A. Последние n столбцов ортогональной матрицы Q образуют матрицу Q_1 размеров $2n \times n$. Эта матрица с точностью до перестановки ее столбцов ($Q_1\widehat{\theta} = [-\widehat{B}_1\ \widehat{A}_1]^B$) дает пучок $\widehat{A}_1 - \lambda\widehat{B}_1$, матрица $\widehat{A}_1$ которого имеет первые $n - r_1$ столбцов нулевыми (r_1 – ранг матрицы A). Соответствующие столбцы матрицы $\widehat{B}_1$ являются ортонормированными.

(2) Выполняется эквивалентное преобразование

$$\widehat{B}_1^T\big(\widehat{A}_1 - \lambda\widehat{B}_1\big) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1h_1} & M_1 \\ \mathbb{O}_{r_1h_1} & A_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_{h_1} & \\ & B_1 \end{bmatrix},$$

где $h_1 = n - r_1$, A_1, B_1 – матрицы порядка r_1, причем B_1 – симметричная матрица.

Процесс аналогично продолжается с пучком $A_1 - \lambda B_1$ и заканчивается на шаге l, когда матрица A_{l+1} будет иметь полный столбцовый ранг. В результате будет получена следующая информация.

а) Последовательность чисел

$$h_1 \geqslant h_2 \geqslant \cdots \geqslant h_l > h_{l+1} = 0,$$

где $h_1 = n - r_1$, $h_k = r_{k-1} - r_k$, из которой получаем информацию о структуре нулевого собственного значения пучка $A - \lambda B$: $\sigma_{k0} = h_k - h_{k+1}$, $k = 1, \dots, l$ – число элементарных делителей λ^k.

б) Пучок $A_{l+1} - \lambda B_{l+1}$, все собственные значения и структурные индексы которого совпадают с ненулевыми собственными значениями и их структурными индексами исходного пучка $D(\lambda)$.

Замечания. 1. Рассмотренные выше алгоритмы анализа структуры канонической формы Вейерштрасса-Кронекера для регулярного пучка матриц без изменения могут быть использованы для вычисления структурных индексов собственных значений пучка полного столбцового (строчного) ранга.

2. Алгоритмы вычисления структурных индексов собственных значений пучка, построенные на других принципах, рассматриваются в §2.4.

2.2.4. Вычисление полюсно нулевой структуры пучка в точке $\lambda = \infty$.

Как уже сказано в §1.1 для пучка, как частного случая полиномиальной матрицы, полюсно нулевая структура в точке $\lambda = \infty$ по определению полагается равной полюсно нулевой структуре в точке $\lambda = 0$ матрицы $\overline{D}(\lambda) = \lambda D(\frac{1}{\lambda})$. При этом пучок $A - \lambda B$ имеет бесконечный элементарный делитель степени $t_{k\infty}$, если пучок $B - \lambda A$ имеет элементарный делитель $\lambda^{t_{k\infty}}$. Связь между структурными индексами $\sigma_{k\infty}$ бесконечной особой точки и степенями бесконечных элементарных делителей задается соотношением

$$\sigma_{k\infty} = t_{k\infty} - 1.$$

Для определения полюсно нулевой структуры пучка $A - \lambda B$ в точке $\lambda = \infty$ требуется выполнить следующие операции.

(1) Определить структурные индексы $\sigma_{k\infty} = t_{k\infty}$ пучка $B - \lambda A$ в точке $\lambda = 0$.

(2) Найти структурные индексы $\sigma_{k\infty}$ пучка $A - \lambda B$, используя соотношение

$$\sigma_{k\infty} = \sigma_{k0} - 1 \equiv t_{k\infty} - 1.$$

Числа $\sigma_{k\infty} > 0$ определяют нулевую структуру $D(\lambda) = A - \lambda B$ в точке $\lambda = \infty$.

Числа $\sigma_{k\infty} < 0$ должны определять полюсную структуру $D(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$, так что $\lambda = \infty$ будет полюсом для $D(\lambda)$, если $\sigma_{k0} = t_{k\infty} = 0$. Последнее возможно только в ситуации, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением пучка $B - \lambda A$.

Равенство $\sigma_{k\infty} = 0$ указывает на отсутствие у пучка $D(\lambda)$ особенности в точке $\lambda = \infty$.

Замечание. Для выполнения операции (1) при определении полюсно нулевой структуры $D(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$, может быть использован любой алгоритм вычисления структурных индексов нулевого собственного значения пучка.

§2.3. Алгоритмы анализа канонической формы Кронекера

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ есть $m \times n$ сингулярный пучок. Анализ канонической формы Кронекера $D(\lambda)$ требует вычисления минимальных индексов и выделения регулярного блока пучка $D(\lambda)$.

Предлагается несколько алгоритмов, решающих поставленную задачу. В каждом из них строится конечная последовательность пучков $D_k(\lambda) = A_k - \lambda B_k$ $k = 0, 1, \ldots, l$, $D_0(\lambda) = D(\lambda)$ уменьшающихся размеров $m_k \times n_k$. Уменьшение происходит за счет использования понижающих подпространств. Различные алгоритмы отличаются друг от друга выбором понижающих подпространств, их построением и использованием.

2.3.1. Алгоритмы, основанные на применении ΔW-0 разложения.

2.3.1.1. Первый алгоритм этой группы строит последовательность пучков уменьшающихся размеров за счет исчерпывания полиномиальных решений в порядке возрастания их индексов. Сначала выделяются левые и правые полиномиальные решения нулевой степени. С этой целью находятся ортогональные матрицы T и S, осуществляющие ΔW-0 разложение матриц $M_1 = [A, -B]$ и $\overline{M}_1 = [A^T, -B^T]^B$, соответственно. Далее образуется пучок

$$S^T(A - \lambda B)T = \begin{bmatrix} D_1(\lambda) & \\ & \mathbb{O}_{hq} \end{bmatrix},$$

где h – число левых, g – число правых полиномиальных решений нулевой степени; $D_1(\lambda) = A_1 - \lambda B_1$ – пучок размеров $m_1 \times n_1$ $(m_1 = m - h, n_1 = n - g)$, не имеющий полиномиальных решений нулевой степени. Регулярный блок $D_1(\lambda)$ и все его правые и левые ненулевые минимальные индексы такие же, как и у исходного пучка.

Дальнейшее понижение размеров $D_1(\lambda)$ за счет выделения полиномиальных решений его наименьшей степени $\varepsilon \geqslant 1$ осуществляется следующим образом. Для определенности будем считать, что сначала находится правое полиномиальное решение наименьшей ненулевой степени. С этой целью строятся матрицы

$$M_k = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ -B_1 & A_1 & & \\ & -B_1 & \ddots & \\ & & \ddots & A_1 \\ & & & -B_1 \end{bmatrix}$$

размеров $m_1(k+2) \times n_1(k+1)$, $k = 1, \ldots, \varepsilon$, пока при некотором ε не получим $\operatorname{rank} M_\varepsilon < (\varepsilon+1)n_1$. Пусть $Q_\varepsilon = N_c(M_\varepsilon) = [X_0^{(\varepsilon)} \ldots X_\varepsilon^{(\varepsilon)}]^B$. Число $\delta_\varepsilon = \dim Q_\varepsilon$ совпадает с числом правых минимальных индексов, равных ε, пучка $A - \lambda B$. Введем подпространство $X_\varepsilon = [X_0^{(\varepsilon)}, \ldots, X_\varepsilon^{(\varepsilon)}]$, где $X_0^{(\varepsilon)}, \ldots, X_\varepsilon^{(\varepsilon)}$ суть коэффициенты блочных полиномиальных решений степени ε пучка $D_1(\lambda)$.

Для уменьшения размеров пучка за счет исключения всех правых полиномиальных решений степени ε следует найти ортогональные матрицы T_1 и S_1, осуществляющие ΔW-0 разложения соответственно матриц X_ε^T и $(AX_\varepsilon)^T$ и образовать пучок

$$S_1^T(A_1 - \lambda B_1)T_1 = \begin{bmatrix} * & * \\ \mathbb{O} & A_2 - \lambda B_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь пучок $A_2 - \lambda B_2$ имеют размеры $m_2 \times n_2$, где $m_2 = m_1 - \varepsilon\delta_\varepsilon$, $n_2 = n_1 - (\varepsilon+1)\delta_\varepsilon$, его регулярный блок совпадает с регулярным блоком пучка $A - \lambda B$, а все минимальные индексы кроме правого индекса ε совпадают с таковыми для пучка $A_1 - \lambda B_1$.

Производя последовательно аналогичный процесс понижения $A_2 - \lambda B_2$ и т.д. за счет выделения сначала правых, а затем левых полиномиальных решений, определим все правые и левые минимальные индексы пучка $A - \lambda B$ и найдем его регулярное ядро. Процесс заканчивается на шаге l, когда $m_l = n_l$ и $\varepsilon_l + \eta_l \geqslant n$. Пучок $A_l - \lambda B_l$ не имеет правых полиномиальных решений степени, меньшей ε_l, и левых полиномиальных решений степени, меньшей η_l, так что он является регулярным блоком исходного пучка.

2.3.1.2. Второй алгоритм является обобщением на случай сингулярного пучка алгоритма п. 2.2.1 [155].

Типичный шаг (переход от $D_k(\lambda)$ к $D_{k+1}(\lambda)$) состоит в выполнении следующих операций.

(1) Полагая $A_{11} := A_k$, $B_{11} := B_k$, находим ΔW-0 разложение матрицы A_{11}:

$$A_{11}W_{\text{a}} = [A_{21}\ \mathbb{O}],$$

где A_{21} есть $m \times (n - h_k)$ матрица полного столбцового ранга, $h_k = \dim N_c[A_{11}]$, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times h_1$ матрица, $W_{\rm a}$ – ортогональная матрица.

(2) Пучок $A_{11} - \lambda B_{11}$ справа умножается на $W_{\rm a}$:

$$\bigl(A_{11} - \lambda B_{11}\bigr) W_{\rm a} = \bigl[A_2 - \lambda B_2 \quad -\lambda B_1\bigr].$$

Происходит столбцовое сжатие A_{11} (нулевыми будут h_1 столбцов $A_{11} W_{\rm a}$).

(3) Вычисляется ΔW-0 разложение матрицы B_1^T:

$$B_1^T W_{\rm b} = \bigl[\widehat{B}_{11}^T \ \mathbb{O}\bigr],$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $(m_k - r_k) \times h_k$ матрица, r_k – $\operatorname{rank} B_1$, $\widehat{B}_{11}^T$ – матрица полного столбцового ранга, $W_{\rm b}$ – ортогональная матрица.

(4) Преобразуемый пучок слева умножается на $W_{\rm b}^T$:

$$W_{\rm b}^T \bigl(A_{11} - \lambda B_{11}\bigr) W_{\rm a} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} A_{21} - \lambda B_{21} & -\lambda \widehat{B}_{11} \\ \underbrace{A_{22} - \lambda B_{22}}_{n_k - h_k} & \underbrace{\mathbb{O}}_{h_k} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r_k \\ \}m_k - r_k \end{array} \end{array}.$$

После перестановки блочных строк имеем

$$\begin{bmatrix} A_{22} - \lambda B_{22} & \mathbb{O} \\ A_{21} - \lambda B_{21} & -\lambda \widehat{B}_{11} \end{bmatrix} = \widehat{P}_k \bigl(A_{11} - \lambda B_{11}\bigr) \widehat{Q}_k,$$

где $\widehat{P}_k := \theta W_{\rm b}^T$, $\widehat{Q}_k := W_{\rm a}$, θ – матрица перестановок.

Спектральная задача для пучка $D_k(\lambda)$ сведена к решению спектральных задач для двух пучков $-\lambda \widehat{B}_{kk} := -\lambda \widehat{B}_{11}$ и $D_{k+1}(\lambda) = A_{k+1} - \lambda B_{k+1}$, где $A_{k+1} := A_{22}$, $B_{k+1} := B_{22}$, соответственно, размеров $r_k \times h_k$ и $m_{k+1} \times n_{k+1}$, $m_{k+1} = m_k - r_k$, $n_{k+1} = n_k - h_k$.

Процесс аналогично продолжается и заканчивается на шаге, когда матрица $A_{l+1} = A_{ll}$ будет иметь полный столбцовый ранг. В результате будет получена следующая информация.

а) Пучок

$$D_{l+1}(\lambda) \equiv P\bigl(A - \lambda B\bigr) Q =$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} A_{ll} - \lambda B_{ll} & & & & \\ A_{l,l-1} - \lambda B_{l,l-1} & -\lambda \widehat{B}_{ll} & & & \\ \cdots\cdots\cdot & \cdots\cdots\cdot & \ddots & & \\ A_{l2} - \lambda B_{l2} & A_{l2} - \lambda B_{l2} & & -\lambda \widehat{B}_{22} & \\ \underbrace{A_{l1} - \lambda B_{l1}}_{n_l} & \underbrace{A_{l1} - \lambda B_{l1}}_{h_{l-1}} & & \underbrace{A_{21} - \lambda B_{21}}_{h_1} & \underbrace{-\lambda \widehat{B}_{11}}_{h_0} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}m_l \\ \}r_{l-1} \\ \\ \\ \}r_0 \end{array}, \qquad (2.3.1)$$

не имеющий правых полиномиальных решений. Левые минимальные индексы $D_{l+1}(\lambda)$ и собственные значения его совпадают с левыми минимальными индексами и конечными собственными значениями исходного пучка. Здесь $P = \prod P_k$, $Q = \prod Q_k$, $P_k = \begin{bmatrix} \widehat{P}_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $Q_k = \begin{bmatrix} \widehat{Q}_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

б) Две последовательности чисел $\{h_k\}$ и $\{r_k\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$h_0 \geqslant r_0 \geqslant h_1 \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant h_{l-1} \geqslant r_{l-1} = h_l = 0,$$

которые дают информацию о структурных индексах нулевого собственного значения и правых минимальных индексах исходного пучка:

$\sigma_{k0} = r_k - h_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, l-1)$ – число элементарных делителей λ^k;

$\varepsilon_k = h_k - r_k$ $(k = 0, 1, \ldots, l-1)$ – число правых минимальных индексов, равных k.

2.3.2. AB–CSD алгоритм [76] позволяет одновременно вычислять правые и левые минимальные индексы и элементарные делители нулевого и бесконечного собственных значений пучка.

Типичный шаг, переход от $D_k(\lambda)$ к $D_{k+1}(\lambda)$, требует выполнения следующих операций.

(1) Для $D_k(\lambda) = A_k - \lambda B_k$ размеров $m_k \times n_k$ вычисляется согласованный пучок $M_k(\lambda) = Q_-^k - \lambda Q_+^k$ размеров $n_k \times (2n_k - r_k)$. Здесь $[Q_+^k, Q_-^k]^B \equiv Q_k$ – матрица $2n_k \times (2n_k - r_k)$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A} = [A_k, -B_k]$ ранга r_k.

(2) Находится косинус–синусное разложение матрицы Q_k и формируется новый пучок

$$V_k^T M_k(\lambda) W_k = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & * \\ \mathbb{O} & \widehat{A}_k \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} I \\ \mathbb{O} \end{matrix}}_{h_k} & \underbrace{\begin{matrix} \mathbb{O} \\ \widehat{B}_k \end{matrix}}_{2n_k - r_k - h_k} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}h_k \\ \}n_k - h_k \end{matrix}.$$

Здесь V_k и W_k – ортогональные матрицы, осуществляющие сингулярное разложение матрицы Q_+^k: $Q_+^k = V_k \Sigma_s^k W_k^T$, h_k – размер правого нуль-пространства матрицы Q_-^k.

Переход к пучку $\widehat{D}_k(\lambda) = \widehat{A}_k - \lambda \widehat{B}_k$ означает первое понижение размеров пучка $D_k(\lambda)$.

(3) Осуществляется формирование пучка $D_{k+1}(\lambda)$ выполнением (3a)–(3d):

(3a) Пучок $\widehat{D}_k(\lambda)$ размеров $(n-h_k)\times(2n_k-r_k-h_k)$ записывается в блочном виде

$$\widehat{D}_k(\lambda)=\bigl[A_{11}^k,\underbrace{A_{12}^k}_{p_k}\bigr]-\lambda\bigl[B_{11}^k,\underbrace{\mathbb{O}}_{p_k}\bigr],$$

p_k – размер правого нуль-пространства матрицы Q_+^k.

(3b) Находится ортогональная матрица W_k, осуществляющая ΔW-0 разложение матрицы $(A_{12}^k)^T$:

$$W_k^T A_{12}^k=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{12}^k\\ \underbrace{\mathbb{O}}_{p_k}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}t_k\\ \end{matrix},$$

где $t_k=\operatorname{rank}A_{12}^k$.

(3c) Пучок $W_k^T[\widehat{A}_k-\lambda\widehat{B}_k]\equiv\tilde{D}_k(\lambda)$ записывается в блочном виде

$$\tilde{D}_k(\lambda)=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{21}^k-\lambda\tilde{B}_{21}^k & \tilde{A}_{12}^k\\ \tilde{A}_{11}^k-\lambda\tilde{B}_{11}^k & \underbrace{\mathbb{O}}_{p_k}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}t_k\\ \end{matrix}$$

или после перестановки блочных столбцов в виде

$$\tilde{D}_k(\lambda)\theta=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{12}^k & \tilde{A}_{21}^k-\lambda\tilde{B}_{21}^k\\ \mathbb{O} & \tilde{A}_{11}^k-\lambda\tilde{B}_{11}^k\end{bmatrix}.$$

(3d) Осуществляется второе понижение преобразуемого пучка, т.е. переход к пучку $D_{k+1}(\lambda)=A_{k+1}-\lambda B_{k+1}$, где $A_{k+1}=\tilde{A}_{11}^k$, $B_{k+1}=\tilde{B}_{11}^k$. В результате выполнения 1^0--3^0 будет построен пучок вида

$$\begin{bmatrix}\lambda I & * & *\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ & \tilde{A}_{12}^k & *\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \underbrace{}_{h_k} & \underbrace{\phantom{\tilde{A}_{12}^k}}_{p_k} & \underbrace{A_{k+1}-\lambda B_{k+1}}_{2n_k-r_k-h_k-p_k\equiv n_{k+1}}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}h_k\\ \\ \}t_k\\ \\ \}n_k-h_k-t_k\equiv m_{k+1}\end{matrix}\qquad. \qquad (2.3.2)$$

Процесс построения пучков $\{D_k(\lambda)\}$ $(k=0,1,\ldots,l)$ заканчивается, когда одновременно выполняются $h_l=0$ и $p_l=0$. В результате будет получена следующая информация:

Построен регулярный пучок $D_l(\lambda) = A_l - \lambda B_l$ $(m_l = n_l \neq 0)$, все собственные значения и им соответствующие структурные индексы которого совпадают с конечными, отличными от нуля собственными значениями и структурными индексами исходного пучка. (При $m_l = n_l = 0$ пучок $D(\lambda)$ не имеет ненулевых конечных собственных значений).

Построены последовательности чисел $\{r_k\}, \{p_k\}, \{h_k\}, \{t_k\}$, из которых можно извлечь следующую информацию для исходного пучка: число $\eta_k = m_k - r_k, k = 0, 1, \ldots, l$, левых минимальных индексов, равных k; число $\varepsilon_k = p_k - t_k, k = 0, 1, \ldots, l$, правых минимальных индексов, равных k; число $\sigma = t_{k-1} - p_{k+1}, k = 1, \ldots, l$, элементарных делителей степени k, соответствующих бесконечному собственному значению; число $\sigma_{k0} = (h_{k-1} - h_k) - (p_{k-1} - t_{k-1}), k = 1, \ldots, l$, элементарных делителей, соответствующих нулевому собственному значению.

2.3.3. Алгоритмы, использующие обобщенные разложения.
2.3.3.1. Алгоритм RGSVD [193–196, 137–139] основан на использовании обобщенного сингулярного разложения $\{D_k(\lambda)\}$. Переход от пучка $A_k - \lambda B_k$ размеров $m_k \times n_k$ к пучку $A_{k+1} - \lambda B_{k+1}$ состоит в выполнении следующих операций.

(1) Находится обобщенное сингулярное разложение матрицы $[A_k\ B_k]$:

$$\begin{bmatrix} U_k^T & \\ & V_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ Bk \end{bmatrix} X_k = \begin{bmatrix} & \Sigma_c^{(k)} \\ \mathbb{O} & \\ & \Sigma_s^{(k)} \end{bmatrix}.$$

В результате будут найдены числа r_k, ρ_k, h_k, где r_k – число нулевых столбцов матрицы C_k, являющейся блоком $\Sigma_c^{(k)}$; $\rho_k = \operatorname{rank}[A_k\ \ B_k]^B$, $h_k = \dim N_c(A_k)$, $h_k = (n_k - \rho_k) + r_k$ при $\rho_k \leqslant \min\{m_k, n_k\}$ и $h_k = n_k - m_k + r_k$ при $m_k < \rho_k < n_k$.

(2) Находится пучок

$$V_k^T(A_k - \lambda B_k)X_k = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbb{O} & M_k \\ \mathbb{O} & A_k \end{bmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{\mathbb{O}}}_{h_k} \end{array} \}r_k - \lambda \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbb{O} I_{r_k} & \vdots & \mathbb{O} \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ \mathbb{O} & \vdots & B_k \end{bmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{\mathbb{O}I_{r_k}}}_{h_k} \end{array} \}r_k .$$

Здесь A_k, B_k – матрицы размеров $m_k \times n_k$, $m_k = m_{k-1} - r_k$, $n_k = r_{k-1} - h_k$; B_k – диагональная матрица; M_k – матрица полного столбцового ранга. Процесс аналогично продолжается с пучком

$A_{k+1}-\lambda B_{k+1}$ и заканчивается на некотором шаге l, когда $h_{l-1}=0$, $r_{l-1}=0$, или $r_{l-1}=h_{l-1}=0$. В результате будут построены две последовательности чисел $\{h_k\}$ и $\{r_k\}$, связанных соотношением

$$h_0 \geqslant r_0 \geqslant h_1 \geqslant r_1 \geqslant \dots \geqslant h_{l-1} \geqslant r_{l-1} = h_l = 0.$$

Отсюда находим для исходного пучка

$\sigma_{k0}=r_k-h_{k+1}$, $k=0,1,\dots,l-1$, число элементарных делителей λ^k;

$\varepsilon_k = h_k - r_k$, $k=0,1,\dots,l-1$, число правых минимальных индексов, равных k.

2.3.3.2. Алгоритм RGQZD [194–196] основан на использовании обобщенного QZ – разложения. Переход от пучка $A_k-\lambda B_k$ к пучку $A_{k+1}-\lambda B_{k+1}$ сводится к выполнению следующих операций.

(1) Находится обобщенное QZ–разложение матрицы $[A_k \;\; B_k]^B$:

$$\begin{bmatrix} U_k^T & \\ & V_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ Bk \end{bmatrix} Q_k = \begin{bmatrix} & R_c^{(k)} \\ \mathbb{O} & \\ & R_s^{(k)} \end{bmatrix}.$$

В результате будут найдены числа r_k, ρ_k и h_k, где r_k – число нулевых столбцов матрицы $R_c^{(k)}$, $\rho_k = \operatorname{rank}[A_k \;\; B_k]^B$, $h_k = \dim N_c(A_k)$, причем $h_k = n_{k-1}-\rho_{k-1}+r_k$ при $\rho_k \leqslant \min\{m_k,n_k\}$, $h_k = n_{k-1}-m_{k-1}+r_k$ при $m_k<\rho_k<n_k$.

(2) Находится пучок

$$V_k^T(A_k-\lambda B_k)Q_k = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\mathbb{O}\\ \mathbb{O}\end{matrix}}_{h_k} & \begin{matrix} M_k \\ A_k \end{matrix} \end{bmatrix} \}r_k - \lambda \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\mathbb{O}\, I_{r_k} \\ \dots\dots \\ \mathbb{O}\end{matrix}}_{h_k} & \begin{matrix}\vdots \\ \vdots \\ \vdots\end{matrix} & \begin{matrix}\mathbb{O} \\ \dots\dots \\ B_k\end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Здесь A_k, B_k – матрицы размеров $m_k \times n_k$, $m_k = m_{k-1}-r_k$, $n_k = n_{k-1}-h_k$; M_k – матрица полного столбцового ранга. Процесс аналогично продолжается с пучком $A_{k+1}-\lambda B_{k+1}$ и заканчивается на некотором шаге l, когда $h_l=0$, $r_l=0$, или $r_{l-1}=h_{l+1}=0$. В результате будут построены две последовательности чисел $\{h_k\}$ и $\{r_k\}$, связанных соотношениями

$$h_0 \geqslant r_0 \geqslant h_1 \geqslant r_1 \geqslant \dots \geqslant h_{l-1} \geqslant r_{l-1} = h_l = 0.$$

Откуда находим для исходного пучка

$\sigma_{k0} = r_k - h_{k+1}$, $k=0,1,\dots,l$, число элементарных делителей λ^k;

$\varepsilon_k = h_k - r_k$, $k = 0, 1, \ldots, l$, число правых минимальных индексов, равных k.

2.3.3.3. Алгоритм RGND основан на использовании обобщенного нормализованного разложения. Переход от пучка $A_k - \lambda B_k$ размеров $m_k \times n_k$ к пучку $A_{k+1} - \lambda B_{k+1}$ состоит в выполнении следующих операций.

(1) Находится обобщенное нормализованное разложение матрицы $[A_k \ B_k]$:

$$\begin{bmatrix} A_k & B_k \end{bmatrix} = L_k W_k \begin{bmatrix} \Sigma_c^{(k)} & \Sigma_s^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^T & \\ & V_k^T \end{bmatrix},$$

или в другой записи

$$W_k^T L_k^+ \begin{bmatrix} A_k & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & \\ & V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_c^{(k)} & \Sigma_s^{(k)} \end{bmatrix}.$$

В результате будут найдены числа ρ_k, r_k, h_k, где $\rho_k = \operatorname{rank}[A_k \ B_k]$, r_k – число нулевых столбцов матрицы C_k, являющейся блоком $\Sigma_c^{(k)}$, и $h_k = \dim N_c(A_k)$, причем $h_k = m_{k-1} - \rho_{k-1} + r_k$ при $\rho_{k-1} \leqslant \min\{m_{k-1}, n_{k-1}\}$ и $h_k = m_{k-1} - n_{k-1} + r_k$ при $\rho_{k-1} > n_{k-1}$.

(2) Находится пучок

$$W_k^T L_k^+ (A_k - \lambda B_k) V_k = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \underbrace{M_k}_{h_k} & A_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r_k \\ \end{matrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_{r_k} \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{O} \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ \underbrace{\mathbb{O}}_{h_k} & \vdots & B_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r_k \\ \\ \end{matrix}.$$

Здесь A_k, B_k – матрицы размеров $m_k \times n_k$, $m_k = m_{k-1} - r_k$, $n_k = n_{k-1} - h_k$; M_k – матрица полного строчного ранга; B_k – диагональная матрица.

Процесс аналогично продолжается с пучком $A_{k+1} - \lambda B_{k+1}$ и заканчивается на некотором шаге l, когда $h_{l-1} = 0$, $r_{l-1} = 0$, или $r_{l-1} = h_l = 0$. В результате будут построены две последовательности чисел $\{h_k\}$ и $\{r_k\}$, связанных соотношениями

$$h_0 \geqslant r_0 \geqslant h_1 \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant h_{l-1} \geqslant r_{l-1} = h_l = 0.$$

Откуда находим для исходного пучка

$\sigma_{k0} = r_k - h_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, l$, число элементарных делителей λ^k;

$\eta_k = h_k - r_k$, $k = 0, 1, \ldots, l$, число левых минимальных индексов, равных k.

§2.4. Алгоритм выделения регулярного блока

Задача вычисления регулярного блока сингулярного пучка является вспомогательной для вычисления спектральных характеристик. Предварительное решение этой задачи необходимо при вычислении собственных значений и им соответствующих жордановых цепочек сингулярного пучка, так как позволяет избежать неопределенность при их вычислении.

Все алгоритмы анализа кронекеровской канонической формы пучка, рассмотренные в §2.3, позволяют находить и регулярный блок или сводят задачу выделения регулярного блока к той же задаче для линейного пучка полного ранга. Здесь мы рассматриваем алгоритмы выделения регулярного блока, построенные на других идеях.

2.4.1. Алгоритм для пучка полного ранга.

Пусть $A-\lambda B$ – пучок размеров $m\times n$, имеющий для определенности полный столбцовый ранг $(m>n)$. Выделение регулярного блока (или установление его отсутствия) осуществляется следующим образом.

Строится конечная последовательность пучков $\{A_k-\lambda B_k\}$, $k=0,1,\dots,l$, размеры $m_k\times n_k$ которых убывают ($A_0=A$, $B_0=B$, $m_0=m$, $n_0=n$), при этом каждый последующий пучок является согласованным с предыдущим. Так переход от $A_{k-1}-\lambda B_{k-1}$ размеров $m_{k-1}\times n_{k-1}$ к пучку $A_k-\lambda B_k$ выполняется следующим образом. Для матрицы $\mathfrak{A}_k=[A_{k-1},B_{k-1}]$ вычисляется (например, с помощью ΔW-0 разложения) правое нуль-пространство $Q_k=N_c(\mathfrak{A}_k)$, тогда блочное представление Q_k в виде

$$Q_k=\begin{bmatrix}-B_k\\ A_k\end{bmatrix}$$

дает очередной пучок $A_k-\lambda B_k$ размеров $m_k\times n_k$, где $m_k=n_{k-1}$, $n_k=\dim Q_k=2n_{k-1}-r_k$, $r_k=\operatorname{rank}\mathfrak{A}_k$. Имеем

$$m_0>n_0=m_1\geqslant n_1=m_2\geqslant n_2=\dots\geqslant n_l=m_{l+1}\geqslant n_{l+1},$$

так как $r_k\geqslant n_{k-1}$.

Процесс заканчивается на шаге l, когда $n_{l+1}=n_l$, или $n_{l+1}=0$. В первом случае пучок $A_{l+1}-\lambda B_{l+1}$ является искомым регулярным блоком пучка $A-\lambda B$. Второй случай означает, что исходный пучок не имеет регулярного блока.

2.4.2. Алгоритм для сингулярного пучка общего вида.

Пусть $A - \lambda B$ сингулярный $m \times n$ пучок ранга $\rho < \min(m, n)$.

Алгоритм выделения регулярного блока состоит из двух частей. Сначала $A - \lambda B$ преобразуется в пучок $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ размеров $m \times \rho$ полного столбцового ранга. Затем, используя алгоритм п. 2.4.1, из $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ выделяется регулярный блок, спектр которого совпадает с конечным спектром исходного пучка.

Введем следующие блочные представления $u \times v$ матрицы F

$$F = F_{uv} = \left[F_{uq}, F_{u,v-q}\right]$$

блочное разбиение по столбцам;

$$F_{uv} = \begin{bmatrix} F_{q,v} \\ F_{(u-q),v} \end{bmatrix}$$

блочное разбиение по строкам;

$$F_{uv} = \begin{bmatrix} F_{q,p} & \vdots & F_{q(v-p)} \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ F_{(u-q),p} & \vdots & F_{(u-q)(v-p)} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм преобразования исходного пучка $A - \lambda B$ в пучок полного столбцового ранга $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ состоит в построении конечной последовательности пучков $D_k(\lambda) = \lambda C_1^k + C_0^k$, $k = 0, 1, \ldots, l$ по следующему предписанию

$$\begin{aligned} &D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda) W_k(\lambda), && k = 0, \ldots, l-1 \\ &D_0(\lambda) = \lambda C_1^0 + C_0^0 && \bigl(C_1^0 = B_{mn} \equiv -B, \quad C_0^0 = A_{mn} \equiv A\bigr), \end{aligned}$$

$D_l(\lambda) = \widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ – искомый $m \times \rho$ пучок полного столбцового ранга, $W_k(\lambda)$ – унимодулярная матрица.

Типичный (первый) шаг алгоритма состоит в выполнении следующих операций.

(1) По коэффициентам пучка $D_0(\lambda)$ формируется постоянная матрица M. При этом могут возникнуть следующие три ситуации.

i) Среди столбцов матрицы C_1 нет нулевых. В этой ситуации полагаем $n_1 = n$, $M = C_1$ и переходим к выполнению операции (2).

ii) Среди столбцов матрицы C_1 есть нулевые. В этом случае столбцы матриц C_1 и C_0 переставляются так, чтобы*

$$C_1 = \left[\overline{C}_{11}, \mathbb{O}\right], \qquad C_0 = \left[C_{01}, C_{02}\right].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n - t_1)$ матрица; $\overline{C}_{11}$ – матрица $m \times t_1$, не имеющая нулевых столбцов; C_{01} и C_{02} – матрицы соответственно размеров $m \times t_1$ и $m \times (n - t_1)$. Если C_{02} не имеет нулевых столбцов ($C_{02} = \overline{C}_{02}$), полагаем $M = [\overline{C}_{11}, \overline{C}_{02}]$, $n_1 = n$ и переходим к выполнению операции (2).

iii) Среди столбцов C_{02} есть нулевые. С помощью матрицы перестановок столбцы матрицы C_{02} переставляем так, чтобы

$$C_{02} := \left[\overline{C}_{02}, \mathbb{O}\right],$$

$\overline{C}_{02}$ – блок размеров $m \times t_2$, не имеющий нулевых столбцов; $\mathbb{O}$ – нулевой $m \times (n - t_1 - t_2)$ блок.

Полагаем $M_1 = [\overline{C}_{11}, \overline{C}_{02}]$, $n = n_1$ и переходим к выполнению операции (2).

(2) Находится $n_1 \times (n_1 - r_1)$ матрица T, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы M ($r_1 = \mathrm{rank} M$), например, с помощью алгоритма ΔW-0 разложения матрицы M.

(3) Матрица T преобразуется к левой трапецеидальной матрице L размеров $n_1 \times h_1$ ($h_1 \geqslant n_1 - r_1$) с помощью правостороннего умножения T на цепочку матриц плоских вращений или отражений без перестановок строк. При этом если главный минор порядка $n_1 \times h_1$ матрицы T нулевой, то на некотором шаге i перехода от T к L встретится ведущая строка (с номером i) нулевой длины. Эта строка вычеркивается, а соответствующий i-ый столбец заменяется столбцом единичной матрицы $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ так, чтобы диагональный элемент был равен единице. Приведение к левой трапецеидальной матрице продолжается с преобразуемой матрицей меньших размеров (с вычеркнутой строкой). В результате будет построена матрица L, число столбцов h_1 которой не меньше $n_1 - r_1$: столбцы L содержат ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы M и, быть может, столбцы единичной матрицы.

(4) Осуществляется переход к пучку $D_1(\lambda)$. В зависимости от ситуаций, возникающих при формировании матрицы M_1, используются следующие расчетные формулы.

*Здесь и ниже одной и той же буквой обозначаются матрицы до и после перестановки столбцов.

Пусть в результате выполнения операций (1)–(3) алгоритма построен пучок

$$D_0(\lambda) = C_0^0 + \lambda C_1^0,\ C_0^0 = A_{mn_1},\ C_1^0 = B_{mn_1}\ (n_1 \geqslant n_0,\ n_0 = n).$$

В ситуации (i) матрица $W_1(\lambda)$, осуществляющая переход от $D_0(\lambda)$ к $D_1(\lambda)$ имеет вид

$$W_1(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ L_{n,h_1} & \\ & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ L_1 & \\ & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{array}\right].$$

Коэффициенты C_1^1 и C_0^1 пучка $D_1(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$C_1^1 := \left[B_{mh_1}^1, B_{m,n-h_1}\right]; \quad C_0^1 := \left[A_{mh_1}^1, A_{m,n-h_1}^1\right],$$

где

$$B_{mh_1} = C_1^0 L_1, \qquad B_{m,n-h_1} = C_1^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}$$

$$A_{mh_1} = C_0^0 L_1, \qquad A_{m,n-h_1} = C_0^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

Расчетные формулы перехода от $D_0(\lambda)$ к $D_1(\lambda)$ ситуаций (ii) и (iii) рассмотрим одновременно, полагая $n_1 = n$ в ситуации (ii) и $n_1 > n$ в ситуации (iii). Пусть C_1^0 имеет нулевыми $(n_1 - t_1)$ столбцов. Будем различать 2 случая: $t_1 \geqslant h_1$ и $t_1 < h_1$. В случае $t_1 \geqslant h_1$ имеем

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{t_1h_1} \\ L_{(n_1-t_1)h_1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}_1 = \left[\begin{array}{c|c} L_{t_1h_1} & \\ \lambda L_{(n_1-t_1)h_1} & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)h_1} & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{array}\right].$$

Тогда коэффициенты $D_1(\lambda) = D_0(\lambda)\widetilde{W}_1(\lambda)$ и $W_1(\lambda) = W_0\widetilde{W}_1(\lambda) = \omega_0^1 + \lambda\omega_1^1$, $(W_0 = \omega_0 = [\omega_{01}, \omega_{02}])$ вычисляются по формулам

$$C_1^1 := \left[B_{mh_1}^1, B_{m,n_1-h_1}^1\right]; \quad C_0^1 := \left[A_{mh_1}^1, A_{m,n_1-h_1}^1\right],$$

где

$$B_{mh_1}^1 = \left[B_{m_1t_1}^0, A_{m(n_1-t_1)}^0\right] \begin{bmatrix} L_{t_1h_1} \\ L_{(n_1-t_1)h_1} \end{bmatrix},\ A_{mh_1}^1 = A_{mt_1}^0 L_{t_1h_1}$$

$$B_{m(n_1-h_1)}^1 = C_1^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix},\ A_{m(n_1-h_1)} = C_0^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix},$$

$$\omega_1^1 = \left[\omega^1_{n,h_1}, \omega^1_{n,(n-h_1)}\right]; \quad \omega_0^1 = \left[\widehat{\omega}^1_{n,h_1}, \widehat{\omega}^1_{n,n-h_1}\right],$$

где

$$\omega^1_{n,h_1} = \left[\mathbb{O}_{n,t_1}, \omega_{02}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1,h_1} \\ L_{n_1-t_1,h_1} \\ \mathbb{O}_{n-n_1,h_1} \end{bmatrix}, \quad \omega^1_{n,n-h_1} = \mathbb{O}_{n,n-h_1};$$

$$\widehat{\omega}^1_{n,t_1} = \left[\omega_{01}, \mathbb{O}_{n,n-t_1}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1,h_1} \\ L_{n_1-t_1,h_1} \\ \mathbb{O}_{n-n_1,h_1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\omega}^1_{n,n-h_1} = \omega_0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1,n-h_1} \\ I_{n-h_1,n-h_1} \end{bmatrix}.$$

В случае $t_1 < h_1$ имеем

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} & \mathbb{O}_{t_1(h_1-t_1)} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} & L_{(n_1-t_1)(h_1-t_1)} \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{W}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} & \mathbb{O}_{t_1(h_1-t_1)} & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ \lambda L_{(n_1-t_1)t_1} & L_{(n_1-t_1)(h_1-t_1)} & \\ & & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)t_1} & \mathbb{O}_{(n-n_1)(h_1-t_1)} & \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты $D_1(\lambda)$ и $W_1(\lambda) = \lambda\omega_1^1 + \omega_0^1$ вычисляются по следующим формулам.

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \left[B^1_{mt_1}, B^1_{m(h_1-t_1)}, B^1_{m(n_1-h_1)}\right], \\ C_0^1 &= \left[A^1_{mt_1}, A^1_{m,(h_1-t_1)}, A^1_{m(n_1-h_1)}\right], \end{aligned}$$

$$B^1_{mt_1} = \left[B^0_{mt_1}, A^0_{m(n_1-t_1)}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \end{bmatrix}, \; B^1_{m(h_1-t_1)} = \mathbb{O}_{m(h_1-t_1)},$$

$$B^1_{m(n_1-h_1)} = !C_1^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix},$$

$$A^1_{mt_1} = \left[A^0_{m_1t_1}, \mathbb{O}_{m(n_1-t_1)}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \end{bmatrix},$$

$$A^1_{m(h_1-t_1)} = A^0_{m(n_1-t_1)} L_{(n_1-t_1)(h_1-t_1)}, \; A^1_{m(n_1-h_1)} = C_0^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix}.$$

$$\omega_1^1 = \left[\omega^1_{nt_1}, \omega^1_{n(h_1-t_1)}, \omega^1_{n(n-h_1)}\right],$$

$$\omega_0^1 = \left[\widehat{\omega}^1_{nt_1}, \widehat{\omega}^1_{n(h_1-t_1)}, \widehat{\omega}^1_{n(n-h_1)}\right],$$

$$\omega^1_{nt_1} = \left[\mathbb{O}_{nt_1}, \widehat{\omega}^0_{n(n-t_1)}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)t_1} \end{bmatrix},$$

$$\omega^1_{n(h_1-t_1)} = \widehat{\omega}^0_{n(h_1-t_1)} \begin{bmatrix} L_{(h_1-t_1)(h_1-t_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-h_1)(h_1-t_1)} \end{bmatrix},$$

$$\omega^1_{n(n-h_1)} = 0, \quad \widehat{\omega}^1_{nt_1} = \left[\widehat{\omega}^0_{nt_1}, \mathbb{O}_{n(n-t_1)}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)t_1} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\omega}_{n(h_1-t_1)} = \widehat{\omega}^0_{n(h_1-t_1)} \begin{bmatrix} L_{(h_1-t_1)(h_1-t_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-h_1)(h_1-t_1)} \end{bmatrix}, \ \widehat{\omega}^1_{n(n-h_1)} = \omega^0_0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

Операции (1)–(4) алгоритма выполняются до тех пор, пока на некотором шаге $l+1$ матрица M_{l+1} будет иметь полный столбцовый ранг. В этом случае имеем

$$A_l - \lambda B_l = \left[\widehat{A} - \lambda \widehat{B}, \mathbb{O}\right],$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица, $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ – искомый пучок $m \times \rho$ полного столбцового ранга, спектр пучка $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ совпадает с конечным спектром исходного пучка.

Замечание. Рассмотренный выше алгоритм выделения пучка полного столбцового ранга является частным случаем применительно к пучку ΔW-1 алгоритма, описание и обоснование которого для полиномиальной матрицы произвольной степени s будет рассмотрено в главе 3.

§2.5. Вычисление собственных векторов и жордановых цепочек

Ниже рассматриваются два алгоритма для вычисления собственных векторов и жордановых цепочек, соответствующих вычисленному собственному значению пучка

$$D(\lambda) = A - \lambda B \equiv C_1\lambda + C_0, \qquad C_0 = A, \quad C_1 = -B$$

размеров $m \times n$ полного столбцового ранга (в частности, регулярный пучок). Это не умаляет общности, так как любой пучок можно привести к пучку полного столбцового ранга, используя, например, алгоритм, рассмотренный в §2.3, §2.4.

2.5.1. Первый алгоритм основан на алгоритме, рассмотренном в п. 2.2.2, и сводится к его расширению. Если требуется вычислить собственные векторы и жордановы цепочки для ненулевого собственного значения, скажем λ_*, то предварительно в исходном пучке следует сделать замену переменных $\lambda = \lambda' + \lambda_*$, которая позволит перейти к пучку со сдвинутыми спектрами (λ_* перейдет в нулевое собственное значение), сохранив прочие спектральные характеристики.

Следуя алгоритму из п. 2.2.2, параллельно вычислению конечной последовательности пучков

$$\begin{gathered} D_0(\lambda) = D(\lambda),\ D_1(\lambda), \dots, D_l(\lambda) \\ D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda) W^k \operatorname{diag}\left\{ I_{r_{k+1}}, \lambda^{-1} I_{n-r_{k+1}} \right\} \end{gathered} \tag{2.5.1}$$

будем вычислять линейно-независимые между собой собственные векторы и жордановы цепочки, соответствующие нулевому собственному значению. Рассмотрим типичный шаг перехода от пучка $D_k(\lambda) = C_0^k + \lambda C_1^k$ к пучку $D_{k+1}(\lambda)$, $k = 0, 1, \dots, l-1$. Он состоит в выполнении следующих операций.

(1) Вычисляется ортогональная матрица

$$W^k = \left[W_1^k, W_2^k \right],$$

осуществляющая ΔW-0 разложение матрицы C_0^k, т.е. находится ранговое сечение пространства R^n на образ и ядро, так что $W_1^k = \operatorname{im} D_k^T(0)$, $W_2^k = N_c[D_k(0)]$, W_1^k и W_2^k – матрицы размеров $n \times r_{k+1}$ и $n \times (n - r_{k+1})$, r_{k+1} – ранг матрицы $D_k(0) = C_0^k$, $r_0 = 0$.

(2) Вычисляются коэффициенты пучка $D_{k+1}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} C_0^{k+1} &= \left[C_0^k W_1^k, C_1^k W_2^k \right], \\ C_1^{k+1} &= \left[C_1^k W_1^k, \mathbb{O} \right], \end{aligned}$$

и число $\sigma_{k0} := r_{k+1} - r_k$, т.е. число жордановых цепочек длины k.

Если кроме структурных индексов надо вычислить жордановы цепочки, соответствующие нулевому собственному значению пучка $D(\lambda)$, то следует параллельно построению последовательности $\{D_k(\lambda)\}$ находить две последовательности матриц $\{M^k\}$ и $\{\overline{M}^{k+1}\}$ по следующему предписанию

$$\begin{gathered} \overline{M}^{k+1} = M^k W^k = \left[M^k W_1^k, M^k W_2^k \right] \equiv \left[\ \overline{M}_1^{k+1}, \overline{M}_2^{k+1} \right], \\ M^{k+1} = \begin{bmatrix} \overline{M}_1^{k+1} & \vdots & \mathbb{O}_2^{k+1} \\ & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \vdots & \\ \mathbb{O}_1^{k+1} & \vdots & \overline{M}_2^{k+1} \end{bmatrix} \equiv \left[M_1^{k+1}, M_2^{k+1} \right], \\ k = 0, 1, \dots, l-1, \qquad M^0 = I. \end{gathered} \tag{2.5.2}$$

Здесь $\mathbb{O}_1^{k+1}$ и $\mathbb{O}_2^{k+1}$ – нулевые блоки размеров $n \times r_{k+1}$ и $n \times (n - r_{k+1})$, соответственно; $\overline{M}_1^{k+1}$ и $\overline{M}_2^{k+1}$ – блоки размеров $(k+1)n \times r_{k+1}$ и $(k+1)n \times (n - r_{k+1})$; M_1^{k+1} и M_2^{k+1} – блоки размеров $(k+2)n \times r_{k+1}$ и $(k+2)n \times (n - r_{k+1})$. Запишем построенные матрицы в следующем блочном разбиении

$$W^k = \left[\begin{array}{ccc} \overbrace{T_{11}^k}^{r_{k+1}} & \vdots & T_{12}^k \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ T_{21}^k & \vdots & T_{22}^k \end{array}\right]\begin{array}{l}\}r_k\\ \\ \\ \end{array} = \left[W_1^k, W_2^k\right],$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_1^{k+1} &= \left[P_0^{k+1}, P_1^{k+1}, \ldots, P_k^{k+1}\right]^B, \\ \overline{M}_2^{k+1} &= \left[Z_{k+1}^{k+1}, Z_k^{k+1}, \ldots, Z_1^{k+1}\right]^B. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Здесь T_{22}^k – блок размеров $(n - r_k) \times (n - r_{k+1})$; P_i^{k+1} и Z_i^{k+1} – блоки размеров $n \times r_{k+1}$ и $n \times (n - r_{k+1})$, соответственно.

(3) Из блочных столбцов матрицы $\overline{M}_2^k$ образуются жордановы цепочки длины k. Для этого надо выполнить следующие шаги.

($3i$) Найти $(n - r_k) \times (r_{k+1} - r_k)$ матрицу Y_k, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства матрицы $(T_{22}^k)^T$.

($3ii$) Образовать искомые цепочки векторов $X_1^k, X_2^k, \ldots, X_k^k$ $(k = 1, \ldots, l-1)$ длины k:

$$\begin{aligned} X_i^k &= Z_i^k Y_k, \quad i = 1, \ldots, k, \quad k = 1, \ldots, l-2, \\ X_i^{l-1} &= Z_i^{l-1}, \quad i = 1, \ldots, l-1. \end{aligned}$$

Столбцы

$$x_{1j}^k, x_{2j}^k, \ldots, x_{kj}^k, \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma_{k0} = r_{k+1} - r_k$$

так построенных блочных векторов образуют искомые жордановы цепочки пучка $D(\lambda)$, соответствующие его нулевому собственному значению.

Выполнение операций (1)–(3) заканчивается на шаге $k = l$, когда $r_l = n$, т.е. когда будет построен пучок $D_l(\lambda)$, у которого коэффициент $C_0^l \equiv D_l(0)$ имеет полный столбцовый ранг.

2.5.2. Обоснование первого алгоритма. Предварительно докажем лемму.

Лемма 2.2. *Пусть блочные матрицы*

$$A := [\underbrace{A_1}_{\rho}, A_2], \qquad X := \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \}\rho,$$

где A_1 *и* X *имеют полный столбцовый ранг, удовлетворяют равенству*

$$AX = 0.$$

Тогда матрица X_2 *также имеет полный столбцовый ранг.*

Доказательство от противного. Пусть X_2 имеет нетривиальное правое нуль-пространство, так что существует матрица S полного столбцового ранга, что $X_2 S = 0$. Отсюда $XS = \begin{bmatrix} X_1 S \\ 0 \end{bmatrix}$, где XS и $X_1 S$ имеют полный столбцовый ранг. Равенство $AX = 0$ умножим справа на S:

$$AXS = [A_1, A_2] \begin{bmatrix} X_1 S \\ 0 \end{bmatrix} = A_1 X_1 S = 0,$$

что невозможно, так как A_1 и X_1 не имеют нетривиального правого нуль-пространства. Противоречие доказывает справедливость леммы. •

Перейдем к обоснованию алгоритма, т.е. покажем, что $x^k_{1j}, \dots, x^k_{kj}$ $(j = 1, \dots, \sigma_{k0})$ суть искомые жордановы цепочки. Для этого установим, что матрицы $X^k_1, \dots, X^k_k$ удовлетворяют системе уравнений, связывающей векторы жордановых цепочек длины k, соответствующих нулевому собственному значению пучка $D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1$ (см. равенства (1.1.4))

$$\begin{aligned} &C_0 X^k_1 = 0 \\ &C_0 X^k_2 + C_1 X^k_1 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_0 X^k_k + C_1 X^k_{k-1} = 0. \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

В системах (2.5.4) не выписаны последние несовместные уравнения, так как длина цепочки $X^k_1, \dots, X^k_k$ известна заранее (определена в первой части алгоритма вычисления структурных индексов).

Для доказательства выполнения (2.5.4) предварительно установим справедливость следующих а)–г) соотношений, используя блочные представления матриц $\overline{M}^{k+1}$, M^k и W^k.

а) Связь между блочными компонентами матриц $\overline{M}^{k+1}$ и M^k. Для этого равенство

$$\overline{M}^{k+1} = M^k W^k$$

запишем в развернутом виде, подставив (2.5.3) в (2.5.2). Имеем

$$\begin{bmatrix} P_0^{k+1} & \vdots & Z_{k+1}^{k+1} \\ P_1^{k+1} & \vdots & Z_k^{k+1} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ P_k^{k+1} & \vdots & Z_1^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^k T_{11}^k & \vdots P_0^k T_{12}^k \\ P_1^k T_{11}^k + Z_k^k T_{21}^k & \vdots P_1^k T_{12}^k + Z_k^k T_{22}^k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_1^k T_{21}^k & \vdots \quad Z_1^k T_{22}^k \end{bmatrix}. \qquad (2.5.5)$$

Далее из (2.5.1) получим связи между коэффициентами пучков $D_{k+1}(\lambda)$ и $D_k(\lambda)$:

$$\begin{aligned} C_0^{k+1} &= \left[C_0^k W_1^k, C_1^k W_2^k\right], \\ C_1^{k+1} &= \left[C_1^k W_1^k, \mathbb{O}\right], \end{aligned} \qquad (2.5.6)$$

так как по построению $C_{12}^{k+1} = 0$.

б) Связь между коэффициентами пучков $D_k(\lambda)$ и $D(\lambda)$. Принимая во внимание равенства (2.5.2)–(2.5.6), имеем

$$\begin{aligned} C_0^k &= \left[C_0 P_0^k + C_1 P_1^k, C_1 Z_k^k\right], \\ C_1^k &= \left[C_1 P_0^k, \mathbb{O}\right]. \end{aligned} \qquad (2.5.7)$$

Доказательство справедливости равенств (2.5.7) проводится по индукции.

в) Матрица T_{22}^k, входящая как $(n - r_k) \times (n - r_{k+1})$ матричный блок в матрицу W^k, реализующую переход от $D_k(\lambda)$ к $D_{k+1}(\lambda)$, имеет полный столбцовый ранг.

Действительно, по построению с учетом (2.5.5) имеем

$$C_0^k W_2^k = \left[C_0^{k-1} W_1^{k-1}, C_1^{k-1} W_2^{k-1}\right] \begin{bmatrix} T_{12}^k \\ T_{22}^k \end{bmatrix} = 0,$$

где матрицы $C_0^{k-1} W_1^{k-1}$ и W_2^k имеют полный столбцовый ранг. Тогда по лемме 2.2 матрица T_{22}^k имеет также полный столбцовый ранг.

г) Справедливы следующие равенства

$$C_0 X_{i+1}^{i+1} + C_1 X_i^{i+1} = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1. \qquad (2.5.8)$$

Действительно, по построению $C_0^i W_2^i = 0$. Отсюда принимая во внимание (2.5.5)–(2.5.7), имеем

$$C_0 W_2^i = C_0 P_0^i T_{12}^i + C_1 \big(P_1^i T_{12}^i + Z_i^i T_{22}^i\big) = C_0 Z_{i+1}^{i+1} + C_1 Z_i^{i+1} = 0.$$

Умножим это равенство справа на матрицу Y_{i+1}, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства матрицы $(T_{22}^{i+1})^T$.

Учитывая, что $X_j^{i+1} = Z_j^{i+1} Y_{i+1}$, $j = 1, \dots, i+1$, имеем

$$C_0 W_2^i = C_0 Z_{i+1}^{i+1} + C_1 Z_i^{i+1}$$

или

$$C_0 X_{i+1}^{i+1} + C_1 X_i^{i+1} = 0, \qquad i = 0, \dots, l-1,$$

что доказывает справедливость г).

Рекуррентные соотношения, полученные в пунктах а)–г), используем для доказательства справедливости равенств (2.5.4).

Доказательство проводим по индукции. Из (2.5.8) имеем

$$C_0 Z_1^1 = C_0 X_1^1 = 0,$$

так что X_1^1 удовлетворяет (2.5.4) при $k = 1$.

Пусть все цепочки матриц вида

$$\begin{matrix} X_1^2 & X_1^3 & \dots & X_1^i \\ X_2^2 & X_2^3 & \dots & X_2^i \\ & X_3^3 & \dots & X_3^i \\ & & & \vdots \\ & & & X_i^i \end{matrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{matrix} Z_1^2 & Z_1^3 & \dots & Z_1^i \\ Z_2^2 & Z_2^3 & \dots & Z_2^i \\ & Z_3^3 & \dots & Z_3^i \\ & & & \vdots \\ & & & Z_i^i \end{matrix}$$

удовлетворяют (2.5.4) при $k \leqslant i$. Докажем, что при $k = i+1$ цепочки матриц $X_1^{i+1}, \dots, X_{i+1}^{i+1}$ удовлетворяют (2.5.4).

Для этого запишем каждое матричное уравнение системы с учетом равенств (2.5.5)–(2.5.8) и индукционного предположения. Имеем

$$\begin{aligned}
&C_0 X_1^{i+1} = C_0 Z_1^i T_{22}^i Y_{i+1} = 0 \\
&C_0 X_2^{i+1} + C_1 X_1^{i+1} = \big[C_0 Z_2^{i+1} + C_1 Z_1^{i+1}\big] Y_{i+1} = \\
&\big[C_0 Z_1^{i-1} T_{21}^{i-1} T_{12}^i + \big(C_0 Z_2^i + C_1 Z_1^i\big) T_{22}^i\big] Y_{i+1} = 0 \\
&\qquad \dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots \\
&C_0 X_i^{i+1} + C_1 X_{i-1}^{i+1} = \\
&= \big[\big(C_0 Z_i^{i+1} + C_1 Z_{i-1}^{i+1}\big) T_{22}^i + \big(C_0 Z_{i-1}^i + C_1 Z_{i-2}^{i-1}\big) T_{21}^i T_{12}^i + \dots + \\
&+ \big(C_0 Z_2^2 + C_1 Z_1^2\big) T_{21}^2 T_{11}^3 \dots T_{11}^{i-1} T_{12}^i + C_0 Z_1^1 T_{21}^1 T_{11}^2 \dots T_{11}^{i-1} T_{12}^i\big] Y_{i+1} = 0.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение системы совпадает с равенством (2.5.8).

Таким образом, установлено, что матрицы $X_1^k, \dots, X_k^k$ (матрицы $Z_1^k, \dots, Z_k^k$), а следовательно, и их одноименные столбцы, удовлетворяют системам уравнений для жордановых цепочек длины k. Столбцы матриц X_1^i, $i = 1, \dots, l-1$, суть собственные векторы пучка $D(\lambda)$, соответствующие его нулевому собственному значению.

Процесс заканчивается на шаге l, когда матрица A_{l+1} будет иметь полный столбцовый ранг. Максимальная длина строящихся жордановых цепочек равна l.

2.5.3. Второй алгоритм вычисления жордановых цепочек построен на решении матричных уравнений. Пусть требуется вычислить жордановы цепочки, соответствующие конечному собственному значению λ_* регулярного $n \times n$ пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$. По определению линейно независимые векторы $x_1^k, \dots, x_k^k$ образуют жорданову цепочку длины "k" пучка $D(\lambda)$ на собственном значении λ_*, если выполняются следующие соотношения

$$D(\lambda_*)x_1^k = 0 \qquad D(\lambda_*)x_i^k = Bx_{i-1}^k \qquad i = 2, \dots, k. \tag{2.5.9}$$

Тогда как система

$$D(\lambda_*)u = Bx_k^k$$

несовместна. Введем в рассмотрение блочный вектор $Z_q = (x_1^k, \dots, x_q^k)^B$ и блочную порядка nq матрицу

$$\mathfrak{A}_q = \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_{q-1} & & \vdots & \mathbb{O} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & & \dots\dots \\ \mathbb{O} & -B & \vdots & D(\lambda_*) \end{bmatrix} \qquad q = 1, \dots, k,$$

$\mathfrak{A}_0 = D(\lambda_*)$. Тогда соотношения (2.5.9) можно записать одним матричным уравнением

$$\mathfrak{A}_q Z_q = 0 \qquad q = 1, \dots, k. \tag{2.5.10}$$

В силу (2.5.10) построение векторов, удовлетворяющих системе (2.6.1), сведено к формированию последовательности матриц $\{\mathfrak{A}_q\}$ и вычислению им соответствующих нуль-пространств $Q_q \quad (q = 0, 1, \dots, k)$.

Пусть $Q_q = [X_1^k, \dots, X_{q+1}^k]^B$ – блочная запись Q_q. Здесь каждый блок X_i^k имеет размеры $n \times d_q$, где $d_q = \dim Q_q$.

Вычисление жордановых цепочек пучка $D(\lambda)$, соответствующих собственному значению λ_*, начнем с цепочек длины единица.

По построению столбцы матрицы Q_0 образуют базис из собственных векторов $D(\lambda)$, соответствующих λ_*, так что столбцы $Q_0 := X_1^0$ порождают жордановы цепочки длины не меньше единицы.

Для построения цепочек длины единица следует найти матрицу* $T_0 := X_1^0 \setminus X_1^1$, столбцы которой образуют ортогональное дополнение подпространства X_1^1 до подпространства X_1^0. При этом если T_1 пусто, то искомых жордановых цепочек длины единица пучок $D(\lambda)$ не имеет.

Для построения жордановых цепочек длины $k+1$ ($k = 1, \dots, l-1$, l – максимальная длина) следует выполнить следующие операции.

(1) Найти линейно независимые собственные векторы, порождающие цепочки длины $k+1$. Это будут столбцы матрицы

$$T_k := X_1^k \setminus X_1^{k+1} \qquad (k = 0, \dots, l-1)$$
$$T_l := \operatorname{im} X_1^{(l)}.$$

(2) Образовать матрицу

$$\widehat{Q}_k = Q_k Y_k = \left[\widehat{X}_1^{(k)}, \dots, \widehat{X}_{k+1}^{(k)}\right]^B \qquad \widehat{X}_i^k = X_i^k Y_k \quad (i = 1, \dots, k+1).$$

Здесь Y_k – решение совместной системы

$$X_1^k Y_k = T_k \qquad k = 1, \dots, l.$$

(3) Среди векторов $\widehat{X}_k^k$ отобрать те, которые не могут входить в цепочки длины $k+1$. Это будут столбцы матрицы

$$\widehat{T}_k = \widehat{X}_k^k \setminus \widehat{X}_k^{k+1} \qquad (k = 1, \dots, l-1)$$
$$\widehat{T}_l = \operatorname{im} \widehat{X}_l^l.$$

(4) Образовать матрицу

$$P_k = \widehat{Q}_k V_k,$$

где V_k – матричное решение совместной системы

$$\widehat{X}_k^k V_k = \widehat{T}_k.$$

Пусть

$$P_k = \left[U_1^k, \dots, U_{k+1}^k\right]^B$$

---

*Вычисление ортогонального дополнения одного подпространства до другого можно осуществить с помощью ΔW-0 алгоритма (см. п. 1.5.4) блочная запись P_k. Тогда каждый i-ый столбец P_i^k матрицы P_k

$$P_i^k := \left(u_{1i}^{k+1}, \dots, u_{k+1,i}^{k+1}\right)^B$$

даст жорданову цепочку $u_{1i}^{k+1}, \dots, u_{k+1,i}^{k+1}$ длины $k+1$. Если множество T_k пусто, то пучок $D(\lambda)$ не имеет искомых жордановых цепочек длины $k+1$.

Процесс построения матриц $\mathfrak{A}_k$ и их нуль-пространств Q_k заканчивается, когда при некотором $k = l$ число нулевых столбцов матрицы X_l^l равно $\rho_l = \dim Q_l$.

§2.6. Построение минимального базиса полиномиальных решений пучка

2.6.1. Вычисление полиномиальных решений.

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ сингулярный $m \times n$ пучок, подпространство из правых полиномиальных решений которого есть непустое множество.

Предлагаемый ниже алгоритм построения минимального базиса правых полиномиальных решений состоит из вычисления полиномиальных решений в порядке возрастания индексов и перестройки их в минимальный базис. По определению коэффициенты $x_0, \dots, x_k$ векторного полинома $x_0 + \lambda x_1 + \dots + \lambda^k x_k \equiv p_k(\lambda)$, являющегося правым полиномиальным решением $D(\lambda)$ степени k, удовлетворяют соотношениям

$$Ax_0 = 0 \qquad Ax_i = Bx_{i-1} \qquad i = 1, \dots, k \qquad Bx_k = 0. \tag{2.6.1}$$

Введем в рассмотрение блочный вектор

$$X_i = \left(x_0, x_1, \dots, x_i\right)^T$$

и блочную матрицу

$$\mathfrak{A}_i = \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_{i-1} & \vdots & \begin{matrix} \mathbb{O} \\ A \end{matrix} \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \mathbb{O} & \vdots & -B \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \dots, k),$$

$\mathfrak{A}_0 = \begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix}$. Тогда равенства (2.6.1) можно записать в виде

$$\mathfrak{A}_k X_k = 0, \tag{2.6.2}$$

так что X_k принадлежит правому нуль-пространству Q_k матрицы $\mathfrak{A}_k$.

Справедливо и обратное утверждение. Если $X_k \in Q_k$, то его блочные компоненты $x_0, \dots, x_k$, где $\left(x_0, \dots, x_k\right)^T \equiv X_k$, порождают правое полиномиальное решение $p_k(\lambda)$ пучка $D(\lambda)$.

Алгоритм вычисления полиномиальных решений $D(\lambda)$ состоит в построении конечной последовательности матриц $\{\mathfrak{A}_k\}$ и последовательности ортонормированных базисов Q_k их правых нуль-пространств ($k = 0, 1, \dots, q$ q – максимальный минимальный индекс правых полиномиальных решений).

Каждую из матриц Q_k размеров $(k+1)n \times \rho_k$, $\rho_k = \dim Q_k$ представим в блочном виде

$$Q_k = \left[X_0^k, \dots, X_k^k\right]^B.$$

Из сказанного выше следует, что Q_k порождает блочное полиномиальное решение

$$P_k(\lambda) = X_0^k + \lambda X_1^k + \dots + \lambda^k X_k^k,$$

каждый столбец которого является правым полиномиальным решением пучка $D(\lambda)$. Но построенные полиномиальные решения не являются линейно независимыми над кольцом скалярных полиномов. Так, легко проверить справедливость следующих включений

$$Q_k \supseteq \left\{ \begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ Q_{k-1} \end{bmatrix} \right\}, \qquad k = 1, \dots, q \tag{2.6.3}$$

или включений

$$X_i^k \supseteq X_i^{k-1} \cup X_{i-1}^{k-1}, \qquad k = 1, \dots, q \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

2.6.2. Алгоритмы вычисления минимального базиса.

Параллельно вычислению полиномиальных решений в порядке возрастания их индексов будем строить минимальный базис из них и определять число q. Рассмотрим два алгоритма.

2.6.2.1. Первый алгоритм основан на использовании следующих свойств.

1^0 *Размерность N правого нуль-пространства из полиномиальных решений пучка $D(\lambda)$ совпадает с размерностью правого нуль-пространства постоянной матрицы $D(\lambda_*)$, где λ_* – любое число, не совпадающее с собственным значением $D(\lambda)$.* Вычисление N можно реализовать с помощью ΔW-0 разложения матрицы $D(\lambda_*)$.

2^0 *Для того, чтобы векторные полиномы* $x_1(\lambda), \dots, x_t(\lambda)$ *были линейно независимыми, достаточно, чтобы матрица* $S(\lambda) := [x_1(\lambda)\dots x_t(\lambda)]$, *столбцами которой они являются, порождала матрицу* $S(\lambda_*)$ *полного столбцового ранга, по крайней мере, при одном фиксированном* $\lambda = \lambda_*$.

3^0 *Для того, чтобы полиномиальный вектор* $x(\lambda)$ *был линейно независим от векторов* $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_t(\lambda)$ *достаточно, чтобы система линейных алгебраических уравнений*

$$S(\lambda_*)u = x(\lambda_*), \qquad S(\lambda) = \big[x_1(\lambda)\dots x_t(\lambda)\big],$$

была несовместна, по крайней мере, для одного фиксированного $\lambda = \lambda_*$.

Перейдем к описанию алгоритма. Пусть $P_{\varepsilon_1}(\lambda)$ есть блочное решение наименьшей степени $\varepsilon_1 \geqslant 0$ пучка. Если $\varepsilon_1 = 0$, то $P_{\varepsilon_1} \equiv Q_0$ имеет по построению все столбцы (которые суть полиномиальные решения нулевой степени) ортогональными, а следовательно, и линейно независимыми в поле чисел. Если $\varepsilon_1 > 0$, то надо из блока $P_{\varepsilon_1}(\lambda)$ образовать блок $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda)$ линейно независимых решений степени ε_1.

Построение $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda)$ осуществляется согласно свойства 2^0. Именно, $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda) = P_{\varepsilon_1}(\lambda)W_q$, где W_q есть матрица из ортогональных столбцов в разложении ΔW-0, построенном для матрицы $S(\lambda_*) = P_{\varepsilon_1}(\lambda_*)$. (Столбцы W_1 образуют ортонормированный базис $\operatorname{im} S^T(\lambda_*)$). Тогда столбцы $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_{n_1}(\lambda)$ пучка $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda)$ образуют первые n_1 решений наименьшей степени $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n_1}$ строящегося минимального базиса. Если $n_1 < N$, то пополнение текущего полиномиального решения идет за счет столбцов следующего блочного решения $P_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$ степени $\varepsilon_1 + 1$.

Вначале по блоку $P_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$, как и выше, строится блок $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$ линейно независимых между собой решений степени $\varepsilon_1 + 1$. Далее рассматривается система

$$\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda_*)u = \widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda_*) \tag{2.6.4}$$

линейно алгебраических уравнений с матрицами $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda_*) = [x_1(\lambda_*) \dots x_{n_1}(\lambda_*)]$ и со многими правыми частями, которые суть столбцы матрицы $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda_*)$. Столбцы $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$, соответствующие столбцам матрицы $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda_*)$, дающим несовместную систему (2.6.4), пополнят строящийся минимальный базис. Если система (2.6.4) совместна для всех правых частей, то текущий минимальный базис остается таким же, какой был получен на предыдущем (первом) шаге. Это означает, что пучок $A - \lambda B$ не содержит правых полиномиальных решений степени ε_1+1, линейно независимых от построенных решений минимального базиса. В результате второго шага искомый минимальный базис или останется прежним, или пополнится новыми решениями. Если число векторов построенного базиса меньше N, то процесс его пополнения продолжается аналогичным образом, т.е. строится новое блочное решение $P_{\varepsilon_1+2}(\lambda)$, по нему находится блок $\widehat{P}_{\varepsilon_1+2}(\lambda)$ линейно независимых между собой решений степени ε_1+2 и из $\widehat{P}_{\varepsilon_1+2}(\lambda)$ выбираются те столбцы для пополнения минимального базиса, которые линейно не зависят от всех построенных решений текущего минимального базиса. Процесс пополнения минимального базиса заканчивается, когда число векторов его равно N.

2.6.2.2. Второй алгоритм перестройки вычисленных полиномиальных решений пучка в минимальный базис основан на свойствах блочных решений, вытекающих из включений (2.6.2), (2.6.1). Справедливы следующие соотношения

$$P_i(\lambda) \subseteq P_{i-1}(\lambda)F_{i-1} + \lambda P_{i-1}(\lambda)G_{i-1}, \qquad i = 1, \dots, k, \qquad (2.6.5)$$

где F_{i-1}, G_{i-1} суть блочные векторы с постоянными компонентами, размеры которых соответствуют размерам блоков, являющихся коэффициентами в блочном решении $P_{i-1}(\lambda)$.

Введем в рассмотрение два подпространства векторов:

$$X_i = \left[X_{0i}^{(i)}, X_{1i}^{(i)}, \dots, X_{ii}^{(i)}\right]^B, \qquad Y_i = \left[X_{i-1}, \mathbb{O}\right]^B \cup \left[\mathbb{O}, X_{i-1}\right]^B.$$

Здесь $\mathbb{O}$ – блок из нулевых столбцов, имеющий такие же размеры, что и любой блок, входящий в $P_{i-1}(\lambda)$. В силу соотношений (2.6.5) имеет место включение

$$X_i \supseteq Y_i, \qquad i = k, \dots, 2.$$

Для построения полиномиальных решений степени k пучка $A - \lambda B$, которые образовывали бы с полиномиальными решениями меньших степеней совокупность полиномиальных векторов линейно независимых над кольцом скалярных полиномов, следует найти ортогональное дополнение $Z_k = X_k \backslash Y_k$ подпространства Y_k до подпространства X_k. Это можно реализовать, например, с помощью ΔW-0 разложения.

Пусть Z_k найдено, представим его в блочном виде

$$Z_k = \left[Z_{0k}^{(k)}, Z_{1k}^{(k)}, \dots, Z_{kk}^{(k)}, \right]^B,$$

где $Z_{ik}^{(k)}$ – матрица размеров $n \times \rho_k$, $\rho_k = \dim Z_k$. Тогда столбцы пучка

$$Z_k(\lambda) = Z_{0k}^{(k)} + \lambda Z_{1k}^{(k)} + \cdots + \lambda^k Z_{kk}^{(k)}$$

дадут искомые полиномиальные решения степени k.

Заметим, что построение указанных полиномиальных решений можно осуществить иначе. Из (2.6.2) и (2.6.5) следует, что вычисление Z_k можно заменить вычислением ортогонального дополнения V_{tk} подпространства $\{X_{t,k-1}^{(k-1)} \cup X_{t-1,k-1}^{(k-1)}\}$ до подпространства $X_{tk}^{(k)}$ при любом фиксированном t. После того, как V_{tk} найдено, следует решить совместную систему

$$X_{tk}^{(k)} M_k = V_{tk}$$

и образовать пучок

$$\widehat{Z}_k(\lambda) := P_k(\lambda) M_k,$$

столбцы которого дадут искомые полиномиальные решения степени k.

2.6.3. Другие алгоритмы вычисления спектральных характеристик сингулярного пучка. Все методы вычисления скалярных спектральных характеристик, рассмотренные выше для регулярного и сингулярного пучков, могут быть использованы для построения жордановых цепочек и полиномиальных решений. Во всех этих методах в результате строго эквивалентных преобразований мы приходим к пучку в обобщенной форме Шура. Остановимся подробней на алгоритме RGSVD [196]. Покажем, как связан исходный пучок с пучками, полученными в результате проведения алгоритма. Введем обозначения:

$$\widehat{r}_k = \sum_{i=1}^{k} r_i, \qquad \widehat{h}_k = \sum_{i=1}^{k} h_i,$$

$$\widehat{V}_k = \text{block diag}\left\{I_{m-\widehat{r}_{k-1}}, V_k\right\}, \qquad \widehat{X}_k = \text{block diag}\left\{I_{m-\widehat{h}_{k-1}}, X_k\right\},$$

$$\widehat{V}_1 = V_1, \qquad \widehat{X}_1 = X_1, \qquad V = \widehat{V}_1 \widehat{V}_2 \ldots \widehat{V}_l, \qquad X = \widehat{X}_1 \widehat{X}_2 \ldots \widehat{X}_l.$$

Тогда имеем

$$V^H(A - \lambda B)X = \begin{bmatrix} A_{0l} & A_{1l} \\ \mathbb{O} & A_{2l} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} B_{0l} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B_{2l} \end{bmatrix},$$

где

$$A_{0l}-\lambda B_{0l}=$$

$$=\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{O} & \vdots & & & & & M_1 & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & & & & M_2 & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & & & M_3 \\
 & & & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \ddots
\end{array}\right] &
\begin{array}{l} \}r_1 \\ \\ \}r_2 \\ \\ \}r_3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} - \\
\quad\underbrace{\qquad}_{h_1}\qquad\underbrace{\qquad}_{h_2}\qquad\underbrace{\qquad}_{h_3} &
\end{array}$$

$$-\lambda\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{O}\ I_{r_1} & \vdots & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & \mathbb{O}\ I_{r_2} & \vdots & & & & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \mathbb{O}\ I_{r_3} & \vdots & & & \\
 & & & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \ddots
\end{array}\right] &
\begin{array}{l} \}r_1 \\ \\ \}r_2 \\ \\ \}r_3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} . \\
\quad\underbrace{\qquad}_{h_1}\qquad\underbrace{\qquad}_{h_2}\qquad\underbrace{\qquad}_{h_3} &
\end{array}$$

Пучок $A_{2l}-\lambda B_{2l}$ может быть сингулярным, но не имеет полный столбцовый ранг. Его собственные значения и левые минимальные индексы такие же, как и у исходного пучка. Если пучок $A_{2l}-\lambda B_{2l}$ есть сингулярный, то алгоритм RGSVD можно применить к пучку $A_{2l}^T-\lambda B_{2l}^T$. При этом будут найдены все левые минимальные индексы и построен регулярный блок. Для дальнейшего преобразования полученного пучка к пучку в форме Кронекера следует применить элементарные (гауссовские) исключения. Столбцы результирующих матриц правостороннего преобразования исходного пучка к пучку в форме Кронекера дадут искомые левые и правые векторные характеристики (жордановы цепочки и полиномиальные решения) исходного пучка. Подробное описание преобразования см. в работе [196].

§2.7. Исчерпывание

Способы исчерпывания известных спектральных характеристик (сингулярных и регулярных) для полиномиальных матриц произвольной целой степени $s \geqslant 1$, в том числе и пучков матриц, будут рассмотрены в §3.6. Здесь мы рассматриваем исчерпывание только регулярных спектральных характеристик для пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$, учитывающее специфику линейного вхождения в $D(\lambda)$ спектрального параметра λ. Известные способы (способ Хотелинга и способ Виландта) исчерпывания для постоянных матриц обобщаются на случай пучков матриц.

2.7.1. Исчерпывание по способу Хотелинга [210].

Пусть для исходного $m \times n$ пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ известно полное блочное собственное значение $\Lambda \in \mathbb{C}^{l \times l}$ и соответствующие ему правый $X \in \mathbb{C}^{n \times l}$ и левый $Y \in \mathbb{C}^{m \times l}$ блочные собственные векторы, нормированные условием

$$Y^H B X = I. \tag{2.7.1}$$

Исчерпывание по Хотелингу состоит в осуществлении сдвига собственных значений матрицы Λ в точку α комплексной плоскости и решается переходом к пучкам вида:

$$\text{а) } D_1(\lambda) = A_1 - \lambda B, \qquad A_1 := A + BX(\alpha I - \Lambda)Y^H B \quad \text{при } \alpha \neq \infty; \tag{2.7.2}$$

$$\text{б) } D_2(\lambda) = -\lambda B_2 + A, \qquad B_2 := B - BX(I - \alpha^{-1}\Lambda)Y^H B \quad \text{при } \alpha \neq 0. \tag{2.7.3}$$

Теорема 2.3. *Переход от пучка $D(\lambda)$ к пучку (2.7.2) означает сдвиг в точку α той части спектра пучка $D(\lambda)$, которая соответствует собственным значениям матрицы Λ. При этом элементарный делитель $(\lambda - \lambda_*)^t$, принадлежащий сдвигаемой части спектра, заменяется на t линейных элементарных делителей $(\lambda - \alpha)$.*

Если $\det \Lambda \neq 0$, то аналогичные свойства сохраняются и при переходе к пучку (2.7.3). При $\det \Lambda = 0$, нулевая часть спектра заменяется соответствующим числом правых и левых нулевых минимальных индексов. Ненулевые собственные значения, относящиеся к Λ и матрицам X, Y, не изменяются при переходе к пучкам (2.7.2) и (2.7.3).

Доказательство. Сначала покажем, что $\alpha I, X, Y$ являются соответственно блочным собственным значением, правым и левым блочными собственными векторами для пучков (2.7.2) и (2.7.3). Учитывая, что имеют место равенства $AX = BX\Lambda$, $Y^H A = \Lambda Y^H B$ и равенство (2.7.1), получим для пучка (2.7.2):

$$A_1 X = AX + \alpha BX - BX\Lambda = BX(\alpha I),$$
$$Y^H A_1 = Y^H A + \alpha Y^H B - \Lambda Y^H B = \alpha I Y^H B,$$

аналогично для пучка (2.7.3)

$$B_2 X(\alpha I) = \alpha BX - \alpha BX + BX\Lambda = AX,$$
$$(\alpha I) Y^H B_2 = \alpha Y^H B - \alpha Y^H B + \Lambda Y^H B = Y^H A.$$

Далее, пусть $\det \Lambda = 0$, т.е. существуют $l \times k$ – матрицы U и V (k – размерность нуль-пространства матрицы Λ), такие, что $\Lambda U = \mathbb{O}$, $V^H \Lambda = \mathbb{O}$. Тогда столбцы матриц $XU \in \mathbb{C}^{n\times k}$ и $YV \in \mathbb{C}^{m\times k}$ являются правыми и левыми собственными векторами пучка $D(\lambda)$, соответствующими его нулевому собственному значению. Из $\Lambda U = \mathbb{O}$ и $AXU = \mathbb{O}$ следует

$$B_2 XU = BXU - BXU + \alpha^{-1} BX\Lambda U = \mathbb{O},$$

т.е. столбцы матрицы XU (и столбцы матрицы YV) суть полиномиальные решения нулевой степени для пучка $D_2(\lambda)$.

Для завершения доказательства установим, что все три пучка $D(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ имеют одинаковые блочные собственные значения, отличные от Λ (по спектру), и одинаковые блочные собственные векторы, им соответствующие. Действительно, пусть $\Lambda_1 \in \mathbb{C}^{l_1\times l_1}$, $\Lambda_2 \in \mathbb{C}^{l_2\times l_2}$, X_1, Y_2 – правые и левые блочные собственные значения и собственные векторы пучка $D(\lambda)$, отвечающие различным элементам его спектральной структуры, причем имеет место соотношение биортогональности

$$Y_2^H A X_1 = Y_2^H B X_1 = \mathbb{O}. \tag{2.7.4}$$

Тогда с учетом (2.7.4) имеем

$$A_1 X_1 = AX_1 = BX_1\Lambda_1, \qquad Y_2^H A_1 = Y_2^H A = \Lambda_2 Y_2^H B,$$
$$B_2 X_1 \Lambda_1 = BX_1\Lambda_1 = AX_1, \qquad \Lambda_2 Y_2^H B_2 = \Lambda_2 Y_2^H B = Y_2^H A,$$

что и завершает доказательство сделанного утверждения.

В практических применениях наиболее часто встречаются исчерпывание в нуль и бесконечность. Так, при последовательном вычислении преобладающих блочных собственных значений и соответствующих им блочных собственных векторов с помощью биодновременных итераций имеет смысл проводить блочное исчерпывание в нуль, тогда как исчерпывание в бесконечность будет полезно в алгоритме биодновременных обратных итераций, применяемом для последовательного определения блочных собственных характеристик, соответствующих малым по модулю собственным значениям пучка.

Исчерпывание в нуль и в бесконечность осуществляются переходом соответственно к пучкам

$$T_{10}(\lambda) = -\lambda B + A_{10}, \qquad A_{10} \equiv A - BX\Lambda Y^H B;$$
$$T_{20}(\lambda) = -\lambda B_{20} + A, \qquad B_{20} \equiv B - BXY^H B.$$

Объединение исчерпывания такого вида, состоящее в переходе к пучку $T_{12}(\lambda) = \lambda B_{20} - A_{10}$, приводит к замене части спектра, определяемой блочным собственным значением Λ, соответствующим числом правых и левых минимальных индексов, равных нулю; векторы из соответствующих жордановых цепочек становятся полиномиальными решениями нулевой степени.

Исчерпывание спектральных характеристик (в том числе и бесконечных), определяемых известным обратным блочным собственным значением M с соответсвующими правым и левым блочными собственными векторами X, Y ($Y^H AX = I$), состоит в переходе к одному из пучков:

$$T_3(\lambda) = -\lambda B_3 + A, \qquad B_3 \equiv B + AX\big(\alpha^{-1} I - M\big)Y^H A, \qquad \alpha \neq 0;$$
$$T_4(\lambda) = -\lambda B + A_4, \qquad A_4 \equiv A - AX\big(I - \alpha M\big)Y^H A, \qquad \alpha \neq \infty.$$

Утверждения, сформулированные выше для пучков (2.7.2) и (2.7.3), естественным образом переносятся на пучки $T_3(\lambda)$, $T_4(\lambda)$.

Возможно дальнейшее обобщение использованной выше идеи исчерпывания. Так, замена известного полного блочного собственного значения Λ на любое блочное собственное значение $\widetilde{\Lambda}$ без изменения соответствующих блочных собственных векторов X, Y ($Y^H BX = I$) и всех остальных скалярных и векторных спектральных характеристик достигается переходом к пучку

$$\widetilde{T}(\lambda) \equiv -\lambda B + \widetilde{A}, \qquad \widetilde{A} \equiv A + BX\big(\widetilde{\Lambda} - \Lambda\big)Y^H B.$$

2.7.2. Исчерпывание по способу Виландта [210].

Пусть для пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ полного столбцового ранга известны полное блочное собственное значение $\Lambda \in \mathbb{C}^{l\times l}$ и соответствующий ему правый блочный собственный вектор $X \in \mathbb{C}^{n\times l}$.

Для исчерпывания по способу Виландта* из $D(\lambda)$ части спектра $D(\lambda)$, определяемой спектром матрицы Λ, следует перейти от $D(\lambda)$

а) при $\alpha \neq \infty$ к пучку вида

$$\widehat{D}_1(\lambda) = \widehat{A}_1 - \lambda B,$$

где $\widehat{A}_1 = A + BX(\alpha I - \Lambda)Z^H B$;

б) при $\alpha \neq 0, \quad \det \Lambda \neq 0$ к пучку вида

$$\widehat{D}_2(\lambda) = A - \lambda \widehat{B}_2,$$

где $\widehat{B}_2 = B - BX(I - \alpha^{-1}\Lambda)Z^H B$.

Здесь $Z \in \mathbb{C}^{m\times l}$ – некоторая матрица полного столбцового ранга, нормированная условием

$$Z^H BX = I. \tag{2.7.5}$$

В предположении, что Λ – полное блочное собственное значение $D(\lambda)$, справедливы утверждения.

Теорема. (1). *Переход от $D(\lambda)$ к пучкам $\widehat{D}_1(\lambda)$, $\widehat{D}_2(\lambda)$ означает сдвиг в точку α той части спектра пучка $D(\lambda)$, которая соответствует собственным значениям матрицы Λ. При этом элементарный делитель $(\lambda - \lambda_*)^t$, принадлежащий сдвигаемой части спектра, заменяется на t линейных элементарных делителей. При $\det \Lambda = 0$ нулевая часть спектра заменяется соответствующим числом правых и левых нулевых минимальных индексов. Ненулевые собственные значения, относящиеся к Λ, не изменяются.*

(2). *Левые векторные характеристики, отвечающие неизменяемой части спектра, сохраняются. Изменение правых векторных характеристик определяется следующим образом.*

Если Λ_1, X_1 – правая блочная пара пучка $D(\lambda)$, связанная с неизменяемой частью спектра, то Λ_1, $\widehat{X}_1 = X_1 - X\Gamma$ есть правая блочная пара

а) *пучка $\widehat{D}_1(\lambda)$ при $\Gamma = (\alpha I - \Lambda)Z^H BX_1(\alpha I - \Lambda_1)^{-1}$;*

б) *пучка $\widehat{D}_2(\lambda)$ при $\Gamma = \Lambda^{-1}(I - \alpha^{-1}\Lambda)Z^H BX_1\Lambda_1(I - \alpha\Lambda_2)^{-1}$.*

Обоснование сделанных утверждений проводится по тому же плану, что и в способе Хотелинга.

*Исчерпывание по способу Виландта не требует знания левого блочного собственного вектора.

Глава 3. Спектральные задачи для полиномиальных матриц

Глава посвящена описанию алгоритмов решения спектральных задач полиномиальных матриц произвольной целой степени.

В §§3.1–3.2 рассматриваются алгоритмы (ΔW-1 алгоритм и ZW алгоритм) так называемого рангового сечения и их свойства. Приводятся алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных матриц и некоторых вспомогательных задач алгебры, базирующихся на алгоритмах рангового сечения.

В §3.3 приводится алгоритм решения некоторых спектральных задач полиномиальной матрицы. В отличие от ΔW-1 и ZW алгоритмов, основанных на использовании унимодулярных матриц, в алгоритме §3.3 используются только ортогональные матрицы.

В §3.4 приведено краткое описание принципов построения известных алгоритмов решения проблемы собственных значений регулярной полиномиальной матрицы.

В §3.5 рассмотрены алгоритмы вычисления структурных индексов конечного собственного значения, вычисления полюсно-нулевой структуры на бесконечности.

В §3.6 рассмотрена задача исчерпывания известных спектральных характеристик полиномиальной матрицы.

§3.1. ΔW-1 разложение и его свойства

3.1.1. Алгоритм ΔW-1 разложения [3, 7, 222].

Для полиномиальной $m\times n$ матрицы $D(\lambda)$ ранга ρ степени $s \geqslant 1$ рассмотрим разложение вида

$$D(\lambda)W(\lambda) = \big[\Delta(\lambda), \mathbb{O}\big]. \tag{3.1.1}$$

Здесь $W(\lambda)$ – унимодулярная $n\times n$ матрица, $\mathbb{O}$ – нулевая $m\times(n-\rho)$ матрица, $\Delta(\lambda)$ – полиномиальная $m\times\rho$ матрица степени не выше s полного столбцового ранга. Конечный спектр $\Delta(\lambda)$ совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$ в точке бесконечность нет особенности типа нуль. Все левые спектральные характеристики $\Delta(\lambda)$ и $D(\lambda)$ одинаковы. Разложение (3.1.1) в дальнейшем будем называть ΔW-1 разложением.

Ниже предлагается алгоритм ΔW-1 разложения (ΔW-1 алгоритм). Рассмотрим две версии ΔW-1 алгоритма блочную и скалярную. В обеих версиях вычисляется конечная последовательность полиномиальных матриц

$$D_0(\lambda) = D(\lambda),\ \ D_1(\lambda), \ldots, D_l(\lambda),$$

где $D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda)W_{k+1}(\lambda) = C_0^{k+1} + \lambda C_1^{k+1} + \dots + \lambda^s C_s^{k+1}$, $D_l(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}]$, $W_{k+1}(\lambda)$ – унимодулярная матрица. Отличаются версии алгоритма построением унимодулярной матрицы $W_{k+1}(\lambda)$ и реализацией умножения $D_k(\lambda)W_{k+1}(\lambda)$, $k = 0, \dots, l-1$. Опишем типичный (первый) шаг каждой из версий.

В блочной версии ΔW-1 алгоритма переход от $D_0(\lambda)$ к $D_1(\lambda)$ осуществляется выполнением следующих операций.

(1) Формируется вспомогательная матрица M_1. Если среди столбцов коэффициента C_s при старшей степени λ в $D_0(\lambda)$ нет нулевых, то $M_1 = C_s$. В противном случае следует переставить столбцы в коэффициентах* C_q, $q = s, \dots, 1, 0$ так, чтобы $C_s = [\overline{C}_{s1}, \mathbb{O}]$ (через $\overline{C}_{s1}$ обозначены ненулевые столбцы C_s, их число t_1), $C_q := [C_{q1}, C_{q2}]$, $q = s-1, \dots, 0$. Здесь C_{q1} и C_{q2} блоки C_q соответственно размеров $m \times t_1$, $m \times (n - t_1)$.

Если $C_{s-1,2}$ не имеет нулевых столбцов, то

$$M_1 = [\overline{C}_{s1}, C_{s-1,2}].$$

В противном случае следует переставить столбцы в коэффициентах C_q, $q = s-1, \dots, 0$ так, чтобы $C_{s-1,2} = [\overline{C}_{s-1,2}, \mathbb{O}]$ (через $\overline{C}_{s-1,2}$ обозначены ненулевые столбцы $C_{s-1,2}$; их число t_2); $C_q := [C_{q2}, C_{q3}]$. Блоки C_{q2} и C_{q3} имеют соответственные размеры $m \times t_2$ и $m \times (n - \delta_2)$, где $\delta_k := \sum\limits_{i=1}^{k} t_i$.

Если $C_{s-2,3}$ не имеет нулевых столбцов, то

$$M_1 = [\overline{C}_{s1}, \overline{C}_{s-1,2}, C_{s-2,3}].$$

В противном случае процесс образования M_1 может быть продолжен и заканчивается на шаге $p \leqslant s+1$, когда будет построена $m \times n$ матрица M_1 вида

$$M_1 = [\overline{C}_{s1}, \overline{C}_{s-1,2}, \dots, C_{s+1-p,p}],$$

состоящая из блоков, имеющих размеры $m \times t_1$, $m \times t_2$, ..., $m \times t_{s+2-p}$ и $m \times (n - \delta_{p-1})$. При $p < s+1$ матрица M_1 имеет все n столбцов ненулевыми; при $p = s+1$ среди последних столбцов M_1 могут быть нулевые. В этом случае все коэффициенты преобразуемого матричного полинома имеют последними нулевые столбцы и размеры его могут быть уменьшены вычеркиванием нулевых столбцов. Размеры вновь полученного матричного

*Одной и той же буквой обозначаются матрицы до и после перестановки столбцов.

полинома обозначим $m \times n_1$. Матрица M_1 будет

$$M_1 = [\underbrace{\overline{C}_{s1}}_{t_1}, \underbrace{\overline{C}_{s-1,2}}_{t_2}, \ldots, \underbrace{\overline{C}_{s+1-p,p}}_{t_p}].$$

(2) Находится базис T_1 нуль-пространства матрицы M_1 ранга r_1.

Если $r_1 = n$, т.е. M_1 имеет полный столбцовый ранг, то $\Delta(\lambda) = D(\lambda)$, так как $D(\lambda)$ – матрица полного столбцового ранга.

(3) При $r_1 < n$ базис T_1 преобразуется к виду

$$L_1 = \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ * & & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & * & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} \equiv [l_1, \ldots, l_{n-r_1}]$$

левой трапецеидальной матрицы с ненулевой диагональю. Заметим, что перестройка T_1 в базис, имеющий форму L_1, не всегда возможна. Для этого требуется, чтобы главный минор порядка $n - r_1$ матрицы T_1 был отличен от нуля. В этом случае для преобразования T_1 в форму L_1 следует умножить T_1 справа на ортогональную матрицу (цепочку плоских вращений или отражений), приводящую T_1 к виду L_1.

Если главный минор порядка $n - r_1$ матрицы T_1 равен нулю, то построение матрицы L_1, столбцы которой содержат базис нуль-пространства матрицы M_1 (но не исчерпываются им), будет осуществляться следующим образом. Матрица T_1 умножается справа на ортогональную матрицу такую, что T_1 приводится к левой трапецевидной матрице без перестановок строк. Если при этом в преобразуемой матрице встретится ведущая строка с номером i нулевой длины, то эта строка вычеркивается. Соответствующий столбец в L_1 заменяется столбцом единичной матрицы $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ так, чтобы диагональный элемент (i, i) был равен единице. Приведение к левой трапецевидной матрице продолжается с преобразуемой матрицей меньших размеров (с вычеркнутой строкой). В результате будет построена левая трапецевидная матрица (обозначим ее по-прежнему L_1), число столбцов h_1 которой будет не меньше $n - r_1$. Столбцы этой матрицы содержат базис нуль-пространства матрицы M_1 и, быть может, столбцы единичной матрицы, причина наличия которых описана выше.

В дальнейшем изложении будем считать, что L_1 имеет $n - r_1$ столбцов. Все приведенные выше рассуждения остаются в силе, если число h_1 столбцов L_1 больше $n - r_1$, только всюду $n - r_1$ надо заменить на число h_1, соответственно изменив и матрицу I_{r_1} на I_{n-r_1}.

Матрица L_1 записывается в блочном виде.

Если $\delta_{k-1} \leqslant n_1 - r_1$, $\delta_k \geqslant n_1 - r_1$ при $k \leqslant p-1$, то L_1 имеет вид

$$L_1 = \begin{array}{r} t_1\{ \\ t_2\{ \\ \vdots \\ t_k\{ \\ \vdots \\ t_p\{ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ L_{k1} & L_{k2} & & L_{kk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{L_{p1}}_{t_1} & \underbrace{L_{p2}}_{t_2} & \dots & \underbrace{L_{pk}}_{t_k} \end{array} \right].$$

Здесь $\delta_k := \sum_{i=1}^{k} t_i$; L_{ii} $(i = 1, \dots, k-1)$ – неособенные левые треугольные матрицы порядка t_i, L_{kk} – левая трапецевидная матрица полного столбцового ранга размеров $t_k \times (n_1 - r_1 - \delta_{k-1})$.

Если $\delta_{k-1} \leqslant n_1 - r_1$, $\delta_k > n_1 - r_1$ только при $k \equiv p$, то L_1 имеет следующий вид

$$L_1 = \left[\begin{array}{ccccc} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \mathbb{O} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ L_{p-1,1} & L_{p-1,2} & \dots & L_{p-1,p-1} & \\ \underbrace{L_{p1}}_{t_1} & \underbrace{L_{p2}}_{t_2} & \dots & \underbrace{L_{p,p-1}}_{t_{p-1}} & \underbrace{L_{pp}}_{t_p} \end{array} \right].$$

(4) Строится унимодулярная матрица $W^{(1)}(\lambda)$ порядка n_1, которая в зависимости от соотношения чисел $n_1 - r_1$ и δ_{k-1} будет иметь следующие виды:

1) Если $\delta_{k-1} \leqslant n_1 - r_1$, $\delta_k > n_1 - r_1$ при некоторых $k \leqslant p-1$

(где k есть число блоков в L_1), то

$$W^{(1)}(\lambda) = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ \lambda L_{21} & L_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & L_{kk} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \lambda^{p-1} L_{p1} & \lambda^{p-2} L_{p2} & \dots & \lambda^{p-k} L_{pk} & I_{r_1} \end{bmatrix}.$$

2) Если $\delta_{p-1} \leqslant n_1 - r_1$, $\delta_p \geqslant n_1 - r_1$ $(k = p)$, то

$$W^{(1)}(\lambda) = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & & \\ \lambda L_{21} & L_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & L_{p-1,p-1} & & \\ \lambda^{p-1} L_{p1} & \lambda^{p-2} L_{p2} & \dots & \lambda L_{p,p-1} & L_{pp} & I_{r_1} \end{bmatrix}.$$

Здесь L_{ii}, $i = 1, \dots, p-1$ – левые треугольные неособенные матрицы порядка t_i, L_{pp} – матрица размеров $t_p \times [(n_1 - r_1) - \delta_{p-1}]$ с ненулевой диагональю.

(5) Осуществляется переход к матричному полиному $D_1(\lambda)$

$$D_1(\lambda) = D_0(\lambda)\theta_1 \overline{W}_1(\lambda) = C_0^1 + \lambda C_1^1 + \dots + \lambda^s C_s^1,$$

где θ_1 – результирующая матрица перестановок первого шага, $\overline{W}_1(\lambda)$ – унимодулярная матрица:

$$\overline{W}_1(\lambda) = \begin{cases} W^{(1)}(\lambda), & \text{если} \quad n = n_1 \\ \text{block diag}\left\{W^{(1)}(\lambda), I_{n-n_1}\right\}, & \text{если} \quad n > n_1 \end{cases}.$$

Операции (1)-(5) алгоритма выполняются до тех пор, пока на некотором шаге $l+1$ матрица M_{l+1} будет иметь полный столбцовый ранг. В результате выполнения l шагов получим искомое ΔW-1 разложение

$$D_l(\lambda) = D(\lambda)W(\lambda) = \left[\Delta(\lambda), \mathbb{O}\right].$$

Здесь $W(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{l} \theta_k \overline{W}_k(\lambda)$ – унимодулярная $n \times n$ матрица, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица, $\Delta(\lambda)$ – полиномиальная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга.

В скалярной версии алгоритма ΔW-1 осуществляется переход от $D_0(\lambda)$ к $D_1(\lambda)$ в результате выполнения следующих операций.

(1) Матричный полином $D_0(\lambda)$ записывается в виде полиномиальной матрицы размеров $m \times n$, столбцы $A_k(\lambda)$ $(k = 1, \dots, n)$ которой суть векторные полиномы, расположенные в порядке невозрастания степеней:

$$D_0(\lambda) := D_0(\lambda)\theta_0 = \big[A_1(\lambda), \dots, A_n(\lambda)\big].$$

Здесь $A_k(\lambda) = \lambda^{m_k} a_{m_k} + \dots + a_{0_k}$ – векторный полином; θ_0 – матрица перестановок, обеспечивающая выполнение соотношений $s = m_1 \geqslant m_2 \geqslant \dots \geqslant m_n$. Обозначим через M_1 вспомогательную постоянную матрицу, составленную из коэффициентов при старших степенях λ в полиномиальных столбцах матрицы $D_0(\lambda)$, так что

$$M_1 = \big[a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_n}\big].$$

(2) Вычисляется базис T_1 правого нуль-пространства матрицы M_1.

(3) Матрица T_1 преобразуется к виду левой трапецеидальной матрицы L_1 размеров $m \times h_1$, $(h_1 \geqslant n_1 - r_1,\ r_1 = \operatorname{rank} M_1)$ с ненулевой главной диагональю. Построение L_1 осуществляется так же, как в блочной версии алгоритма. Ниже для определенности считаем $h_1 = n_1 - r_1$.

(4) Составляется унимодулярная матрица $\widehat{W}_1(\lambda)$ вида

$$\widetilde{W}_1(\lambda) := W^{(1)}(\lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ \lambda^{s_{21}} l_{21} & l_{22} & & & & \\ \lambda^{s_{31}} l_{31} & \lambda^{s_{32}} l_{32} & l_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & l_{n-r_1, n-r_1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \lambda^{s_{n1}} l_{n1} & \lambda^{s_{n2}} l_{n2} & \lambda^{s_{n3}} l_{n3} & \dots & \lambda^{s_{n,n-r_1}} l_{n,n-r_1} & I_{r_1} \end{bmatrix}.$$

Здесь $s_{ij} = m_j - m_i$, $j = 1, \dots, n - r_1$, $i = j + 1, \dots, n$.

(5) Осуществляется переход к матрице $D_1(\lambda)$

$$D_0(\lambda)\overline{W}_1(\lambda) \equiv D_1(\lambda),$$

где

$$\overline{W}_1(\lambda) = \theta_0 \widehat{W}_1(\lambda),\ \overline{W}_1(\lambda) = \begin{cases} W^{(1)}(\lambda), & \text{если } n = n_1 \\ \text{block diag}\{W^{(1)}(\lambda), I_{n-n_1}\}, & \text{если } n_1 < n. \end{cases}$$

Операции (1)-(5) повторять до тех пор, пока не будет построена матрица M_{l+1} полного столбцового ранга. При этом матрица $D_l(\lambda) = D(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}]$ является искомой.

3.1.2. Обоснование ΔW-1 алгоритма.

Перейдем к обоснованию ΔW-1 алгоритма. Сначала покажем, что матричный полином $D_l(\lambda)$, имеющий матрицу M_{l+1} полного столбцового ранга, может быть построен за конечное число l шагов ΔW-1 алгоритма и имеет степень не выше s, т.е. степени исходного матричного полинома $D(\lambda)$.

Действительно, выбор унимодулярной матрицы $W^{(1)}(\lambda)$ в форме левой треугольной указанного выше вида не увеличивает степень преобразуемой λ-матрицы, так что степень $\Delta_l(\lambda)$ не выше s. Далее на каждом шаге t алгоритма зануляются $(n_t - r_t) > 0$ векторов, являющихся коэффициентами при старших степенях λ в полиномиальных столбцах преобразуемой матрицы $D_{t-1}(\lambda)$, $t = 1, \ldots, l+1$. Следовательно, через конечное число шагов k в результирующей матрице с необходимостью появятся нулевые столбцы и ее размер n_{k-1} можно будет уменьшить вычеркиванием нулевых столбцов, так что $n_k < n_{k-1}$. С другой стороны, матрицы $D_t(\lambda)$ и $D_{t-1}(\lambda)$ имеют, по крайней мере, r_t одинаковых полиномиальных столбцов, у которых векторные коэффициенты при старших степенях линейно независимые между собой. Поэтому всегда выполняется соотношение $r_{t+1} \geqslant r_t$. Следовательно, разности $(n_t - r_t)$ должны уменьшаться через конечное число шагов алгоритма за счет убывания n_t и (или) за счет возрастания r_t, так что на некотором шаге получим $n_{l+1} - r_{l+1} = 0$, что и доказывает конечность алгоритма.

Далее установим, что результирующая матрица $\Delta(\lambda)$ а) является матрицей полного столбцового ранга; б) не имеет особенности типа нуль на бесконечности. Для этого запишем $\Delta(\lambda)$ в виде матричного полинома

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) =& \left[\overline{C}_{s1}, 0, \ldots, 0\right]\lambda^s + \left[C_{s-1,1}, \overline{C}_{s-1,2}, 0, \ldots, 0\right]\lambda^{s-1} + \cdots + \\ &+\left[C_{s-p+2,1}, \ldots, \overline{C}_{s-p+2,p-1}, 0\right]\lambda^{s-p+2} + \\ &+\left[C_{s-p+1,1}, C_{s-p+1,2}, \ldots, \overline{C}_{s-p+1,p}\right]\lambda^{s-p+1} + \\ &+\left[C_{s-p,1}, C_{s-p,2}, \ldots, C_{s-p,p}\right]\lambda^{s-p} + \cdots + \left[C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0p}\right]\end{aligned}$$

и заметим, что по построению матрица $M_{l+1} = [\overline{C}_{s1}, \overline{C}_{s-1,2}, \ldots, \overline{C}_{s-p+1,p}]$ имеет полный столбцовый ранг.

Утверждение а) докажем от противного. Допустим, существует векторный полином $q(\lambda) = x_t\lambda^t + \ldots + x_0$ степени t $(x_t \neq 0)$ такой, что $\Delta(\lambda)q(\lambda) = 0$ при любом λ. Докажем, что $q(\lambda) \equiv 0$. Для этого при нашем предположении достаточно установить, что коэффициент x_t при старшей степени $q(\lambda)$ есть нулевой вектор. Запишем каждый коэффициент x_k в блочном виде (в соответствии с разбиением коэффициентов в $\Delta(\lambda)$): $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp})^B$ $k = 0, \dots t$. Имеем

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda)q(\lambda) = 0 = \lambda^{s+t}\big[\overline{C}_{s1}x_{t1}\big] + \lambda^{s+t-1}\big[C_{s-1,1}x_{t1} + \overline{C}_{s-1,2}x_{t2}\\ +\overline{C}_{s1}x_{t-1,1}\big] + \lambda^{s+t-2}\big[(C_{s-2,1}x_{t1} + C_{s-2,2}x_{t2} + \overline{C}_{s-2,3}x_{t3})\\ +(C_{s-1,1}x_{t-1,1} + \overline{C}_{s-1,2}x_{t-1,2}) + \overline{C}_{s1}x_{t-2,2}\big] + \dots\\ +\lambda^{s+t-k}\big[(C_{s-k,1}x_{t1} + C_{s-k,2}x_{t2} + \dots + \overline{C}_{s-k,k+1}x_{t,k+1})\\ +(C_{s-k+1,1}x_{t-1,1} + C_{s-k+1,2}x_{t-1,2} + \dots + \overline{C}_{s-k+1,k}x_{t-1,k})\\ +\dots + (C_{s-2,1}x_{t-k+2,1} + C_{s-2,2}x_{t-k+2,2} + \overline{C}_{s-2,3}x_{t-k+2})\\ +(C_{s-1,1}x_{t-k+1,1} + \overline{C}_{s-1,2}x_{t-k+1,2}) + (\overline{C}_{s1}x_{t-k,1})\big] + \dots = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что коэффициенты при степенях λ^{s+t-k} ($k = 0, \dots, p-1$) равны нулю, так что с учетом линейной независимости столбцов матрицы M_{l+1} получим

$$\begin{aligned}&x_{t1} = 0\\ &x_{t2} = x_{t-1,1} = 0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &x_{tp} = x_{t-1,p-1} = \dots = x_{t-p+1,1} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, векторный коэффициент x_t в $q(\lambda)$ есть нулевой. Противоречие доказывает утверждение а).

Для доказательства утверждения б) рассмотрим матричный полином

$$\overline{\Delta}(\mu) = \mu^s\Delta\Big(\frac{1}{\mu}\Big) = \mu^s C_0 + \dots + C_s,$$

записав его в виде матрицы $\overline{\Delta}(\mu) = [\overline{A}_1(\mu), \dots, \overline{A}_\rho(\mu)]$, где $\overline{A}_k(\mu) = \mu^{-m_k}\mu^s[\mu^{m_k}a_{0k} + \dots + a_{m_k}]$ – столбец с номером k. При этом считаем $s \equiv m_1 \geqslant m_2 \geqslant \dots \geqslant m_\rho \geqslant 0$. Очевидно, $\overline{\Delta}(\mu)$ имеет тот же столбцовый ранг ρ, что и $\Delta(\lambda)$. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\rho)$, $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \dots \leqslant \sigma_\rho$ набор степеней элементарных делителей, соответствующих нулевому собственному значению матрицы $\overline{\Delta}(\mu)$. Мультииндекс $(\sigma_1 - s, \dots, \sigma_\rho - s)$ характеризует полюсно нулевую структуру матрицы $\Delta(\lambda)$ на бесконечности. Отсюда для доказательства б) достаточно установить, что максимальная степень σ_ρ элементарного делителя μ^{σ_ρ} матрицы $\overline{\Delta}(\mu)$ не больше s. Запишем

$\overline{\Delta}(\mu)$ в виде

$$\begin{gathered}\overline{\Delta}(\mu) = \{\mu^{s-m_1}[a_{m_1} + \mu(\dots)] + \mu^{s-m_2}[a_{m_2} + \mu(\dots)] + \dots + \\ + \mu^{s-m_\rho}[a_{m_\rho} + \mu(\dots)]\} = \{[a_{m_1} + \mu(\dots)], [a_{m_2} + \mu(\dots)], \\ \dots, [a_{m_\rho} + \mu(\dots)]\} \operatorname{diag}\{1, \mu^{s-m_2}, \dots, \mu^{s-m_\rho}\} \equiv \overline{B}(\mu)\Sigma(\mu),\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\overline{B}(\mu) &= \{[a_{m_1} + \mu(\dots)], \dots, [a_{m_\rho} + \mu(\dots)]\} \\ \Sigma(\mu) &= \operatorname{diag}\{1, \mu^{s-m_2}, \dots, \mu^{s-m_\rho}\}.\end{aligned}$$

Здесь $\overline{B}(\mu)$ – полиномиальная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, что следует из очевидного равенства $\overline{B}(0) = M_{l+1} = [a_{m_1}, \dots, a_{m_\rho}]$ с учетом того, что M_{l+1} имеет ранг ρ.

Достроим $m\times\rho$ матрицу M_{l+1} до квадратной неособенной $m\times m$ матрицы. Пусть это будет

$$Y_{l+1} = [M_{l+1}, Q_2],$$

где Q_2 есть $m \times (m-\rho)$ матрица, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства матрицы M_{l+1}. Тогда, матрица $\widehat{B}(\mu) = [\,\overline{B}(\mu), Q_2]$ будет регулярной. Запишем $\overline{\Delta}(\mu)$ в виде

$$\overline{\Delta}(\mu) = \overline{B}(\mu)\Sigma(\mu) = [\overline{B}(\mu), Q_2] \begin{bmatrix} \Sigma(\mu) \\ 0 \end{bmatrix} = \widehat{B}(\mu) \begin{bmatrix} \Sigma(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Последнее равенство есть форма Смита для $\overline{\Delta}(\mu)$ в точке $\mu = 0$, так как по построению $\widehat{B}(0) = Y_{l+1}$ – неособенная матрица, $\Sigma(\mu)$ – диагональная матрица, у которой каждый последующий диагональный элемент делится на предыдущий. Из определения канонической формы Смита и из (3.1.2) следует, что $\overline{\Delta}(\mu)$ имеет собственное значение $\mu = 0$ со структурными индексами $\sigma_k = s - m_k$ $k = 1, \dots, \rho$ причем $m_1 = s \geqslant m_2 \geqslant \dots \geqslant m_\rho \geqslant 0$. Отсюда $\sigma_\rho = s - m_\rho \leqslant s$. Утверждение б) доказано.

3.1.3. Геометрические свойства ΔW-алгоритма..

1. ΔW-1 *разложение $m \times n$ ранга ρ полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ позволяет находить унимодулярный базис $W_0(\lambda)$ нуль-пространства из правых полиномиальных решений $D(\lambda)$ и его унимодулярное дополнение $W_1(\lambda)$ до всего векторного пространства $\mathbb{C}^n[\lambda]$ над кольцом скалярных полиномов. Другими словами, ΔW-1 разложение реализует ранговое сечение пространства $\mathbb{C}^n[\lambda]$, в котором действует оператор $D(\lambda)$.*

Действительно, применяя ΔW-1 разложение к $D(\lambda)$ получим

$$D(\lambda)W(\lambda) = \left[\Delta(\lambda), \mathbb{O}\right],$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $n \times (n-\rho)$ матрица. Тогда столбцы блоков $W_1(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$, составленных из первых ρ и последних $n-\rho$ столбцов унимодулярной матрицы $W(\lambda)$ дадут искомые базисы. В дальнейшем блочное представление $W(\lambda) = [W_1(\lambda), W_0(\lambda)]$ будем называть ранговым сечением $W(\lambda)$.

2. Пусть полиномиальные матрицы $M_1(\lambda)$, $M_2(\lambda)$ определяют вложение подпространств

$$\mathbb{C}^n[\lambda] \supseteq M_1(\lambda) \supseteq M_2(\lambda).$$

ΔW-1 *разложение, последовательно примененное сначала к матрице* $M_1^H(\lambda)$:

$$M_1^H(\lambda)W_1(\lambda) = \left[\Delta_1(\lambda), \mathbb{O}\right], \qquad W_1(\lambda) = \left[W_{11}(\lambda), W_{01}(\lambda)\right],$$

затем к матрице $M_3^H(\lambda) \equiv [W_{01}(\lambda), M_2(\lambda)]^H$:

$$M_3^H(\lambda)W_2(\lambda) = \left[\Delta_2(\lambda), \mathbb{O}\right], \qquad W_2(\lambda) = \left[W_{13}(\lambda), W_{03}(\lambda)\right]$$

позволяет находить $W_{03}(\lambda)$ *– базис унимодулярного дополнения подпространства* $M_2(\lambda)$ *до подпространства* $M_1(\lambda)$.

Справедливость утверждения вытекает из свойства 1.

3. ΔW-1 *разложение позволяет находить унимодулярный базис* $W_0(\lambda)$ *пересечения нуль-пространств из правых полиномиальных решений матриц* $A_1(\lambda), \ldots, A_k(\lambda)$ *соответственно размеров* $m \times n_1$, ..., $m \times n_k$.

Действительно, применяя ΔW-1 разложение к матрице $\mathfrak{A}(\lambda) = [A_1(\lambda, \ldots, A_k(\lambda)]^B$, имеем $\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}]$ $(W(\lambda) = [W_1(\lambda), W_0(\lambda)])$. Здесь $W_0(\lambda)$ – последние столбцы унимодулярной матрицы $W(\lambda)$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}(\lambda)$, который совпадает с искомым базисом.

4. ΔW-1 *разложение, позволяющее находить унимодулярные матрицы* $W_1(\mu)$ *и* $W_2(\mu)$, *осуществляет преобразование произвольного пучка* $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ *полиномиальных матриц (по крайней мере, одна из которых имеет неполный ранг) в эквивалентный пучок квазитреугольной формы*

$$W_2^H(\mu)D(\lambda,\mu)W_1(\mu) = \begin{bmatrix} D_{11}(\lambda,\mu) & D_{12}(\lambda,\mu) \\ \mathbb{O} & D_{22}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}.$$

Для определенности считаем $X(\mu) = N_c[A(\mu)] \neq \emptyset$. Тогда в качестве унимодулярных матриц $W_1(\mu)$ и $W_2(\mu)$ преобразования можно взять матрицы, осуществляющие ΔW-1 разложение матриц $X^H(\mu)$ и $[B(\mu)X(\mu)]^H$, именно

$$X^H(\mu)W_1(\mu) = \left[\Delta_1(\mu), \mathbb{O}_1\right], \qquad \left[B(\mu)X(\mu)\right]^H W_2(\mu) = \left[\Delta_2(\mu), \mathbb{O}_2\right].$$

Через $\mathbb{O}_i$ обозначены нулевые матрицы, размеры которых определяются размерами нуль-пространств из правых полиномиальных решений матриц $X^H(\mu)$ и $(B(\mu)X(\mu))^H$ соответственно.

3.1.4. Расчетные формулы ΔW-1 алгоритма.

Ниже приводятся формулы, полезные при реализации ΔW-1 алгоритма на ЭВМ. Так выполнение операции (5) алгоритма, осуществляющей переход от матрицы $D_{t-1}(\lambda)$ к матрице $D_t(\lambda)$ $(t = 1, \ldots, l)$, можно реализовать как вычисление коэффициентов матричного полинома $D_t(\lambda) = \Gamma_t(\lambda)\widetilde{W}_t(\lambda)$ по коэффициентам матричного полинома $\Gamma_t(\lambda) \equiv D_{t-1}(\lambda)\theta_{t-1}$. Аналогично для вычисления результирующей унимодулярной матрицы $W(\lambda)$ разложения (3.1.1) переход от шага $t-1$ к шагу t можно реализовать как вычисление коэффициентов матричного полинома $W_t(\lambda) = B_t(\lambda)\widetilde{W}_t(\lambda)$ по коэффициентам матричного полинома $B_t(\lambda) = W_{t-1}(\lambda)\theta_{t-1}$ $t = 1, \ldots, l$, $W_0 = I$.

Пусть известны коэффициенты матричных полиномов

$$\Gamma_t(\lambda) = D_{t-1}(\lambda)\theta_{t-1} = \lambda^s C_s + \cdots + C_0,$$
$$B_t(\lambda) = W_{t-1}(\lambda)\theta_{t-1} = \lambda^\alpha \omega_\alpha + \cdots + \omega_0.$$

По построению они имеют следующее блочное разбиение

$$\begin{bmatrix} \omega_\alpha \\ \vdots \\ \omega_1 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\alpha 1} & \omega_{\alpha 2} & \cdots & \omega_{\alpha p} & \omega_{\alpha z} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1p} & \omega_{1z} \\ \underbrace{\omega_{01}}_{t_1} & \underbrace{\omega_{02}}_{t_2} & \cdots & \underbrace{\omega_{0p}}_{t_p} & \underbrace{\omega_{0z}}_{n-\delta_\rho} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} C_s \\ C_{s-1} \\ \cdots \\ C_{s-p+1} \\ \cdots \\ C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{s1} & & & & \\ C_{s-1,1} & \overline{C}_{s-1,2} & & \mathbb{O} & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \\ C_{s-p+1,1} & C_{s-p+1,2} & \cdots & \overline{C}_{s-p+1,p} & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \underbrace{C_{01}}_{t_1} & \underbrace{C_{02}}_{t_2} & \cdots & \underbrace{C_{0p}}_{t_p} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^{p} t_i \equiv \delta_p$ может изменяться от 1 до $s+1$. Унимодулярную матрицу $\widetilde{W}_t(\lambda)$, образованную на шаге t алгоритма, запишем в виде

$$\widetilde{W}_t(\lambda) = \left[\begin{array}{ccccc:c} L_{11} & & & & & \\ \lambda L_{21} & L_{22} & & & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ddots & & & \\ \lambda^{k-1}L_{k1} & \lambda^{k-2}L_{k2} & \dots & L_{kk} & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \dots & \cdots\cdots & & \\ \lambda^{p-1}L_{p1} & \lambda^{p-2}L_{p2} & \dots & \lambda^{p-k}L_{pk} & & I_{n-h_t} \end{array}\right].$$

Здесь число k определяется из условия одновременного выполнения двух неравенств

$$\delta_{k-1} \leqslant h_t, \qquad \delta_k > h_t$$

и может меняться от 1 до p. Матричные полиномы $D_t(\lambda)$ и $W_t(\lambda)$, полученные после выполнения операции (5) алгоритма, вычисляются по формулам

$$D_t(\lambda) = D_{t-1}(\lambda)\theta_{t-1}\widetilde{W}_t(\lambda) = C_0^t + \cdots + \lambda^s C_s^t$$
$$W_t(\lambda) = W_{t-1}(\lambda)\theta_{t-1}\widetilde{W}_t(\lambda) = \omega_0^t + \cdots + \lambda^\beta \omega_p^t,$$

где $\beta = \alpha + p - 1$.

Для записи расчетных формул в компактном виде введем следующие вспомогательные нулевые матрицы

$$C_{s-q,\xi} = 0 \text{ для любого } \xi > q+1 \text{ при } q = 0,\dots,s,\ \xi = 1,\dots,p$$
$$C_{i,\xi} = 0 \text{ для любого } i < 0,\ \xi = 1,\dots,p$$
$$\omega_{i,\xi} = 0 \text{ для любого } i < 0 \text{ и любого } i > \alpha \text{ при } \xi = 1,\dots,p.$$

Тогда имеем

$$C_{s-q}^t = \Big[\sum_{j=1}^{p} C_{s-q-(j-1),j}L_{j1}; \sum_{j=2}^{p} C_{s-q-(j-2),j}L_{j2}; \dots;$$
$$\sum_{j=k}^{p} C_{s-q-(j-k),j}L_{jk}; \widehat{C}_{s-q}\begin{pmatrix} \mathbb{O}_t \\ I_{n-h_t} \end{pmatrix}\Big],$$

где $\widehat{C}_{s-q} \equiv \left[C_{s-q,1}; C_{s-q,2}; \ldots; C_{s-q,p}; \mathbb{O}_{m\times(n-n_t)}\right]$ $(q = 0, \ldots, s)$; $\mathbb{O}_t$ – нулевая матрица размеров $h_t \times (n - h_t)$;

$$\omega^t_{\beta-q} = \Big[\sum_{j=1}^{p} \omega_{\beta-q-(j-1),j} L_{j1}; \sum_{j=2}^{p} \omega_{\beta-q-(j-2),j} L_{j2}; \ldots;$$
$$\sum_{j=k}^{p} \omega_{\beta-q-(j-k),j} L_{jk}; \widehat{\omega}_{\beta-q} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_t \\ I_{n-h_t} \end{pmatrix} \Big],$$

где $\widehat{\omega}_{\beta-q} \equiv \left[\omega_{\beta-q,1}; \omega_{\beta-q,2}; \ldots; \omega_{\beta-q,p}\right]$ $(q = 0, \ldots, \beta)$.

Приведенные выше расчетные формулы верны для $k = 1, \ldots, p$; $p = 1, \ldots, s+1$; s – любое целое число.

Замечание. В зависимости от соотношений чисел k, p и s любой шаг алгоритма может изменить размеры и степень преобразуемого матричного полинома.

Если $k = 1 \leqslant p$, то в коэффициенте при старшей степени λ преобразуемого полинома увеличивается число нулевых столбцов.

Если $1 < k \leqslant p \leqslant s+1$, то степень преобразуемого матричного полинома уменьшается, по крайней мере, на единицу. При этом, если $p = s+1$, в преобразуемом матричном полиноме появляются нулевые столбцы, так что его размеры могут быть уменьшены.

3.1.5. Применение ΔW-1 алгоритма к решению спектральных задач сингулярной полиномиальной матрицы.

Пусть
$$D(\lambda) = C_s\lambda^s + \cdots + C_0$$
есть $m \times n$ матрица ранга ρ. Покажем, как ΔW-1 алгоритм применить к решению некоторых спектральных задач $D(\lambda)$.

3.1.5.1. Выделение регулярной части.

Для выделения регулярной части сингулярной матрицы $D(\lambda)$ следует найти ΔW-1 разложение последовательно для двух полиномиальных матриц
$$D(\lambda)W_1(\lambda) = \left[\Delta_1(\lambda), \mathbb{O}\right] \tag{3.1.3}$$
и
$$\Delta_1^T(\lambda)W_2(\lambda) = \left[\Delta_2(\lambda), \mathbb{O}\right]. \tag{3.1.4}$$
Здесь $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ – унимодулярные матрицы, осуществляющие ΔW-1 разложение соответственно $D(\lambda)$ и $\Delta_1^T(\lambda)$; $\Delta_2(\lambda)$ – регулярная порядка ρ матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$, так что $\Delta_2^T(\lambda)$ есть искомая регулярная часть $D(\lambda)$.

Заметим, что для выделения регулярной части из $D(\lambda)$ не требуется знать заранее ранг ρ матрицы $D(\lambda)$, а также вычислять результирующие унимодулярные матрицы $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$.

3.1.5.2. Вычисление минимальных базисов из полиномиальных решений.

Вычисление минимальных базисов из правых и левых полиномиальных решений $D(\lambda)$ осуществляется в два этапа.

На первом этапе вычисляются унимодулярные матрицы $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ разложений (3.1.3) и (3.1.4).

Пусть $W_1(\lambda) = [W_{11}(\lambda), W_{10}(\lambda)]$ и $W_2(\lambda) = [W_{21}(\lambda), W_{20}(\lambda)]$. Тогда столбцы $W_{10}(\lambda)$ и строки $W_{20}^T(\lambda)$ образуют базисы правого и левого нуль-пространств из полиномиальных решений $D(\lambda)$.

На втором этапе базисы $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ перестраиваются в минимальные базисы нуль-пространств $D(\lambda)$ из полиномиальных решений. Это можно сделать, исчерпав из $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ собственные значения. Так как $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ составлены из столбцов унимодулярных матриц, то они не имеют конечных собственных значений, так что для построения минимальных базисов достаточно исчерпать только особенности типа нуль на бесконечности, если они имеются. Для этого следует к матрицам $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ применить ΔW-1 алгоритм. Имеем

$$W_{10}(\lambda)\widehat{W}_1(\lambda) = \widehat{W}_{10}(\lambda); \qquad W_{20}(\lambda)\widehat{W}_2(\lambda) = \widehat{W}_{20}(\lambda). \qquad (3.1.5)$$

Здесь $\widehat{W}_1(\lambda)$ и $\widehat{W}_2(\lambda)$ – унимодулярные матрицы соответственно порядков $n-\rho$ и $m-\rho$, осуществляющие ΔW – разложение матриц $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$. По свойствам ΔW-1 разложений из равенств (3.1.5) следует, что столбцы матрицы $\widehat{W}_{10}(\lambda)$ и строки матрицы $\widehat{W}_{20}^T(\lambda)$ образуют искомые минимальные базисы нуль-пространств из полиномиальных решений $D(\lambda)$.

Замечание. Второй этап вычисления минимального базиса из полиномиальных решений матрицы $D(\lambda)$ можно рассматривать как алгоритм перестройки унимодулярного базиса в минимальный.

3.1.6. Построение минимального базиса любого подпространства из полиномиальных векторов.

Пусть $x_1(\lambda), \ldots, x_\rho(\lambda)$ – некоторый базис подпространства $X(\lambda)$ в пространстве $\mathbb{C}^n[\lambda]$.

Для перестройки заданного базиса в минимальный выполняются следующие операции.

(1) Формируется полиномиальная $n \times \rho$ матрица

$$P(\lambda) = \big[x_1(\lambda), \dots , x_\rho(\lambda)\big],$$

столбцами которой являются векторы $x_1(\lambda), \dots , x_\rho(\lambda)$.

(2) Вычисляется унимодулярная матрица $W(\lambda)$, осуществляющая ΔW-1 разложение матрицы $P^T(\lambda)$:

$$P^T(\lambda)W(\lambda) = \big[\Delta(\lambda), \mathbb{O}\big]. \tag{3.1.6}$$

Пусть $W(\lambda) = [W_1(\lambda), W_2(\lambda)]$ есть ранговое сечение $W(\lambda)$.

(3) Вычисляется унимодулярная матрица $\widetilde{W}(\lambda)$, осуществляющая ΔW-1 разложение матрицы $W_0^T(\lambda)$:

$$W_0^T(\lambda)\widetilde{W}(\lambda) = \big[\Delta, \mathbb{O}\big].$$

Обозначим через $\widetilde{W}_0(\lambda)$ матрицу, составленную из последних ρ столбцов матрицы $\widetilde{W}(\lambda)$, образующих базис из правых полиномиальных решений матрицы $W_0^T(\lambda)$.

(4) Вычисляется ΔW-1 разложение матрицы $\widetilde{W}_0(\lambda)$:

$$\widetilde{W}_0(\lambda)\widehat{W}(\lambda) = \Delta_1(\lambda).$$

Тогда столбцы $\Delta_1(\lambda)$ образуют искомый минимальный базис.

Для обоснования алгоритма сначала покажем, что столбцы $\widetilde{W}_0(\lambda)$ образуют базис $X[\lambda]$, который отличается от искомого минимального базиса разве лишь наличием у $\widetilde{W}_0(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$ особенности типа нуль.

Действительно, транспонируя равенство (3.1.6), получим

$$W^T(\lambda)P(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta^T(\lambda) \\ \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

так что $W_0^T(\lambda)P(\lambda) = 0$, т.е. столбцы $P(\lambda)$ принадлежат подпространству, натянутому на столбцы матрицы $\widetilde{W}_0(\lambda)$. Но $\dim \widetilde{W}_0(\lambda) = \rho$ совпадают с $\dim P(\lambda) = \rho$. Отсюда столбцы $\widetilde{W}_0(\lambda)$ образуют базис $X(\lambda)$. Матрица $\widetilde{W}_0(\lambda)$, составленная из столбцов унимодулярной матрицы, не имеет конечных собственных значений. Перестройка базиса $\widetilde{W}_0(\lambda)$ в минимальный осуществляется операцией (4), где находится $n \times \rho$ матрица $\Delta_1(\lambda)$, столбцы которой (в силу замечания 3.1) образуют искомый минимальный базис подпространства $X(\lambda)$.

Замечание. Алгоритм может быть применен к любой заданной последовательности полиномиальных векторов, не обязательно линейно независимых, для выбора из них полиномиальных векторов, линейно независимых над кольцом скалярных полиномов с последующей перестройкой в минимальный базис подпространства, ими определяемого. Справедливость следует из свойств ΔW-1 разложения. Так в операции (2) алгоритма вычисление рангового сечения не накладывает ограничений на матрицу $P(\lambda)$ (столбцы ее могут быть линейно зависимыми).

3.1.7. Преобразование регулярной полиномиальной матрицы к квазитреугольной форме.

Пусть $D(\lambda)$ есть $n\times n$ регулярная полиномиальная матрица (в частности, $D(\lambda)$ есть регулярная часть сингулярной полиномиальной матрицы). Задача состоит в применении ΔW-1 алгоритма для преобразования $D(\lambda)$ к эквивалентной ей матрице квазитреугольной формы (в частности, треугольной). Это позволит вычисление конечных собственных значений $D(\lambda)$ свести к вычислению собственных значений нескольких матриц, меньших порядков. С этой целью матрицу $D(\lambda)$ представим в блочном виде

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} D_p(\lambda) \\ D_q(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь $D_p(\lambda)$ и $D_q(\lambda)$ – матрицы размеров $p\times n$ и $q\times n$ $(p+q=n)$, из которых, по крайней мере, одна имеет степень s. Далее, например, к $D_p(\lambda)$ применим ΔW-1 алгоритм. Имеем

$$D_p(\lambda)W_p(\lambda) = \left[\Delta_p(\lambda), \mathbb{O}\right],$$

где по построению $\Delta_p(\lambda)$ есть $p\times\rho$ полного столбцового ранга матрица степени не выше s, не имеющая бесконечного собственного значения. Покажем, что $\Delta_p(\lambda)$ есть регулярная матрица.

Действительно, матрица $D_p(\lambda)$ как блок регулярной матрицы $D(\lambda)$ имеет p линейно независимых строк. Тогда ρ – ранг $D_p(\lambda)$ не больше p. Покажем, что $\rho = p$. Для этого представим в блочном виде матрицу

$$D(\lambda)W_p(\lambda) = \begin{bmatrix} D_p(\lambda) & W_p(\lambda) \\ D_q(\lambda) & W_q(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \Delta_{pp}(\lambda) & \mathbb{O} \\ \underbrace{\Delta_{qp}(\lambda)}_{p} & \underbrace{\Delta_{qq}(\lambda)}_{q} \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}p \\ \}q \end{array}.$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевой $p\times q$ блок; $\Delta_{pp}(\lambda)$ и $\Delta_{qq}(\lambda)$ – блоки $p\times p$ и $q\times q$, соответственно. Доказательство проводим от противного.

Пусть $\rho < p$. Тогда $p - \rho$ последних столбцов матрицы $\Delta_{pp}(\lambda)$ должны быть нулевыми, так что $\det \Delta_{pp}(\lambda) \equiv 0$ при любом λ, что невозможно, ибо

$$\det D(\lambda) = \det \Delta_{pp}(\lambda) \det \Delta_{qq}(\lambda),$$

а $D(\lambda)$ по условию регулярная матрица. Противоречие доказывает, что $\rho = p$, т.е. $\Delta_{pp}(\lambda) = \Delta_p(\lambda)$ есть регулярная матрица.

Одновременно задачу вычисления собственных значений для исходной регулярной $n \times n$ матрицы свели к аналогичной задаче для двух регулярных матриц $\Delta_{pp}(\lambda)$ и $\Delta_{qq}(\lambda)$ размеров $p \times p$ и $q \times q$ соответственно. При необходимости разбиение $\Delta_{pp}(\lambda)$ и $\Delta_{qq}(\lambda)$ на блоки меньших размеров можно продолжить.

Если положить $p = n - 1$, $q = 1$, то в результате первого шага алгоритма выделим блок $\Delta_{11}(\lambda)$ размеров 1×1, который есть скалярный полином степени t $(0 \leqslant t \leqslant ns)$. Корни $\Delta_{11}(\lambda) = 0$ совпадают с собственными значениями $D(\lambda)$. Дальнейшее выделение скалярных полиномов, корни которых являются одновременно собственными значениями $D(\lambda)$, можно продолжить, применяя алгоритм к $\Delta_p(\lambda)$ и т.д.

Замечание. При разбиении $D(\lambda)$ на блоки $D_p(\lambda)$ и $D_q(\lambda)$ мы не накладывали никаких ограничений на p и q (кроме $p+q = n$). При произвольном разбиении может случиться, что $D_p(\lambda)$ не имеет конечных собственных значений. В этом случае $\Delta_{pp}(\lambda)$ есть постоянная неособенная матрица. Степень t матрицы $\Delta_{qq}(\lambda)$ будет определяться из соотношения $qt + 0 \cdot p = ns$. Хотя порядок $\Delta_{qq}(\lambda)$ уменьшится, его степень увеличится, так как число собственных значений исходной матрицы, равное ns, совпадает в рассматриваемом случае с числом собственных значений $\Delta_{qq}(\lambda)$.

Отсюда следует, что разбиение исходной матрицы $D(\lambda)$, на $D_p(\lambda)$ и $D_q(\lambda)$ будет целесообразным, если каждый из них будет иметь конечные спектры. Этот факт заранее предвидеть трудно. Он устанавливается в процессе ΔW-1 факторизации $D_p(\lambda)$ (или $D_q(\lambda)$). В частном случае, при $p = 1$, $q = n - 1$ $\Delta_{pp}(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda)$ будет скалярным многочленом, отличным от const только в том случае, если все компоненты вектора-строки, которым является $D_p(\lambda) = D_1(\lambda)$, будут иметь нетривиальный общий наибольший делитель.

Другой крайний случай разбиения $p = n - 1$, $q = 1$ даст матрицу $\Delta_{qq}(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda)$, совпадающую со скалярным многочленом степени ns, только в том случае, если $D_p(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)$ не будет иметь конечного спектра.

В общем случае числа p и q связаны соотношением $pt_p + qt_q = ns$, где t_p и t_q – степени матриц $\Delta_{pp}(\lambda)$ и $\Delta_{qq}(\lambda)$ соответственно.

Описанный алгоритм можно рассматривать как алгоритм приведения регулярной матрицы к эквивалентной ей треугольной полиномиальной матрице

$$D(\lambda)W_1(\lambda)W_2(\lambda)\dots W_{n-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} d_{11}(\lambda) & & & \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n,1}(\lambda) & d_{n,2}(\lambda) & \dots & d_{n,n}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь $W_k(\lambda) = \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \widehat{W}_k(\lambda) \end{smallmatrix}\right]$ – унимодулярная матрица, блок $\widehat{W}_k(\lambda)$ которой осуществляет ΔW-1 разложение полиномиальной матрицы-строки из элементов преобразуемой матрицы, стоящих в позициях (k,k), $(k,k+1)$, ..., (k,n). Конечный спектр матрицы $D(\lambda)$ есть объединение корней скалярных полиномов $d_{11}(\lambda), \dots, d_{nn}(\lambda)$.

3.1.8. Обращение полиномиальных матриц.

Ниже рассматриваются обращения полиномиальных матриц, обратные для которых также являются полиномиальными матрицами.

3.1.8.1. Обращение унимодулярной матрицы.

Для обращения унимодулярной матрицы $U(\lambda)$ выполняются следующие операции.

(1) Находится ΔW-1 разложение матрицы $U(\lambda)$

$$U(\lambda)W(\lambda) = \Delta(\lambda) = \Delta.$$

Здесь $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица, осуществляющая ΔW-1 разложение матрицы $U(\lambda)$; $\Delta(\lambda) \equiv \Delta$ – постоянная неособенная матрица, так как по свойствам ΔW-1 алгоритма она не имеет конечных собственных значений и особенности типа нуль на бесконечности.

(2) Находится матрица Δ^{-1}.

(3) Вычисляется искомая матрица

$$U^{-1}(\lambda) = W(\lambda)\Delta^{-1}.$$

3.1.8.2. Вычисление левой обратной матрицы.

Пусть $V(\lambda)$ есть $n\times t$ полиномиальная матрица полного столбцового ранга, не имеющая конечных собственных значений. Для вычисления левой обратной матрицы $V_l^{-1}(\lambda)$ $(V_l^{-1}(\lambda)V(\lambda) = I)$ выполняются следующие операции.

(1) Находится ΔW-1 разложение матрицы $V^T(\lambda)$

$$V^T(\lambda)W(\lambda) = \big[\Delta(\lambda), \mathbb{O}\big].$$

Здесь матрица $\Delta(\lambda)$ есть $t \times t$ унимодулярная, что следует из свойств ΔW-1 разложения; $W(\lambda) = [W_1(\lambda), W_0(\lambda)]$ – ранговое сечение $W(\lambda)$.

(2) Вычисляется унимодулярная матрица $\Delta^{-1}(\lambda)$.

(3) Вычисляется искомая матрица

$$V_l^{-1}(\lambda) \equiv \Delta^{-T}(\lambda)W_1^T(\lambda).$$

Справедливость устанавливается непосредственной проверкой.

§3.2. ZW-разложение и его свойства [7]

3.2.1. Алгоритм ZW-разложения.

Для полиномиальной $m\times n$ матрицы $D(\lambda)$ ранга ρ степени $s \geqslant 1$ рассмотрим разложение вида

$$\theta D(\lambda)W(\lambda) = \big[Z_0(\lambda), \mathbb{O}\big]. \tag{3.2.1}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица; $Z_0(\lambda)$ – полиномиальная $m \times \rho$ матрица ранга ρ, имеющая следующее строение:

$$Z_0(\lambda) =$$

$$\begin{bmatrix}
p_1(\lambda) & & & & \\
z_{21}(\lambda) & p_2(\lambda) & & & \\
\vdots & \ddots & & & \\
\dots & \dots & p_{N_1-1}(\lambda) & & \\
\vdots & & \ddots & & \\
\dots & \dots & \dots & \lambda^l p_{N_l}(\lambda) & \\
\vdots & & & \ddots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \lambda^l p_{N_{l+1}-1}(\lambda) \\
z_{m1}(\lambda) & z_{m2}(\lambda)\dots & z_{m,N_1-1}(\lambda)\dots & z_{m,N_l}(\lambda)\dots & z_{m,N_{l+1}-1}(\lambda)
\end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

Столбцы $Z_0(\lambda)$ можно разбить на $(l+1)$ группу* с числом $N_{j+1} - N_j \geqslant 0$ столбцов в j-ой группе $(j = 0, 1, \dots, l)$ $N_0 = 1$ и элементами

*Если $\lambda = 0$ не является собственным значением $D(\lambda)$, то $Z_0(\lambda)$ имеет только одну столбцовую группу с номером $j = 0$.

$z_{pq}(\lambda)$ вида: $z_{pq}(\lambda)=0$ при $p<q$; $z_{pq}(\lambda)=\lambda^j\widehat{z}_{pq}(\lambda)$ при $p>q$, где $\widehat{z}_{pq}(\lambda)$ – скалярный полином, не делящийся на λ; $\widehat{z}_{qq}(\lambda)\equiv p_q(\lambda)=\sum\limits_{t=0}^{\tau_q}\lambda^t p_q^{(t)}$ при $p=q$. При этом выполняются неравенства

$$p_{N_j}^{(0)}\geqslant p_{N_{j+1}}^{(0)}\geqslant\dots\geqslant p_{N_{j+1}-1}^{(0)}; \tag{3.2.3}$$

θ – матрица перестановок; $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица, которая есть произведение элементарных ортогональных матриц плоских вращений T_{ij} и элементарных матриц вида $I+\lambda\widehat{V}_{ij}$, где $\widehat{V}_{ij}$ отличается от нулевой матрицы скаляром $\alpha_{ij}\neq 0$ в позиции (i,j).

Разложение (3.2.1) в дальнейшем будем называть ZW – разложением. Ниже предлагается алгоритм ZW-разложения (ZW-алгоритм). В основе алгоритма лежит следующая лемма.

Лемма 3.1. *Любой вектор-строка* $a(\lambda)$, *компоненты которого скалярные полиномы, с помощью умножения справа на цепочки матриц* T_{ij} *и* V_{ij} *может быть преобразован в вектор* $(\rho(\lambda),0,\dots,0)$, *коллинеарный вектору* $(1,0,\dots,0)$. *При этом коэффициент при наименьшей степени* λ *сохраняет свою длину.*

Доказательство. Без умаления общности все компоненты в исходном векторе считаем полиномами одной степени от λ, вводя при необходимости нулевые коэффициенты.

Пусть $a(\lambda)=\bigl(p_1^{(k)}(\lambda),\dots,p_n^{(k)}(\lambda)\bigr)$, $p_i^{(k)}(\lambda)=a_i^k\lambda^k+\dots+a_i^0$, $i=1,\dots,n$. Переход от $a(\lambda)$ к $(\rho(\lambda),0,\dots,0)$ состоит из конечного числа шагов. Каждый шаг понижает на единицу степень преобразуемого вектора.

Опишем типичный (первый) шаг. Зануление коэффициентов a_i^k, $i=n,\dots,2$ проводится с помощью умножения справа на цепочку матриц вращения $T_{n-1,n},\ \dots\ ,T_{12}$. В результате получим

$$\begin{aligned}&a(\lambda)\prod_{i=n}^{2}T_{i-1,i}\prod_{i=n}^{3}T_{i-1,i}=\\&\bigl(p_1^k(\lambda),p_2^{k-1}(\lambda),p_3^{k-2}(\lambda),\dots,p_n^{k-2}(\lambda)\bigr).\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Шаг заканчивается выравниванием степеней полиномов у преобразуемого вектора (3.2.4) и осуществляется умножением его справа на матрицу $V_{21}(\lambda)$, где $\alpha_{21}=-a_1^k\big/a_2^{k-1}$. В результате получаем вектор $\bigl(p_1^{k-1}(\lambda),\dots,p_n^{k-1}(\lambda)\bigr)$. Процесс заканчивается, когда преобразуемый вектор примет вид $\big(\rho(\lambda), 0, \dots, 0\big)$. Для завершения доказательства леммы запишем исходный вектор $a(\lambda)$ в виде

$$a(\lambda) = \big(a_1^k, \dots, a_n^k\big)\lambda^k + \big(a_1^{k-1}, \dots, a_n^{k-1}\big)\lambda^{k-1} + \dots + \big(a_1^{n_1}, \dots, a_n^{n_1}\big)\lambda^{n_1},$$

где $n_1 \geqslant 0$. Умножение $a(\lambda)$ на ортогональную матрицу T_{ij} не меняет длин векторов $(a_1^t, \dots, a_n^t)$, $t = k, \dots, n$. Непосредственной проверкой устанавливается*, что умножение $a(\lambda)$ на матрицу $V_{ij}(\lambda)$ сохраняет также длину вектора $(a_1^{n_1}, \dots, a_n^{n_1})$, стоящего при наименьшей степени λ.

Рассмотрим алгоритм ZW-разложения. Для этого опишем процесс образования группы с номером j, предполагая, что группы с номерами $q < j$ уже построены, т.е. получена матрица

$$A(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} \ddots & \mathbb{O} \\ * & \dots\dots \\ & \vdots B(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая матрица; звездочкой $*$ обозначена матрица, с точностью до перестановок строк составленная из столбцов групп с номерами $q = 0, \dots, j-1$ матрицы Z_0; $B(\lambda) = \sum\limits_{i=n_j}^{r_j} \lambda^i A_i$ – полиномиальная матрица, подлежащая преобразованию.

Вычисление столбцов группы с номером $q = j$ состоит из r_j шагов, где r_j – ранг A_{n_j}, стоящей при наименьшей степени λ в матричном полиноме $B(\lambda)$.

Рассмотрим типичный (первый) шаг. Среди строк матрицы A_{n_j} выбирается номер строки, имеющей максимальную длину, и делается перестановка строк преобразуемой матрицы $A(\lambda)$ так, чтобы строка с выбранным номером была ведущей для $B(\lambda)$. После этого с помощью алгоритма, описанного в лемме, ведущая строка $B(\lambda)$ приводится к требуемому виду $\big(\rho(\lambda), 0, \dots, 0\big)$. На этом заканчивается образование первого столбца из группы с номером $q = j$. Для образования следующих $2, 3, \dots, r_j$ столбцов этой группы поступаем аналогичным образом, беря на каждом шаге в качестве $B(\lambda)$ матрицу, которая получается вычеркиванием из преобразуемой матрицы первой строки и первого столбца.

---

*Это свойство будет использовано при выборе матрицы перестановок в алгоритме ZW – разложения, обеспечивающего выполнение неравенств (3.2.3).

Процесс образования группы с номером $q = j$ заканчивается на шаге $r_j + 1$, когда $\left|\left|A_{n_j}\right|\right|_\infty = 0$.

Для образования столбцов матрицы $Z_0(\lambda)$, принадлежащих группе $q = j + 1$, исходной является матрица $B(\lambda) = \sum\limits_{i=n_{j+1}}^{j} \lambda^i A_i$, полученная на шаге $r_j + 1$, и процесс проводится аналогично. Построение матрицы $Z_0(\lambda)$ вида (3.2.2) заканчивается, когда $B(\lambda)$ есть нулевая матрица.

3.2.2. Свойства ZW-разложения.

1^0. *ZW-разложение $m \times n$ ранга ρ полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ позволяет находить унимодулярный базис $W_0(\lambda)$ нуль-пространства из правых полиномиальных решений $D(\lambda)$ и его унимодулярное дополнение $W_1(\lambda)$ до всего векторного пространства $\mathbb{C}^n[\lambda]$. Другими словами, ZW-разложение реализует ранговое сечение пространства $\mathbb{C}^n[\lambda]$, в котором действует оператор $D(\lambda)$.*

Действительно, применив ZW-разложение $D(\lambda)$, получим

$$\theta D(\lambda) W(\lambda) = \left[Z_0(\lambda), \mathbb{O}\right],$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $n \times (n - \rho)$ матрица. Тогда столбцы блоков $W_1(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$, составленных из первых ρ и последних $(n - \rho)$ столбцов унимодулярной матрицы $W(\lambda)$ дадут искомые базисы. Блочное представление $W(\lambda) = \left[W_1(\lambda), W_0(\lambda)\right]$ будем называть ранговым сечением $W(\lambda)$.

2^0. Пусть полиномиальные матрицы $M_1(\lambda)$ и $M_2(\lambda)$ определяют вложение подпространств

$$\mathbb{C}^n[\lambda] \supseteq M_1(\lambda) \supseteq M_2(\lambda).$$

ZW-разложение, последовательно примененное сначала к матрице $M_1^H(\lambda)$:

$$\theta_1 M_1^H(\lambda) W^{(1)}(\lambda) = \left[Z_{01}(\lambda), \mathbb{O}\right] \qquad W^{(1)}(\lambda) = \left[W_{11}(\lambda), W_{01}(\lambda)\right],$$

затем к матрице $M_3^H(\lambda) = \left[W_{01}(\lambda), M_2(\lambda)\right]^H$:

$$\theta_3 M_3(\lambda) W^{(3)}(\lambda) = \left[Z_{03}(\lambda), \mathbb{O}\right] \qquad W^{(3)}(\lambda) = \left[W_{13}(\lambda), W_{03}(\lambda)\right]$$

позволяет находить $W_{03}(\lambda)$ – базис унимодулярного дополнения подпространства $M_2(\lambda)$ до подпространства $M_1(\lambda)$.

3^0. *ZW-разложение, примененное к матрице*

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \left[A_1(\lambda), \ldots, A_k(\lambda)\right]^B$$

(где $A_i(\lambda)$ есть $m \times n_i$ полиномиальная матрица), позволяет находить унимодулярный базис пересечения нуль-пространств из правых полиномиальных решений матриц $A_1(\lambda), \ldots, A_k(\lambda)$.

4^0. *ZW-разложение позволяет находить унимодулярные матрицы $W_1(\mu)$ и $W_2(\mu)$, осуществляющие преобразование произвольного пучка*

$$D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$$

полиномиальных матриц (из которых, по крайней мере, одна имеет неполный ранг) в эквивалентный пучок квазитреугольной формы:

$$W_2^H(\mu) D(\lambda, \mu) W_1(\mu) = \begin{bmatrix} D_{11}(\lambda, \mu) & D_{12}(\lambda, \mu) \\ \mathbb{O} & D_{22}(\lambda, \mu) \end{bmatrix}.$$

В качестве матриц $W_1(\mu)$ и $W_2(\mu)$ надо взять унимодулярные матрицы, осуществляющие ZW-разложение соответственно матриц $X^H(\mu)$ и $[B(\mu)X(\mu)]^H$, где $X(\mu)$ – матрица, столбцы которой образуют нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы $A(\mu)$.

Перечисленные выше 1^0–4^0 свойства являются следствием ZW-алгоритма, как алгоритма рангового сечения пространства, в котором действует оператор $D(\lambda)$. Они идентичны свойствам ΔW-1 алгоритма из 3.1.3 и доказываются аналогично.

5^0. *Собственные значения матрицы $D(\lambda)$ являются корнями скалярных полиномов, которые суть диагональные элементы матрицы $Z_0(\lambda)$. При этом, если $Z_0(\lambda)$ есть треугольная матрица, то конечные спектры матриц $D(\lambda)$ и $Z_0(\lambda)$ совпадают.*

6^0. *Структурные индексы $D(\lambda)$, соответствующие ее конечному собственному значению λ_*, совпадают со структурными индексами, соответствующими тому же собственному значению λ_* матрицы $Z_0(\lambda)$.*

7^0. *Число столбцов $(N_{j+1} - N_j)$ матрицы $Z_0(\lambda)$ из группы j совпадают с числом элементарных делителей степени j, соответствующих нулевому собственному значению матрицы $D(\lambda)$.*

Справедливость свойств 5^0, 6^0 следует из эквивалентности матриц $D(\lambda)$ и $Z(\lambda) \equiv [Z_0(\lambda), \mathbb{O}]$ в разложении (3.2.1).

Докажем свойство 7^0. По построению элементы $Z_0(\lambda)$ имеют вид

$$z_{iq}(\lambda) = \lambda^{n_q} \widehat{z}_{iq}(\lambda)$$
$$n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_{N_{l+1}-1}, \; 1 \leqslant q \leqslant N_{l+1} - 1, \; q \leqslant i = n, \qquad (3.2.5)$$

где $\widehat{z}_{iq}(\lambda)$ – полином, не делящийся на λ. С учетом строения $Z_0(\lambda)$ имеем

$$Z_0\begin{pmatrix}1,\dots,t\\1,\dots,t\end{pmatrix} = \lambda^{n_1+\dots+n_t}p_1(\lambda)\dots p_t(\lambda) \equiv \lambda^{l_t}k_t(\lambda), \qquad (3.2.6)$$

где $l_t = \sum\limits_{j=1}^{t} n_j$, $\quad k_t(\lambda)$ – полином, не делящийся на λ.

Покажем, что любой другой минор $Z_0\left(\begin{smallmatrix}i_1\dots i_t\\ \eta_1\dots\eta_t\end{smallmatrix}\right)$ порядка t делится на λ^{l_t} при $1 \leqslant \eta_1$, $2 \leqslant \eta_2$, $\dots$, $t \leqslant \eta_t$. Действительно, каждое слагаемое разложения Лапласа такого минора имеет вид

$$z_{\xi_1\eta_1}(\lambda)z_{\xi_2\eta_2}(\lambda)\dots z_{\xi_t\eta_t}(\lambda). \qquad (3.2.7)$$

В силу (3.2.5) все элементы столбцов $Z_0(\lambda)$ с номерами не меньшими γ $(\gamma = 1,\dots,t)$ делятся соответственно на λ^{n_j}. Отсюда $z_{\xi_1\eta_1}(\lambda)$ делится на λ^{n_1}, $z_{\xi_2\eta_2}(\lambda)$ делится на λ^{n_2}, $\dots$, $z_{\xi_t\eta_t}(\lambda)$ делится на λ^{n_t}, так что каждое слагаемое вида (3.2.7) делится на $\lambda^{n_1+\dots+n_t} \equiv \lambda^{l_t}$. Отсюда весь минор делится на λ^{l_t}. Следовательно, $b_t(\lambda)$ – общий наибольший делитель всех миноров порядка t матрицы $Z_0(\lambda)$ имеет вид

$$b_t(\lambda) = \lambda^{l_t}\overline{k}_t(\lambda),$$

где $\overline{k}_t(\lambda)$ – полином, не делящийся на λ. По определению делители отношения $b_t(\lambda)/b_{t-1}(\lambda)$ суть элементарные делители матрицы $Z_0(\lambda)$:

$$b_t(\lambda)/b_{t-1}(\lambda) = \lambda^{l_t-l_{t-1}}\overline{k}_t(\lambda)/\overline{k}_{t-1}(\lambda) = \lambda^{n_t}\overline{k}_t(\lambda)/\overline{k}_{t-1}(\lambda).$$

Учитывая, что при $N_j \leqslant t \leqslant N_{j+1} - 1$ имеет место равенство $\lambda^{n_t} = \lambda^j$, получим следующий набор структурных индексов, соответствующих нулевому собственному значению $Z_0(\lambda)$:

$$S[Z_0, 0] = \{\underbrace{0,\dots,0}_{N_1-N_0}, \underbrace{1,\dots,1}_{N_2-N_1}, \underbrace{2,\dots,2}_{N_3-N_2}, \dots, \underbrace{l,\dots,l}_{N_{l+1}-N_l}, \}.$$

Отсюда следует

$$\sigma^0 = \{\sigma_{00}, \sigma_{10}, \dots, \sigma_{l0}\} \equiv \{N_1 - N_0, N_2 - N_1, \dots, N_{l+1} - N_l\},$$

что и доказывает свойство 7^0.

3.2.3. Применение ZW-алгоритма к решению спектральных задач.

3.2.3.1. Выделение регулярной части.

Пусть $D(\lambda)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ. Для выделения регулярной части из $D(\lambda)$ следует осуществить ZW-разложение последовательно двух матриц:

$$\theta_1 D(\lambda) W_1(\lambda) = \big[Z_{01}(\lambda), \mathbb{O}\big] \tag{3.2.8}$$

и

$$\theta_2 Z_{01}^T(\lambda) W_2(\lambda) = \big[Z_{02}(\lambda), \mathbb{O}\big]. \tag{3.2.9}$$

Полиномиальная матрица $Z_{02}^T(\lambda)$ является регулярной частью $D(\lambda)$ и является по построению треугольной порядка ρ.

Действительно, из равенств (3.2.8) и (3.2.9) имеем

$$W_2^T(\lambda)\theta_1 D(\lambda) W_1(\lambda)\theta_2^T = \text{block diag}\left\{Z_{02}^T(\lambda), \mathbb{O}_{(m-\rho)\times(n-\rho)}\right\}. \tag{3.2.10}$$

Отсюда следует справедливость утверждения.

Заметим, что выделение регулярной части $D(\lambda)$ не требует ни вычисления унимодулярных матриц $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$, ни предварительного знания ранга ρ исходной матрицы $D(\lambda)$.

3.2.3.2. Вычисление минимальных базисов.

Вычисление минимальных базисов из левых и правых полиномиальных решений $D(\lambda)$ осуществляется в два этапа. На первом этапе вычисляются унимодулярные матрицы $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ разложений (3.2.8) и (3.2.9). Пусть $W_1(\lambda) = [W_{11}(\lambda), W_{10}(\lambda)]$, $W_2(\lambda) = [W_{21}(\lambda), W_{20}(\lambda)]$ суть ранговое сечение матриц $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ соответственно, так что столбцы $W_{10}(\lambda)$ и строки $W_{20}(\lambda)$ образуют базисы правого и левого нуль-пространства из полиномиальных решений $D(\lambda)$.

На втором этапе базисы $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ перестраиваются в минимальные базисы путем удаления из них собственных значений. Учитывая, что $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ составлены из столбцов унимодулярных матриц, а следовательно, не имеют конечных собственных значений, для формирования минимальных базисов достаточно из $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ удалить бесконечные собственные значения. Это можно осуществить, например, применяя ΔW-1 алгоритм к матрицам $W_{10}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$. Так, пусть

$$W_{10}(\lambda)\widehat{W}_1(\lambda) = \widehat{W}_{10}(\lambda) \qquad \text{и} \qquad W_{20}(\lambda)\widehat{W}_2(\lambda) = \widehat{W}_{20}(\lambda)$$

есть ΔW-1 разложения этих матриц. Тогда столбцы $\widehat{W}_{10}(\lambda)$ и строки $\widehat{W}_{20}^T(\lambda)$ дадут искомые минимальные базисы из правых и левых полиномиальных решений $D(\lambda)$, соответственно.

3.2.3.3. Вычисление конечных собственных значений $D(\lambda)$ и определение их структурных индексов.

Считаем $D(\lambda)$ регулярной и $Z_0(\lambda)$ – треугольной матрицами, так как в противном случае можем из $D(\lambda)$ выделить регулярную часть, имеющую, как установлено выше, треугольную форму. Тогда корни диагональных элементов матрицы $Z_0(\lambda)$ дают весь конечный спектр матрицы $D(\lambda)$. Структурные индексы, соответствующие собственному значению λ_* матрицы $D(\lambda)$, совпадают со структурными индексами, соответствующими тому же собственному значению λ_* матрицы $Z_0(\lambda)$. Не умаляя общности, λ_* можно считать нулевым собственным значением. В противном случае в $D(\lambda)$ делаем замену переменных $\lambda := \lambda + \lambda_*$. По свойству 4^0 ZW – разложения $D(\lambda)$, строение матрицы $Z_0(\lambda)$ определяет структурные индексы нулевого собственного значения, т.е. имеет место соотношение

$$\{N_1 - N_0, N_2 - N_1, \ldots, N_{l+1} - N_l\} \equiv \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l\},$$

где σ_j – число структурных индексов, равных j, соответствующих нулевому собственному значению $D(\lambda)$. Образуем матрицу

$$\widehat{Z}_0(\lambda) = Z_0(\lambda)\mathrm{diag}\{I_{\sigma_{00}}, \lambda^{-1} I_{\sigma_{10}}, \ldots, \lambda^{-l} I_{\sigma_{l0}}\}.$$

Очевидно, $\widehat{Z}_0(\lambda)$ не имеет нулевого собственного значения: ни одна группа из ее столбцов с номером j $(j = 0, \ldots, l)$ не содержит множителем λ^j.

На основе сказанного предлагается следующий алгоритм вычисления структурных индексов.

(1) Реализуется ZW-разложение $D(\lambda)$ и определяются структурные индексы точки $\lambda = 0$.

(2) Если $\lambda = 0$ есть собственное значение $Z_0(\lambda)$, то формируется матрица $\widehat{Z}_0(\lambda)$ путем исчерпывания нулевого собственного значения из $Z_0(\lambda)$.

(3) Вычисляется ZW-разложение матрицы $\widehat{Z}_0^T(\lambda)$:

$$\theta \widehat{Z}_0^T(\lambda) W(\lambda) = [\widehat{Z}_1(\lambda), \mathbb{O}],$$

где $\widehat{Z}_1(\lambda)$ – регулярная порядка ρ треугольная матрица степени $s_1 \leqslant s$, не имеющая нулевого собственного значения.

(4) Находятся корни диагональных элементов матрицы $\widehat{Z}_1(\lambda)$. Пусть они пронумерованы в порядке неубывания

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_j| \qquad j \leqslant \rho s_1.$$

(5) Делается замена переменных $\lambda := \lambda + \lambda_1$ в матрице $\widehat{Z}_1(\lambda)$ и вычисляется ZW-разложение полученной матрицы $\widehat{Z}_1(\lambda + \lambda_1) \equiv D_1(\lambda)$:

$$\theta_1 D_1(\lambda) W_1(\lambda) = Z_0^{(1)}(\lambda).$$

Используя свойство 4^0, определяются структурные индексы собственного значения $\lambda = 0$ матрицы $Z_0^{(1)}(\lambda)$. Эти индексы совпадают с искомыми структурными индексами собственного значения λ_1 матрицы $D(\lambda)$.

(6) Строится полиномиальная матрица $\widehat{Z}_0^{(1)}(\lambda)$ путем исчерпывания нулевого собственного значения матрицы $Z_0^{(1)}(\lambda)$. Пусть λ_i^1 собственные значения матрицы $\widehat{Z}_0^{(1)}(\lambda)$, причем $0 < |\lambda_1^1| \leqslant |\lambda_2^1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{j-1}^1|$, где $\lambda_{i_1}^1 = \lambda_{i+1} - \lambda_1$.

Повторением операций (5) и (6) аналогично проводится определение структурных индексов собственных значений матрицы $\widehat{Z}_0^{(1)}(\lambda)$.

3.2.3.4. Вычисление жордановых цепочек.

Покажем, как найти собственные векторы и жордановы цепочки векторов, соответствующих вычисленному собственному значению λ_* матрицы $D(\lambda)$. Не умаляя общности, считаем $\lambda_* = 0$. Для вычисления искомых векторов следует к $D(\lambda)$ применить ZW-алгоритм

$$\theta D(\lambda) W(\lambda) = \big[Z_0(\lambda), \mathbb{O}\big]. \tag{3.2.11}$$

Запишем $Z_0(\lambda)$ в блочном виде

$$Z_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Z_{11}(\lambda) & & & \\ Z_{21}(\lambda) & \lambda Z_{22}(\lambda) & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ddots & \\ Z_{l1}(\lambda) & Z_{l2}(\lambda) & \ldots & \lambda^{l-1} Z_{ll}(\lambda) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Z_{p1}(\lambda) & Z_{p2}(\lambda) & \ldots & \lambda^{l-1} Z_{pl}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где Z_{ii}, $i = 1, \ldots, l$ – левые треугольные порядка $\rho_i \equiv \sigma_{i-1}^0$ матрицы, регулярные в точке $\lambda = 0$. Здесь σ_{i-1}^0 – число элементарных делителей $D(\lambda)$ вида λ^{i-1}. Если $D(\lambda)$ имеет полный строчный ранг, то $p = l$. В противном случае $Z_0(\lambda)$ – левая трапецеидальная матрица ($p = l + 1$). Обозначим $W_j(\lambda)$ и $Z_j(\lambda)$ ($j = 1, \ldots, n$) столбцы матриц $W(\lambda)$ и $Z_0(\lambda)$, соответственно, и пусть $t_i = \sum\limits_{k=1}^{j} \rho_k$,

$t_0 = 0$. Тогда с точностью до перестановок строк из (3.2.11) имеем

$$D(\lambda)W_i(\lambda) = \lambda^{j-1}Z_i(\lambda) \qquad t_{j-1} \leqslant i \leqslant t_j \qquad j = 0, \dots, l.$$

Это равенство $(j-1)$ раз продифференцируем, вычислив в точке $\lambda = 0$ производные до $(j-1)$ порядка. Имеем

$$D(0)W_i(0) = 0$$

$$D^{(1)}(0)W_i(0) + D(0)W_i^{(1)}(0) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{(j-2)!}\,D^{(j-2)}(0)W_i(0) + \frac{1}{(j-3)!} \quad D^{(j-3)}(0)\frac{W_i^{(1)}(0)}{1!} + \dots + D(0)\frac{W^{(j-2)}(0)}{(j-2)!} = 0$$

$$\frac{1}{(j-1)!}\,D^{(j-1)}(0)W_i(0) + \frac{1}{(j-2)!} \quad D^{(j-2)}(0)\frac{W_i^{(1)}(0)}{1!} + \dots + D(0)\frac{W^{(j-1)}(0)}{(j-1)!} = Z_i(0) \neq 0.$$

Обозначим $x_{k+1} = \frac{1}{k1}\,W_i^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \dots, j-1$. Тогда в новых обозначениях последние равенства примут вид

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!}\,D^{(k)}(0)x_{r-k+1} = 0 \qquad r = 0, 1, \dots, j-2$$

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!}\,D^{(k)}(0)x_{j-k} \neq 0.$$

Отсюда векторы $x_{k+1} = \frac{1}{k!}\,W_i^{(k)}(0) \quad k = 0, 1, \dots, j-1$ образуют правые жордановы цепочки длины $(j-1)$, $j = 2, \dots, l$, соответствующие нулевому собственному значению матрицы $D(\lambda)$. Количество цепочек длины $(j-1)$ равно $\rho_j \equiv \sigma_{j-1,0}$.

§3.3. DQ-разложение и его свойства

Ниже ррассматриваются алгоритмы построения минимального базиса из правых полиномиальных решений полиномиальной матрицы произвольной целой степени, отличные от алгоритмов, строящихся на базе ΔW-1 или ZW разложений и использующих унимодулярные матрицы. В основе предлагаемых в этом параграфе алгоритмов лежит так называемое DQ разложение полиномиальной матрицы, не требующее применений унимодулярных матриц.

3.3.1. Алгоритм DQ разложения.

Для полиномиальной $m \times n$ матрицы

$$D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \cdots + \lambda^s C_s$$

степени $s \geqslant 1$ ранга ρ рассмотрим разложение

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) Q_0^T, \tag{3.3.1}$$

где Q_0 есть $n \times \rho$ постоянная матрица из ортонормированных столбцов; $D_1(\lambda)$ есть $m \times \rho$ полиномиальная матрица степени s, не имеющая правых полиномиальных решений нулевой степени. Правые нулевой степени решения $D(\lambda)$ образуют базис P_0 правого нуль-пространства постоянной матрицы Q_0^T. Все левые векторные и скалярные спектральные характеристики матриц $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ идентичны, тогда как правые векторные характеристики (полиномиальные решения и жордановы цепочки) связаны соотношениями

$$x^{(1)} = Q_0^T x \qquad x = Q_0 x^{(1)}.$$

В дальнейшем равенство (3.3.1) будем называть DQ разложением матрицы $D(\lambda)$, а алгоритм, его реализующий, DQ алгоритмом. Последний состоит в выполнении следующих операций.

(1) По коэффициентам $D(\lambda)$ формируется постоянная $(s+1)m \times n$ матрица

$$D := \big[C_0\ C_1 \ldots C_s\big]^B.$$

(2) Находится ΔW-0 разложение матрицы D:

$$DW = \big[D_1, \mathbb{O}\big], \tag{3.3.2}$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $(s+1)m \times (n-r)$ матрица (r – ранг D); D_1 – постоянная $(s+1)m \times r$ матрица полного столбцового ранга, W – ортогональная $n \times n$ матрица, блочное разбиение* $W = [Q_0, P_0]$ которой дает ранговое сечение: $Q_0 = \operatorname{im} D^H$, $P_0 = \ker D$.

*Здесь мы откажемся от принятого выше обозначения блоков матрицы W, характеризующих ее ранговое сечение. Блок W_1 обозначен как Q_0, блок W_0 обозначен как P_0.

(3) Матрица D_1 записывается в блочном виде

$$D_1 = \left[C_0^1, C_1^1, \dots, C_s^1\right]^B$$

(с блоками C_k^1 размеров $m \times r$) и ей сопоставляется полиномиальная $m \times r$ матрица

$$D_1(\lambda) := C_0^1 + \lambda C_1^1 + \dots + \lambda^s C_s^1,$$

которая и является искомой.

Действительно, равенство (3.3.2) можно записать в эквивалентном виде

$$D = D_1 Q_0^T. \tag{3.3.3}$$

Очевидно, (3.3.3) будет выполняться, если вместо постоянных матриц D и D_1 взять полиномиальные матрицы $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$. Все заключения о свойствах DQ разложения следуют из равенств (3.3.1)–(3.3.2) и свойств ΔW-0 разложения.

3.3.2. Теоретические предпосылки.

Рассмотрим теоретические предпосылки, которые будут положены в основу алгоритмов построения базисов нуль-пространств из полиномиальных решений матрицы $D(\lambda)$ и перестройки последних в минимальные базисы.

Пусть

$$D_k(\lambda) = C_0^k + \lambda C_1^k + \dots + \lambda^{s+k-1} C_{s+k-1}^k$$

есть полиномиальная матрица степени $s+k-1$ размеров $m \times r_{k-1}$. Полиномиальной матрице $D_k(\lambda)$ сопоставим постоянную матрицу

$$D_k = \left[C_0^k, C_1^k, \dots, C_{s+k-1}^k\right]^B$$

размеров $(k+s)m \times r_{k-1}$. Аналогично введем в рассмотрение $m \times 2r_{k-1}$ матрицу

$$\widehat{D}_k(\lambda) =$$
$$\left[C_0^k, 0\right] + \lambda\left[C_1^k, C_0^k\right] + \dots + \lambda^{s+k-1}\left[C_{s+k-1}^k, C_{s+k-2}^k\right] + \lambda^{s+k}\left[0, C_{s+k-1}^k\right]$$

и матрицу

$$\widehat{D}_k = \begin{bmatrix} C_0^k & C_1^k & \dots & C_{s+k-1}^k & 0 \\ 0 & C_0^k & \dots & C_{s+k-2}^k & C_{s+k-1}^k \end{bmatrix}^B$$

размеров $(s+k)m \times 2r_{k-1}$ ранга r_k.

Матрицу $\widehat{D}_k(\lambda)$ с помощью DQ факторизации представим в виде $\widehat{D}_k(\lambda) = D_{k+1}(\lambda)Q_k^T$, где матричный полином $D_{k+1}(\lambda) = C_0^{k+1}+\lambda C_1^{k+1}+\dots+\lambda^{s+k}C_{s+k}^{k+1}$ имеет степень $s+k$ и размеры $m\times r_k$, но не имеет правых нулевой степени полиномиальных решений. Правое нуль-пространство матрицы Q_k^T совпадает с пространством правых полиномиальных нулевой степени решений $\widehat{D}_k(\lambda)$.

Построение $\widehat{D}_k(\lambda)$ будем осуществлять рекуррентно. Именно, исходя из исходной матрицы $D(\lambda) = C_0+\lambda C_1+\dots+\lambda^s C_s \equiv \widehat{D}_0(\lambda)$, находим $D_1(\lambda)$, применяя DQ разложение к $\widehat{D}_0(\lambda)$:

$$\widehat{D}_0(\lambda) = D_1(\lambda)Q_0^T, \qquad D_1(\lambda) = C_0^1+\lambda C_1^1+\dots+\lambda^s C_s^1.$$

Пусть $\widehat{D}_1(\lambda) = \big[C_0^1,0\big]+\lambda\big[C_1^1,C_0^1\big]+\dots+\lambda^{s+1}\big[0,C_s^1\big]$ имеет размеры $m\times 2r_1$, где r_1 – ранг матрицы

$$\widehat{D}_1 = \begin{bmatrix} C_0^1 & C_1^1 & \dots & C_s^1 & 0 \\ 0 & C_0^1 & \dots & C_{s-1}^1 & C_s^1 \end{bmatrix}^B$$

Аналогично, зная коэффициенты $D_k(\lambda) = C_0^k+\lambda C_1^k+\dots+\lambda^{s+k-1}C_{s+k-1}^k$, находим матрицу $\widehat{D}_k(\lambda) = \big[C_0^k,0\big]+\lambda\big[C_1^k,C_0^k\big]+\dots+\lambda^{s+k}\big[0,C_{s+k-1}^k\big]$, DQ разложение которой позволит найти коэффициенты $D_{k+1}(\lambda)$. Из построения следует, что размеры $\widehat{D}_k(\lambda)$ есть $m\times 2r_{k-1}$, где r_{k-1} есть ранг матрицы $\widehat{D}_{k-1}$.

Совокупность некоторых полиномиальных решений одной и той же степени будем объединять в так называемое блочное полиномиальное решение

$$P_t(\lambda) = X_0+\lambda X_1+\dots+\lambda^t X_t,$$

которое в качестве коэффициентов имеет матрицы, так что каждый столбец $P_t(\lambda)$ есть полиномиальное решение $D(\lambda)$.

Пусть $P_{tk} = X_{0k}+\lambda X_{1k}+\dots+\lambda^t X_{tk}$ – матрица с коэффициентами X_{ik} размеров $2r_{k-t-1}\times(2r_{k-1}-r_k)$. Запишем каждую матрицу X_{ik} в блочном виде

$$X_{ik} = \big[\underline{X}_{ik},\overline{X}_{ik}\big]^B, \qquad i=0,\dots,t,$$

где $\underline{X}_{ik}$ – матрица, составленная из первых r_{k-t-1} строк матрицы X_{ik}; $\overline{X}_{ik}$ – матрица, составленная из последних r_{k-t-1} строк матрицы X_{ik}. Матрицу $P_{tk}(\lambda)$ запишем также в блочном виде

$$P_{tk}(\lambda) = \big[\underline{P}_{tk}(\lambda),\overline{P}_{tk}(\lambda)\big]^B,$$

где $\underline{P}_{tk}(\lambda) = \underline{X}_{0k} + \lambda \underline{X}_{1k} + \cdots + \lambda^t \underline{X}_{tk}$; $\overline{P}_{tk}(\lambda) = \overline{X}_{0k} + \lambda \overline{X}_{1k} + \cdots + \lambda^t \overline{X}_{tk}$.

Справедливы следующие свойства.

1^0. *Если $P_{tk}(\lambda)$ есть правое блочное решение $\widehat{D}_k(\lambda)$, то $\underline{P}_{tk}(\lambda) + \lambda \overline{P}_{tk}(\lambda)$ есть правое блочное решение матрицы $D_k(\lambda)$.*

2^0. *Любое правое блочное решение $P_{tk}(\lambda)$ матрицы $\widehat{D}_k(\lambda)$ порождает правое блочное решение $S_{tk}(\lambda) = Q_k^T P_{tk}(\lambda)$ матрицы $D_{k+1}(\lambda)$, и наоборот, любое правое блочное решение $S_{tk}(\lambda)$ матрицы $D_{k+1}(\lambda)$ порождает правое блочное решение $P_{tk}(\lambda) = Q_k S_{tk}(\lambda)$ матрицы $D_k(\lambda)$.*

3^0. *Если $P_{tk}(\lambda) = X_{0k} + \lambda X_{1k} + \cdots + \lambda^t X_{tk}$, $t = 0, \ldots, k-1$ есть правое блочное полиномиальное решение $\widehat{D}_{k-t}(\lambda)$, то ненулевые столбцы матрицы $Q_{k-t-1}[\underline{P}_{tk}(\lambda) + \lambda \overline{P}_{tk}(\lambda)] \equiv P_{t+1,k}(\lambda)$ образуют правое блочное полиномиальное решение $\widehat{D}_{k-t-1}(\lambda)$.*

4^0. *Число N элементов базиса из правых полиномиальных решений $D(\lambda)$ совпадает с размерностью правого нуль-пространства постоянной матрицы $D(\lambda_*)$, где λ_* – любое число, не совпадающее ни с одним из собственных значений $D(\lambda)$.*

5^0. *Для того, чтобы векторные полиномы $x_1(\lambda), \ldots, x_t(\lambda)$ были линейно независимыми, достаточно, чтобы матрица $S(\lambda) = [x_1(\lambda), \ldots, x_t(\lambda)]$, столбцами которой они являются, порождала матрицу $S(\lambda_*)$ полного столбцового ранга, по крайней мере, при одном фиксированном $\lambda = \lambda_*$.*

Для выявления ранга $S(\lambda_*)$ можно к $S(\lambda_*)$ применить ΔW-0 разложение

$$S(\lambda_*) = L_* Q_*^T, \tag{3.3.4}$$

где L_* и Q_* – матрицы полного ранга, совпадающего с рангом $S(\lambda_*)$; $Q_*^T Q_* = I$.

6^0. *Столбцы матрицы $\widehat{S}(\lambda) = S(\lambda) Q_*$, где Q_* – матрица из разложения (3.3.4), образуют линейно независимые полиномы.*

7^0. *Пусть $x_1(\lambda), \ldots, x_t(\lambda)$ – линейно независимые векторные полиномы над кольцом скалярных полиномов. Для того, чтобы полином $x(\lambda)$ был линейно независим от полиномов $x_1(\lambda), \ldots, x_t(\lambda)$ достаточно, чтобы система линейных алгебраических уравнений*

$$S(\lambda_*) u = x(\lambda_*), \qquad S(\lambda) \equiv \big[x_1(\lambda), \ldots, x_t(\lambda)\big]$$

была несовместна, по крайней мере, для одного фиксированного $\lambda = \lambda_*$.

3.3.3. Вычисление полиномиальных решений.

Рассмотрим два алгоритма, позволяющих находить полиномиальные решения для произвольной полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ в порядке неубывания их степеней. Затем опишем алгоритм перестройки решений в минимальный базис. В отличие от алгоритмов, основанных на ZW и ΔW факторизациях, рассматриваемые ниже алгоритмы не используют унимодулярные матрицы.

3.3.3.1. Первый алгоритм построения полиномиальных решений для произвольной матрицы $D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \cdots + \lambda^s C_s$ основан на использовании DQ факторизации и состоит из двух этапов.

На первом этапе строится конечная последовательность вспомогательных матриц $\widehat{D}_1(\lambda), \ldots, \widehat{D}_q(\lambda)$ (q – максимальная степень полиномиального решения $D(\lambda) \equiv \widehat{D}_0(\lambda)$). Для каждого $\widehat{D}_k(\lambda)$ находится базис P_{ok} полиномиальных решений нулевой степени.

На втором этапе элементы P_{0k} для каждого фиксированного k ($k = 0, 1, \ldots, q$) перестраиваются в полиномиальные решения $P_{tk}(\lambda)$ степени t матрицы $\widehat{D}_{k-t}(\lambda)$, $t = 1, \ldots, k$ ($P_{tk}(\lambda)$ – блочное полиномиальное решение степени t для $\widehat{D}_{k-t}(\lambda)$, $P_{kk}(\lambda) \equiv P_k(\lambda)$).

Построение полиномиальных решений $D(\lambda)$ проводится последовательно в порядке увеличения степени. Сначала находятся решения нулевой степени, затем первой, ..., k-ой степени.

Для построения базиса полиномиальных решений нулевой степени матрица $\widehat{D}_0(\lambda)$ представляется в факторизованном DQ виде

$$\widehat{D}_0(\lambda) = D_1(\lambda) Q_0^T.$$

Находится $P_{00} = N_c[Q_0^T]$. Столбцы матрицы P_{00} размеров $n \times (n-r)$ дают искомый базис. Здесь $D_1(\lambda) = C_0^1 + \lambda C_1^1 + \cdots + \lambda^s C_s^1$ есть полиномиальная матрица, матричные коэффициенты C_k^1 которой имеют размеры $m \times r$. Если $N_c[Q_0^T]$ – пустое множество ($r = n$), то решения нулевой степени у $D(\lambda)$ отсутствуют.

Для построения полиномиальных решений первой степени $D(\lambda)$ надо выполнить следующие операции.

(1) Образовать матрицу $\widehat{D}_1(\lambda) = [C_0^1, 0] + \lambda[C_1^1, C_0^1] + \cdots + \lambda^{s+1}[0, C_s^1]$ размеров $m \times 2r$ степени $s+1$ и найти для нее базис P_{01} полиномиальных решений нулевой степени. Это, как и выше, достигается с помощью DQ разложения $\widehat{D}_1(\lambda)$:

$$\widehat{D}_1(\lambda) = D_2(\lambda) Q_1^T, \qquad P_{01} = N_c\left[Q_1^T\right].$$

Здесь $D_2(\lambda) = C_0^2+\lambda C_1^2+\dots+\lambda^{s+1}C_{s+1}^2$ – матрица размеров $m\times r_1$, r_1 – ранг матрицы $\widehat{D}_1$; P_{01} – матрица размеров $2r \times (2r - r_1)$, которую запишем в блочном виде $P_{01} = [\underline{P}_{01}, \overline{P}_{01}]^B$, $\underline{P}_{01}$, $\overline{P}_{01}$ – матрицы размеров $r \times (2r - r_1)$.

(2) Полиномиальные решения P_{01} для $\widehat{D}_1(\lambda)$ перестроить в полиномиальные решения $P_1(\lambda) = X_{01} + \lambda X_{11}$ первой степени для $\widehat{D}_0(\lambda) = D(\lambda)$. Это будут столбцы матрицы

$$P_1(\lambda) = Q_0\bigl[\underline{P}_{01}(\lambda) + \lambda\overline{P}_{01}(\lambda)\bigr] = X_{01} + \lambda X_{11}.$$

Для построения полиномиальных решений любой степени k матрицы $D(\lambda)$ надо выполнить следующие шаги.

(1) Получить базис P_{ok} полиномиальных решений нулевой степени вспомогательной матрицы

$$\widehat{D}_k(\lambda) = \bigl[C_0^k, 0\bigr] + \lambda\bigl[C_1^k, C_0^k\bigr] + \dots + \lambda^{s+k}\bigl[0, C_{s+k-1}^k\bigr].$$

Пусть $\widehat{D}_k(\lambda) = D_{k+1}(\lambda)Q_k^T$. Тогда $P_{0k} = N_c[Q_k^T]$; $D_{k+1}(\lambda) = C_0^{k+1} + \lambda C_1^{k+1}+\dots+\lambda^{s+k}C_{s+k}^{k+1}$ – матрица размеров $m\times r_k$, r_k – ранг матрицы $\widehat{D}_k$; $P_{0k} = [\underline{P}_{0k}, \overline{P}_{0k}]^B$ – матрица размеров $2r_{k-1} \times (2r_{k-1} - r_k)$.

(2) Полиномиальные решения $P_{0k}(\lambda)$ для $\widehat{D}_k(\lambda)$ перестроить в полиномиальные решения первой степени для $\widehat{D}_{k-1}(\lambda)$. Это будут ненулевые столбцы $P_{1k}(\lambda) = X_{0k} + \lambda X_{1k}$, где

$$P_{0k}(\lambda) = Q_{k-1}\bigl[\underline{P}_{0k}(\lambda) + \lambda\overline{P}_{0k}(\lambda)\bigr] \equiv \bigl[\underline{P}_{1k}(\lambda), \overline{P}_{1k}(\lambda)\bigr]^B.$$

Матрица $P_{1k}(\lambda)$ имеет размеры $2r_{k-2} \times (2r_{k-2} - r_{k-1})$, так что $\underline{P}_{1k}(\lambda)$ и $\overline{P}_{1k}(\lambda)$ имеют размеры $r_{k-2} \times (2r_{k-2} - r_{k-1})$.

(3) Полиномиальные решения $P_{1k}(\lambda)$ для $\widehat{D}_{k-1}(\lambda)$ перестроить в полиномиальные решения второй степени $P_{2k}(\lambda) = X_{ok} + \lambda X_{1k} + \lambda^2 X_{2k}$ для $\widehat{D}_{k-2}(\lambda)$. Это будут ненулевые столбцы матрицы

$$P_{2k}(\lambda) = Q_{k-2}\bigl[\underline{P}_{1k}(\lambda)+\lambda\overline{P}_{1k}(\lambda)\bigr] = Q_{k-2}\bigl[\underline{X}_{0k} + \lambda(\underline{X}_{1k} + \overline{X}_{0k}) + \lambda^2\overline{X}_{1k}\bigr].$$

Матрица P_{2k} имеет размеры $2r_{k-3} \times [2r_{k-3} - r_{k-2}]$, и ее блочная запись есть $P_{2k}(\lambda) = [\underline{P}_{2k}(\lambda), \overline{P}_{2k}(\lambda)]^B$, где $\underline{P}_{2k}(\lambda) = \underline{X}_{0k} + \lambda\underline{X}_{1k} + \lambda^2\underline{X}_{2k}$; $\overline{P}_{2k}(\lambda) = \overline{X}_{0k} + \lambda\overline{X}_{1k} + \lambda^2\overline{X}_{2k}$ – матрицы размеров $r_{k-3} \times (2r_{k-3} - r_{k-2})$. Далее следует аналогично осуществить перестройку полиномиальных решений второй степени для $\widehat{D}_{k-2}(\lambda)$ в решения третьей степени для $\widehat{D}_{k-3}(\lambda)$ и т.д.

Алгоритм построения полиномиальных решений $D(\lambda)$ любой степени k можно образно трактовать как подъем с нулевого "этажа" на k-ый "этаж". На нулевом этаже реализуется первый этап алгоритма: построение $\widehat{D}_k(\lambda)$ и вычисление базиса $P_{0k} = [\underline{P}_{0k}, \overline{P}_{0k}]^B$ полиномиальных решений нулевой степени для нее. Переход же на первый, второй, ..., k-ый этаж реализует второй этап алгоритма и означает перестройку решений P_{0k} нулевой степени для $\widehat{D}_k(\lambda)$ в решения первой степени для $\widehat{D}_{k-1}(\lambda)$, второй степени для $\widehat{D}_{k-2}(\lambda)$ и т.д. k-ой степени для

$$\widehat{D}_0(\lambda) = D(\lambda).$$

3.3.3.2. Второй алгоритм построения полиномиальных решений полиномиальной матрицы степени $s \geqslant 1$ является обобщением алгоритма из §2.7 для пучка матриц. Алгоритм состоит в построении конечной последовательности матриц

$$\mathfrak{A}_0 = \left[C_0 C_1 \ldots C_s\right]^B; \quad \mathfrak{A}_1 = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \ldots & C_s & 0 \\ 0 & C_0 & \ldots & C_{s-1} & C_s \end{bmatrix}^B; \ldots;$$

$$\mathfrak{A}_q = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \ldots & C_s & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & C_0 & \ldots & \ldots & C_s & 0\ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & C_0 & C_1 & \ldots\ldots & C_s \end{bmatrix}^B.$$

Параллельно вычисляется последовательность базисов их правых нуль-пространств $Q_0, Q_1, \ldots, Q_q$.

Представим каждую из матриц Q_k в блочном виде

$$Q_k = \left[X_0^k, X_1^k, \ldots, X_k^k\right]^B, \qquad k = 0, \ldots, q.$$

Тогда непосредственной проверкой легко убедиться, что блочные столбцы Q_k порождают блочное решение $P_k(\lambda)$ степени k для $D(\lambda)$. Именно, $D(\lambda)P_k(\lambda) = 0$, где

$$P_k(\lambda) = X_0^k + \lambda X_1^k + \cdots + \lambda^k X_k^k, \qquad k = 0, \ldots, q.$$

Построенные таким образом полиномиальные решения матрицы $D(\lambda)$ не являются линейно независимыми.

3.3.4. Вычисление минимального базиса.

Полиномиальные решения пучка $D(\lambda)$, полученные алгоритмами в п. 3.3.3, не образуют минимального базиса, хотя и вычисляются в порядке возрастания степеней. Ниже предлагается два алгоритма перестройки базиса из полиномиальных решений в минимальный базис, причем построение его должно идти параллельно вычислению блочных решений матрицы в порядке возрастания их степеней.

3.3.4.1. Первый алгоритм основан на использовании свойств 5^0–7^0 из п. 3.3.2.

Пусть P_{ε_1} есть блочное решение $D(\lambda)$ наименьшей степени $\varepsilon_1 \geqslant 0$. Если $\varepsilon_1 = 0$, то $P_{\varepsilon_1} \equiv P_{00}$ имеет по построению все столбцы ортогональными, а следовательно, и линейно независимыми над полем чисел.

Если $\varepsilon_1 > 0$, то надо из блока $P_{\varepsilon_1}(\lambda)$ образовать блок $\widehat{P}\varepsilon_1(\lambda)$ линейно независимых решений степени ε_1. Построение $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda)$ осуществляется согласно свойства 6. Именно, $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda) = P_{\varepsilon_1}(\lambda)Q_0$, где Q_0 есть матрица из ортогональных столбцов в разложении (3.3.4), построенном для матрицы $S(\lambda_*) \equiv P_{\varepsilon_1}(\lambda_*)$. Тогда столбцы $x_1(\lambda), \ldots, x_{n_1}(\lambda)$ матрицы $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda)$ образуют первые n_1 решений наименьшей степени $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{n_1}$ строящегося минимального базиса. Если $n_1 < N$, то пополнение текущего базиса идет за счет столбцов следующего блочного решения $P_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$ степени $\varepsilon_1 + 1$.

Прежде всего по блоку $P_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$, полученному с помощью любого из алгоритмов п. 3.3.3, как и выше, строится блок $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$ линейно независимых между собой решений степени ε_1+1. Далее рассматривается система

$$\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda_*)u = \widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda_*) \qquad (3.3.5)$$

линейных алгебраических уравнений с матрицей $\widehat{P}_{\varepsilon_1}(\lambda_*) = [x_1(\lambda_*), \ \ldots, \ x_{n_1}(\lambda_*)]$ и со многими правыми частями, которые суть столбцы матрицы $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda_*)$. Столбцы $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda)$, соответствующие столбцам матрицы $\widehat{P}_{\varepsilon_1+1}(\lambda_*)$, дающим несовместную систему (3.3.5), пополнят строящийся базис.

Если система (3.3.5) совместна для всех правых частей, то текущий базис остается таким же, какой был получен на предыдущем (первом) шаге. Это означает, что $D(\lambda)$ не содержит правых полиномиальных решений степени $\varepsilon_1 + 1$, линейно независимых от построенных решений базиса. В результате второго шага искомый базис или останется прежним, или пополнится новыми решениями. Если число членов построенного ряда меньше N, то процесс его пополнения продолжается аналогичным образом.

Процесс пополнения строящегося базиса конечен: заканчивается, когда число членов его равно N.

3.3.4.2. Второй алгоритм перестройки полиномиальных решений $D(\lambda)$ в минимальный базис основан на следующих свойствах блочных решений матрицы $D(\lambda)$, построенных по алгоритмам п. 3.3.3.

1^0. *Столбцы блочного решения $P_k(\lambda)$, $k = 0, \dots, q$ образуют подпространство полиномиальных решений степени k для $D(\lambda)$.*

2^0. *Столбцы $P_k(\lambda)$ линейно зависят от полиномиальных решений пучка $D(\lambda)$ степеней $k-1, \dots, 1$ и не зависят от полиномиальных решений нулевой степени. Имеют место следующие равенства*

$$P_i(\lambda) = P_{i-1}(\lambda)\alpha_{i-1} + \lambda P_{i-1}(\lambda)\beta_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, k, \qquad (3.3.6)$$

где $\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}$ – блочные векторы с постоянными компонентами, размеры которых соответствуют размерам блоков, входящих в блочное решение $P_{i-1}(\lambda) = X_0^{i-1} + \lambda X_1^{i-1} + \dots + \lambda^{i-1} X_{i-1}^{i-1}$.

Введем в рассмотрение подпространство $\mathcal{X}_i$ натянутое на столбцы блочной матрицы $[X_0^i, X_1^i, \dots, X_i^i]^B$ и подпространство $\mathcal{Y}_i$, образованное объединением двух подпространств

$$\mathcal{Y}_i = \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{X}_i \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \mathcal{X}_i \end{bmatrix} \right\}.$$

Здесь $\mathbb{O}$ – блок из нулевых столбцов, имеющий такие же размеры, что и любой блок, входящий в $P_{i-1}(\lambda)$.

В силу соотношений (3.3.6) имеет место включение

$$\mathcal{X}_i \supseteq \mathcal{Y}_i, \qquad i = k, \dots, 2.$$

Для построения блочных полиномиальных решений степени k матрицы $D(\lambda)$, линейно независимых как между собой, так и от решений более низких степеней $k-1, \dots, 1$ следует найти ортогональное дополнение $\mathcal{Z}_k \equiv \mathcal{X}_k \setminus \mathcal{Y}_k$ подпространства $\mathcal{Y}_k$ до подпространства $\mathcal{X}_k$. Операция построения ортогонального дополнения одного подпространства до другого с помощью ΔW-0 алгоритма описана в гл. 1.

Пусть $\mathcal{Z}_k$ найдено, представим его в блочной записи

$$\mathcal{Z}_k = \left[Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_k^k\right]^B,$$

где Z_i^k – матрица размеров $n \times \sigma_k$, $\sigma_k = \dim \mathcal{Z}_k$. Тогда столбцы матрицы

$$\widehat{Z}_k(\lambda) \equiv Z_0^k + \lambda Z_1^k + \dots + \lambda^k Z_k^k$$

дадут искомые решения k-ой степени матрицы $D(\lambda)$ линейно независимые как друг от друга, так и от полиномиальных решений степеней $k-1, k-2, \dots, 1$. Если $\mathcal{Z}_k$ – пустое множество, то линейно независимых решений степени k у $D(\lambda)$ нет. Справедливость сделанного утверждения вытекает из построения $\mathcal{Z}_k$.

Заметим, что вычисление решений любой степени k линейно независимых как между собой, так и к решениям степеней $k-1, k-2, \dots, 1$ можно упростить.

Действительно, из (3.3.6) следует, что имеют место включения для любых блочных компонент:

$$X_i^{i-1}\alpha_{i-1} + \lambda X_{i-1}^{i-1}\beta_{i-1} \subseteq X_i^i, \qquad i = 2, \dots, k.$$

Это позволяет вместо $\mathcal{Z}_k$ искать ортогональное дополнение V_{tk} подпространства $\{X_t^{k-1} \cup X_{t-1}^{k-1}\}$ до подпространства X_t^k для любого фиксированного $t = 1, \dots, k-1$.

После того, как V_{tk} найдено, следует решить совместную систему

$$X_t^k W_k = V_{tk}$$

и образовать матрицу

$$\widehat{Z}_k(\lambda) = P_k(\lambda) W_k,$$

столбцы которой дадут искомые полиномиальные решения степени k.

§3.4. Вычисление собственных значений и собственных векторов регулярных полиномиальных матриц

Ниже рассматриваются методы решения частичной проблемы собственных значений для регулярной полиномиальной матрицы, отличные от прямых методов, основанных на применении ΔW и ZW факторизаций для приведения матриц к треугольному виду. Будем различать глобальную и локальную задачи. В локальной задаче вычисляется или уточняется одно собственное значение (как правило, экстремальное) и соответствующий ему собственный вектор. В глобальной задаче вычисляется группа из нескольких собственных значений с соответствующими им собственными векторами. Заметим, что такое деление является условным, так как, комбинируя решение локальной задачи с методами исчерпывания, можно решать глобальную задачу. С другой стороны, методы, называемые ниже глобальными, могут использоваться также для вычисления только одного собственного значения.

Мы не будем подробно описывать алгоритмы решения этих задач, остановимся лишь на принципах их построения и ссылкми на литературу.

3.4.1. Решение локальной задачи.

Большинство методов решения локальной задачи не требуют использования сопровождающих пучков и могут быть применены также для решения спектральных задач с произвольным нелинейным вхождением спектрального параметра.

Эти методы можно условно разделить на три группы.

3.4.1.1. Методы, основанные на решении детерминантных уравнений [18, 24, 226]. Собственные значения вычисляются как корни детерминантного уравнения

$$\det D(\lambda) = 0, \tag{3.4.1}$$

или некоторого эквивалентного ему скалярного нелинейного уравнения. Функциональная зависимость левой части последнего, как правило, не известна, но имеется правило вычисления ее и ее производной при фиксированном значении λ.

Методами решения таких уравнений, например, являются метод Ньютона, построенный на базе нормализованного разложения матрицы $D(\lambda)$, метод Ньютона для решения уравнения

$$\mu(\lambda) = 0,$$

где $\mu(\lambda)$ – наименьшее по модулю собственное значение матрицы $D(\lambda)$.

Рассмотрим более детально метод Ньютона на базе нормализованного разложения для уточнения собственного значения и ему соответствующих собственных векторов. Описание алгоритма приводим для матриц полного столбцового ранга, частным случаем которого является регулярная матрица.

Пусть $D(\lambda)$ есть $m \times n$ полиномиальная матрица ранга n. Применим к $D(\lambda)$ нормализованное разложение

$$\theta(\lambda) D(\lambda) = L(\lambda) Q^T(\lambda). \tag{3.4.2}$$

Здесь $L(\lambda)$ – матрица размеров $m \times n$ с элементами $l_{ii}(\lambda)$, удовлетворяющими неравенствам

$$\bigl|l_{11}(\lambda)\bigr| \geqslant \bigl|l_{22}(\lambda)\bigr| \geqslant \ldots \geqslant \bigl|l_{nn}(\lambda)\bigr|, \quad \bigl|l_{ji}(\lambda)\bigr| \leqslant \bigl|l_{ii}(\lambda)\bigr|,$$
$$j \geqslant i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$\theta(\lambda)$ – результирующая матрица перестановок, $Q(\lambda)$ – результирующая ортогональная матрица. В качестве скалярного уравнения возьмем

$$f(\lambda) \equiv l_{nn}(\lambda) = 0. \tag{3.4.3}$$

Задача вычисления собственных значений матрицы $D(\lambda)$ эквивалентна решению уравнения (3.4.3).

Для решения этого уравнения можно применить способы, основанные на интерполяции $f(\lambda)$ по ее значениям в выбранных точках таких, например, как метод хорд, метод Мюллера и др.

Рассмотрим применение метода Ньютона для уточнения изолированного собственного значения матрицы $D(\lambda)$. Пусть $\lambda = \mu_0$ – приближение к искомому собственному значению, принадлежащему окрестности Γ вычисляемого собственного значения, в которой результирующая матрица перестановок $\theta(\lambda)$ разложения (3.4.2) стабилизировалась.

Для уточнения $\lambda = \mu_0$ как корня уравнения (3.4.3) надо выполнить следующие операции.

(1) Получить нормализованное разложение (3.4.2) матрицы $D(\mu_0)$.

(2) Найти решение $X = (x_1 \dots x_n)^T$ уравнения $\Lambda_0 X = b$, где $L(\mu_0) = [\Lambda_0, \Lambda_1]^B$. Λ_0, Λ_1 – матрицы размеров $n \times n$, $(m-n) \times n$; правая часть b составлена из первых n компонент вектора $\theta(\mu_0)D'(\mu_0)q_n(\mu_0)$, $q_n(\mu_0)$ – последний столбец ортогональной матрицы $Q(\mu_0)$ разложения (3.4.2).

(3) Найти уточненное значение корня $\mu_1 = \mu_0 - 1/x_n$. При необходимости процесс уточнения повторить.

Пусть λ_* – вычисленное собственное значение матрицы $D(\lambda)$. Рассмотрим разложение (3.4.2) матрицы $D(\lambda_*)$. Последние $(n-r)$ столбцы $L(\lambda_*)$ будут нулевыми. (Здесь r – ранг $D(\lambda_*)$). Так что имеем

$$D(\lambda_*)q_k(\lambda_*) = 0, \qquad k = r+1, \dots, n, \tag{3.4.4}$$

где $q_k(\lambda_*)$ – столбцы ортогональной матрицы $Q(\lambda_*)$ разложения (3.4.2). Из (3.4.4) следует, что векторы $q_{r+1}(\lambda_*), \dots, q_n(\lambda_*)$ образуют базис из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_* матрицы $D(\lambda)$.

3.4.1.2. Методы решения нелинейных систем.

Вычисление собственного значения и соответствующего ему собственного вектора сводится к решению нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} D(\lambda)x = 0, \\ \varphi(x) = 1 \end{cases} \tag{3.4.5}$$

относительно λ и x. Второе из уравнений задает условие нормировки вектора x.

В частности, применение метода Ньютона к решению системы (3.4.5), где $\varphi(x) = x^T x$, приводит к итерационному процессу, имеющему вид обратных итераций с нестационарными сдвигами

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k, \quad x_{k+1} = -\Delta\lambda_k u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.4.6}$$

где

$$u_k = -\big[D(\lambda_k)\big]^{-1} D'(\lambda_k) x_k, \qquad \Delta\lambda_k = \frac{1}{2}\left(1 + x_k^T x_k\right)\big/\left(x_k^T u_k\right).$$

Другие способы нормировки, которая, в частности, может изменяться от шага к шагу, приводят к соответствующему преобразованию расчетных формул (3.4.6) [261].

Более общие результаты применения метода Ньютона приведены в работе [96].

3.4.1.3. Методы минимизации обобщенных отношений Релея, использующие решение линейных систем.

Методы этой группы построены на использовании различных обобщений отношения Релея. Естественное обобщение

$$R(x, y, \lambda) = \lambda - \frac{y^T D(\lambda) x}{y^T D'(\lambda) x} \tag{3.4.7}$$

имеет своими стационарными точками решения задач

$$D(\lambda)x = 0, \qquad y^T D(\lambda) = 0.$$

Для построения приближений используются обратные итерации с матрицами $D(\lambda)$, $D^T(\lambda)$ при фиксированных значениях λ и нормализованные разложения этих матриц.

Подробное описание методов указанных трех групп с установлением взаимосвязи между ними приводится в [82, 261]. Из опубликованных позднее отметим работы [25, 75, 188, 191, 240, 286, 307, 325].

3.4.1.4. Прочие методы.

Некоторые методы решения локальной задачи для полиномиальных матриц не укладываются в приведенные выше группы. К таким относятся методы градиентной минимизации функционала невязки $||D(\lambda)x||$ [116], обобщение метода Лобачевского–Греффе [308], методы, сводящие исходную задачу к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений [184, 310].

3.4.2. Решение глобальной задачи.

К методам решения глобальной задачи отнесем методы, использующие обобщения функционала Релея, методы деления спектра, методы одновременных итераций и методы вычисления матричных решений.

3.4.2.1. Методы минимизации обобщенных отношений Релея, использующие решение обычной проблемы собственных решений.

Идея состоит в построении экстремальной теории для полиномиальных матриц, аналогичной теории для симметричных матриц. Для этого используются обобщения функционала Релея $\rho(x)$, отличные от ранее приведенного обобщения (3.4.7). Стационарными точками $\rho(x)$ должны являться собственные векторы пучка, ортогональные в некоторой, вообще говоря, нелинейной метрике, что позволяет осуществлять последовательное вычисление экстремальных собственных значений.

В работе [286] дано обобщение функционала Релея

$$\rho(x) = \bigl(Ax, x\bigr)/\bigl(Bx, x\bigr)$$

на случай полиномиальной матрицы $D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2$ с вещественными симметричными матричными коэффициентами, где C_2 – положительно, а C_0 – отрицательно определенные матрицы. Применение двустороннего сопровождающего пучка $D_B(\lambda)$ и процедуры Релея–Ритца приводит к определению $\rho(x)$ как корня квадратного уравнения

$$\rho^2 a_2(x) + \rho a_1(x) + a_0(x) = 0, \tag{3.4.8}$$

где $a_i(x) = (C_i x, x), \quad i = 0, 1, 2$, так что

$$\rho(x) = \frac{-a_1(x) \pm \sqrt{a_1^2(x) - 4a_2(x)a_0(x)}}{2a_2(x)}.$$

Предложен алгоритм последовательного вычисления l наименьших положительных собственных значений пучка $D(\lambda)$, имеющий квадратичную скорость сходимости. На каждом итерационном шаге решается методом Ланцоша частичная проблема собственных значений матрицы $D(\lambda)$ при фиксированном значении

$\lambda = \rho(x)$. Для решения той же задачи рассматривается блочное обобщение уравнения (3.4.8), приводящее к полиномиальной матрице второй степени

$$\rho^2 a_2(X) + \rho a_1(X) + a_0(X) \tag{3.4.9}$$

порядка p $(p \geqslant l)$, где $a_i(X) = X^T C_i X$, $i = 0, 1, 2$, X – $n \times p$ матрица полного столбцового ранга. Приближениями к искомым собственным значениям являются собственные значения матриц (3.4.9).

Общие идеи, лежащие в основе построения обобщений отношения Релея, и ссылки на соответствующие работы приведены в [82].

3.4.2.2. Методы деления спектра.

Методы деления спектра, основанные на свойствах последовательности Штурма и критерия Сильвестра с успехом применяются для вычисления собственных значений линейных пучков. В работе [74] дано распространение этих идей для матрицы $D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2$ с симметричными матрицами, где C_2 – положительно, а C_0 – отрицательно определенные (аналогичные идеи приводятся в [261]).

3.4.2.3. Метод сингулярной функции [65–67].

Метод сингулярной функции вычислению собственных значений и векторов регулярной полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ основан на утверждении, что собственные значения $D(\lambda)$ совпадают с нулями первой сингулярной функции $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \min_{v \in s} \|D(\lambda)v\|_2^2, \qquad s = \{v \in C^n : \|v\|_2 = 1\},$$

т.е. $f(\lambda) = f_1(\lambda)$, $(f_1(\lambda) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\lambda))$ является квадратом минимального собственного значения эрмитовой матрицы $H(\lambda) = D^T(\lambda)D(\lambda)$.

Метод сингулярной функции – итерационный и на каждом шаге требует вычисления правого сингулярного вектора v, отвечающего минимальному сингулярному числу постоянной матрицы $D(z_k)$ значения сингулярной функции и ее градиента.

Метод реализуется по формуле

$$z_{k+1} = z_k - \frac{2\alpha f(z_k)}{\nabla f(z_k)}. \tag{3.4.10}$$

Здесь z_k – приближение к вычисляемому собственному значению λ_* матрицы $D(\lambda)$ (z_0 – начальное приближение); $f(z_k) = (\omega, \omega)$,

$\omega := D(z_k)v$, $\nabla f(z_k) = 2(\omega, u)$, $u = \frac{dD(z_k)}{d\lambda}v$, $\alpha > 0$ – вещественный параметр.

Доказана асимптотически квадратичная сходимость метода (3.4.10) с $\alpha = q$, где q есть максимальный структурный индекс степень собственного значения λ_*. Если q априори неизвестен, то при $\alpha = 1$ итерации (3.4.10) дают квадратичную сходимость к λ_*, если $q = 1$, и линейную при $q > 1$.

Метод может иметь тупиковое окончание, если z_k попадет на границу области, в которой сингулярная функция f R-дифференцируема и имеет ненулевой градиент.

Метод сингулярной функции позволяет вычислять собственные значения $D(\lambda)$, принадлежащие заданной прямой; в сочетании с алгоритмами исчерпывания уже найденных спектральных характеристик, может быть применен к решению частичной проблемы собственных значений $D(\lambda)$.

В работе [67] приводится модификация алгоритма (3.4.10) для регулярного линейного пучка матриц, позволяющая более эффективно решать проблему собственных значений пучка и, в частности, находить собственную пару пучка с заданной точностью.

§3.5. Вычисление структурных индексов

Предлагаемый ниже алгоритм вычисления структурных индексов является обобщением алгоритма п. 2.2.2, решающего ту же задачу для пучка матриц, на полиномиальные матрицы произвольной целой степени $s > 1$. Алгоритм позволяет вычислять структурные индексы конечного собственного значения полиномиальной матрицы и определять полюсно-нулевую структуру в бесконечной особой точке ее. Одновременно осуществляется исчерпывание рассматриваемой особой точки.

3.5.1. Алгоритм вычисления структурных индексов конечного собственного значения.

Пусть $\lambda = \lambda_* < \infty$ есть конечное собственное значение полиномиальной $m \times n$ матрицы

$$D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \ldots + \lambda^s C_s.$$

Не умаляя общности, считаем $D(\lambda)$ матрицей полного столбцового ранга* n, а $\lambda_* = 0$.

*Переход от матрицы произвольного ранга к матрице полного столбцового ранга с сохранением конечных собственных значений и структурных индексов можно осуществить с помощью ΔW-1 алгоритма.

Для исчерпывания $\lambda = 0$ из $D(\lambda)$ и определения степеней элементарных делителей, соответствующих ему, предлагается построить конечную последовательность матриц $D_k(\lambda) = C_0^k + \lambda C_1^k + \dots + \lambda^s C_s^k$; $k = 0, 1, \dots, l$; $D_0(\lambda) = D(\lambda)$, где

$$D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda) W^k \operatorname{diag}\left\{I_{r_{k+1}}, \lambda^{-1} I_{n-r_{k+1}}\right\}. \qquad (3.5.1)$$

Здесь W^k – ортогональная матрица, блочное разбиение $W^k = [W_1^k, W_2^k]$ которой дает ранговое сечение пространства на образ матрицы $D_k^T(0)$ и нуль-пространство матрицы $D_k(0)$, так что W_1^k и W_2^k имеют соответственно размеры $n \times r_{k+1}$ и $n \times (n - r_{k+1})$, r_{k+1} – ранг матрицы $D_k(0)$; I_q – единичная порядка q матрица.

Построение W^k можно осуществить, применяя к $D_k(0) \equiv C_0^k$ алгоритм ΔW-0 разложения. Переход от $D_k(\lambda)$ к $D_{k+1}(\lambda) = C_0^{k+1} + \lambda C_1^{k+1} + \dots + \lambda^s C_s^{k+1}$ реализуется по формулам

$$C_q^{k+1} = \left[C_{q1}^{k+1}, C_{q2}^{k+1}\right], \qquad q = 0, 1, \dots, s, \qquad (3.5.2)$$

где $C_{q1}^{k+1} = C_q^k W_1^k$; $C_{q2}^{k+1} = C_{q+1}^k W_2^k$ – матрицы, составленные соответственно из первых r_{k+1} столбцов и последних $(n - r_{k+1})$ столбцов C_q^{k+1}.

Алгоритм построения последовательности матриц $\{D_k(\lambda)\}$ продолжается до тех пор, пока при некотором l получим матрицу $D_l(0) = C_0^l$ полного столбцового ранга. В результате будет получена следующая информация.

а) Матрица $D_l(\lambda)$, не имеющая нулевого собственного значения. Все конечные собственные значения $D_l(\lambda)$, отличные от $\lambda = 0$, совпадают с собственными значениями исходной матрицы;

б) Последовательность чисел $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_{l+1} = n$, где $\sigma_k := r_{k+1} - r_k$ есть число элементарных делителей степени k, соответствующих $\lambda = 0$.

3.5.2. Определение полюсно-нулевой структуры полиномиальной матрицы на бесконечности.

Пусть у матрицы

$$D(\lambda) = \lambda^s C_s + \dots + C_0$$

коэффициент C_s при старшем члене имеет нетривиальное правое нуль-пространство. В этом случае $D(\lambda)$ может иметь точку бесконечность как своим собственным значением (иначе говоря, нулем), так и полюсом, так как инвариантные множители канонической формы Смита матрицы

$$\overline{D}(\mu) = D(\mu^{-1}) = \mu^{-s}\big[C_s + \mu C_{s-1} + \cdots + \mu^s C_0\big] \equiv \mu^{-s} D_1(\mu)$$

могут содержать как степени μ, так и степени μ^{-1}. При этом положительные степени μ характеризуют нулевую структуру на бесконечности, отрицательные степени μ характеризуют полюсную структуру на бесконечности.

Для выявления полюсно-нулевой структуры у $D(\lambda)$ на бесконечности следует вычислить структурные индексы в точке $\mu = 0$ для матрицы

$$C_s + \mu C_{s-1} + \cdots + \mu^s C_0 = D_1(\mu).$$

С этой целью надо из $D_1(\mu)$ выделить матрицу полного столбцового ранга, применив алгоритм ΔW-1 факторизации к $D_1(\mu)$:

$$D_1(\mu)W(\mu) = \big[\Delta_1(\mu), \mathbb{O}\big].$$

Далее следует к матрице $\Delta_1(\mu)$ полного столбцового ранга применить алгоритм п. 3.5.1, позволяющий определить структурные индексы $\Delta_1(\mu)$ в нуле, которые являются также структурными индексами $D_1(\mu)$, соответствующими его нулевому собственному значению. Пусть это будут

$$\sigma = \big(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l\big),$$

где σ_k определяет элементарные делители вида μ^{σ_k} матрицы $D_1(\mu)$. Тогда мультииндекс

$$\big(\sigma_1 - s; \sigma_2 - s; \ldots, \sigma_l - s\big)$$

даст полюсно-нулевую структуру матрицы $D(\lambda)$ на бесконечности: положительные числа $(\sigma_k - s)$ характеризуют нулевую структуру в точке $\lambda = \infty$; отрицательные числа $(\sigma_k - s)$ характеризуют полюсную структуру $\lambda = \infty$.

3.5.3. Обоснование алгоритма.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 3.2. *Пусть нулевому собственному значению матрицы $D(\lambda)$ соответствует набор структурных индексов $S[D,0] = \{0, \ldots, 0, \sigma_{\rho+1}, \ldots, \sigma_n\}$, $0 < \sigma_{\rho+1} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$. Тогда, переход от $D(\lambda)$ к $D_1(\lambda) = D(\lambda)W^{(0)}\operatorname{diag}\{I_\rho, \lambda^{-1} I_{n-\rho}\}$ уменьшает на единицу числа*

σ_i $(i=\rho+1,\dots,n)$, оставляя неизменными структурные индексы всех прочих конечных собственных значений матрицы $D(\lambda)$, отличных от нуля.

Доказательство. По условию матрица $D(\lambda)$ эквивалентна в точке $\lambda=0$ блочной матрице вида

$$N^{-1}(\lambda)D(\lambda)M^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}\Sigma(\lambda)\\ \mathbb{O}\end{bmatrix}, \tag{3.5.3}$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $(m-n)\times n$ матрица; $\Sigma(\lambda)=\operatorname{diag}\{1,\dots,1,\lambda^{\sigma_{\rho+1}},\dots,\lambda^{\sigma_n}\}$; $N(\lambda)$ и $M(\lambda)$ – регулярные полиномиальные матрицы, не имеющие особенности в нулевой точке.

Построим аналогичную блочную матрицу для $D_1(\lambda)$. С этой целью введем в рассмотрение полиномиальные матрицы

$$B(\lambda)=\operatorname{diag}\{I_\rho,\lambda I_{n-\rho}\} \quad \text{и} \quad \Sigma_1(\lambda)=\Sigma(\lambda)B^{-1}(\lambda). \tag{3.5.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned}D_1(\lambda)=D(\lambda)W^{(0)}B^{-1}(\lambda)=N(\lambda)\begin{bmatrix}\Sigma(\lambda)\\ \mathbb{O}\end{bmatrix}M(\lambda)W^{(0)}B^{-1}(\lambda)=\\ =N(\lambda)\begin{bmatrix}\Sigma(\lambda)B^{-1}(\lambda)\\ \mathbb{O}\end{bmatrix}B(\lambda)M(\lambda)W^{(0)}B^{-1}(\lambda)=\\ =N(\lambda)\begin{bmatrix}\Sigma_1(\lambda)\\ \mathbb{O}\end{bmatrix}M_1(\lambda),\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

где $M_1(\lambda)=B(\lambda)M(\lambda)W^{(0)}B^{-1}(\lambda)$ – $n\times n$ полиномиальная матрица. Покажем, что $M_1(0)$ – неособенная матрица. Имеем $\det M_1(\lambda)=\det M(\lambda)\det B(\lambda)\times\det B^{-1}(\lambda)\det W^{(0)}=\det M(\lambda)$. Но $M(0)$ – неособен ная. Таким образом установлено, что матрицы $D_1(\lambda)$ и $\begin{bmatrix}\Sigma_1(\lambda)\\ \mathbb{O}\end{bmatrix}$ эквивалентны в точке $\lambda=0$ и их структурные индексы в этой точке совпадают. Запишем (3.5.4) в развернутом виде:

$$\Sigma_1(\lambda)=\Sigma(\lambda)B^{-1}(\lambda)=\operatorname{diag}\{I_\rho,\lambda^{\sigma_{\rho+1}},\dots,\lambda^{\sigma_n}\}\operatorname{diag}\{I_\rho,\lambda^{-1},\dots,\lambda^{-1}\},$$

так что $S[D_1,0]=S[\Sigma_1,0]=\{0,\dots,0,(\sigma_{\rho+1}-1),\dots,(\sigma_n-1)\}$.

Для завершения доказательства леммы надо установить эквивалентность $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ во всех точках плоскости за исключением нулевой. Но это очевидно, если учесть, что матрица $W^0B^{-1}(\lambda)$, связывающая $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$, регулярна во всех точках $\lambda\in\mathbb{C}$ за исключением $\lambda=0$.

Перейдем к обоснованию алгоритма. Сначала используя Лемму 3.5.1, установим, что алгоритм конечный. Из сравнения матриц $\Sigma(\lambda)$ и $\Sigma_1(\lambda)$ следует, что ранги $\rho_1 = \operatorname{rank}\Sigma(0)$ и $\rho_2 = \operatorname{rank}\Sigma_1(0)$ удовлетворяют неравенствам

$$\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant n,$$

а числа $(n-\rho_1)$ и $(n-\rho_2)$ совпадают с числом инвариантных множителей матрицы $D(\lambda)$, делящихся на λ и λ^2, соответственно. Учитывая, что в лемме рассмотрен типичный шаг алгоритма, заключаем, что число $(n-\rho_k)$, полученное на k-ом шаге, равно числу инвариантных множителей $D(\lambda)$, делящихся на λ^k. Но максимально возможная степень элементарного делителя, соответствующего нулевому собственному значению матрицы $D(\lambda)$, есть конечное число, ограниченное сверху числом ns $(l \leqslant ns)$. Последнее вытекает из балансного соотношения

$$\rho s = \beta_c[D] + \beta_\infty[D] + \varepsilon[D] + \eta[D],$$

где $\beta_c[D]$ и $\beta_\infty[D]$ – суммы всех конечных и бесконечных элементарных делителей $D(\lambda)$; $\varepsilon[D]$ и $\eta[D]$ – суммы всех правых и левых минимальных индексов матрицы $D(\lambda)$. Тогда на шаге $l+1$ получим $(n-\rho_{l+1}) = 0$, что означает отсутствие инвариантных множителей, делящихся на λ^{l+1}. Равенство $\rho_{l+1} = n$ является условием окончания алгоритма и доказывает его конечность, а также полноту столбцового ранга матрицы $D_{l+1}(\lambda)$. Полнота столбцового ранга у матрицы $D_{l+1}(0)$ гарантирует отсутствие нулевого собственного значения у матрицы $D_{l+1}(\lambda)$.

Далее из строения результирующей матрицы

$$R(\lambda) := \prod_{k=0}^{l-1} W^{(k)} \operatorname{diag}\left\{I_{\rho_{k+1}}, \lambda^{-1} I_{n-\rho_{k+1}}\right\},$$

осуществляющей переход от $D(\lambda)$ к $D_l(\lambda)$, следует, что она имеет только две особенности: нуль при $\lambda = \infty$ и полюс при $\lambda = 0$, что с учетом равенства

$$D_l(\lambda) = D(\lambda) R(\lambda),$$

и завершает доказательство утверждения а) алгоритма.

Перейдем к доказательству утверждения б). Из леммы вытекает, что число нулевых структурных индексов σ_{00} равно ρ_1; число структурных индексов σ_{10}, равных единице, совпадает с числом

$(n-\rho_1)$ инвариантных множителей, делящихся на λ, если из него вычесть число $(n-\rho_2)$ инвариантных множителей, делящихся на λ^2:

$$\sigma_{10} = n - \rho_1 - \bigl(n - \rho_2\bigr) = \rho_2 - \rho_1.$$

Рассуждая аналогично, находим

$$\sigma_{k0} = \rho_{k+1} - \rho_k \qquad k = 1, \dots, l,$$

что и завершает обоснование алгоритма п. 3.5.1.

§3.6. Исчерпывание спектральных характеристик [90, 91, 36]

Ниже рассматриваются некоторые алгоритмы исчерпывания спектральных характеристик полиномиальных матриц

$$D(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \dots + \lambda^s C_s$$

размеров $m \times n$ целой степени $s \geqslant 1$. Эти алгоритмы позволяют переходить от исходной матрицы к другой, в которой часть спектральных характеристик изменена. Назначение исчерпывания – упростить решение спектральных задач: исчерпывание сингулярных спектральных характеристик позволяет устранить неоднозначность в определении регулярных спектральных характеристик, сделать их вычисление более устойчивым; исчерпывание в нуль (исчерпывание в бесконечность) позволяет ускорить алгоритмы вычисления собственных значений, основанные на последовательном вычислении собственных значений в порядке их убывания (возрастания) по модулю. Здесь обобщаются идеи исчерпывания, предложенные Виландтом для матриц: исчерпывание применяется к полиномиальной матрице и расширяется вид преобразований спектральных характеристик. Предлагаются алгоритмы исчерпывания спектральных характеристик, относящихся к сингулярной части матрицы. В основе лежат новые идеи: наряду с унитарными матрицами для исчерпывания сингулярных спектральных характеристик применяются унимодулярные и регулярные матрицы, отличающиеся от унитарных одним или несколькими столбцами. Исчерпывание при помощи этих матриц позволяет естественным образом выделять из полиномиальной матрицы регулярную часть, и следовательно, более устойчиво решать для нее спектральную задачу.

3.6.1. Исчерпывание сингулярных спектральных характеристик.

Ниже рассматривается исчерпывание сингулярных спектральных характеристик матрицы $D(\lambda)$, позволяющее естественным образом понижать размер $D(\lambda)$ для выделения его регулярной части. Задача решается с применением трех видов матриц преобразования.

1. Применение унитарных матриц позволяет получать строго эквивалентные матрицы.

2. Применение унимодулярных матриц позволяет получать эквивалентные матрицы.

3. Применение регулярных λ-матриц позволяет сводить задачу вычисления спектра матрицы к той же задаче для двух матриц полного столбцового ранга.

Перейдем к более подробному рассмотрению задач исчерпывания сингулярных спектральных характеристик $D(\lambda)$.

3.6.1.1. Исчерпывание с помощью унитарной матрицы позволяет, зная полиномиальные решения нулевой степени для $D(\lambda)$, понизить ее размеры, исчерпав эти решения. Пусть $P = [p_1, \dots, p_t]$ – матрица, столбцы которой $p_k \in \mathbb{C}^n$ $(k = 1, \dots, t)$ являются полиномиальными решениями нулевой степени для $D(\lambda)$

$$D(\lambda)p_k = 0, \qquad \forall\lambda \qquad k = 1, \dots, t.$$

Пусть $Q = [Q_1, Q_0]$ – унитарная $n \times n$ матрица, разделенная на блоки так, что столбцы матрицы $Q_1 \in \mathbb{C}^{n\times t}$ образуют ортогональный базис $\operatorname{im} P$; столбцы матрицы $Q_0 \in \mathbb{C}^{n\times(n-t)}$ образуют ортогональный базис $\ker P^H$. Заметим, что построение матрицы Q можно осуществить, применяя ΔW-0 разложение к матрице P^H.

Для этого образуем матрицу $\widetilde{D}(\lambda)$, строго эквивалентную матрице $D(\lambda)$

$$\widetilde{D}(\lambda) \equiv D(\lambda)Q = \left[\mathbb{O}_{mt}, \quad \widehat{D}(\lambda)\right].$$

Здесь $\mathbb{O}_{mt}$ – нулевая $m \times t$ матрица, $\widehat{D}(\lambda)$ – матрица размеров $m \times (n-t)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.3.

1^0. *Все левые минимальные индексы и полиномиальные решения $D(\lambda)$ и $\widehat{D}(\lambda)$ совпадают.*

2^0. *Все конечные и бесконечные элементарные делители $D(\lambda)$ и $\widehat{D}(\lambda)$, а также относящиеся к ним левые жордановы цепочки* *совпадают; соответствующие векторы из правых жордановых цепочек связаны соотношениями*

$$x_i = Q_0 \widehat{x}_i, \qquad \widehat{x}_i = Q_0^H x_i.$$

3^0. *Отличные от нулевых правые минимальные индексы* $D(\lambda)$ *совпадают с правыми минимальными индексами* $\widehat{D}(\lambda)$, *а соответствующие правые полиномиальные решения связаны соотношениями*

$$x_i(\lambda) = Q_0 \widehat{x}_i(\lambda), \qquad \widehat{x}_i(\lambda) = Q_0^H x_i(\lambda).$$

Справедливость утверждений следует из строгой эквивалентности матриц $D(\lambda)$ и $\widetilde{D}(\lambda)$ и вида эквивалентного преобразования.

3.6.1.2. Исчерпывание с помощью унимодулярной матрицы известного полиномиального решения

$$s_k(\lambda) = x_0 + \lambda x_1 + \cdots + \lambda^k x_k,\ x_i \in \mathbb{C}^n,\ i = 0, \ldots, k,\ ||x_0|| \neq 0. \quad (3.6.1)$$

степени $k > 0$ матрицы $D(\lambda)$.

Построение унимодулярной матрицы, осуществляющей исчерпывание, будем проводить следующим образом.

Пусть $X = [x_1, \ldots, x_k]$ – $n \times k$ матрица, столбцы которой суть коэффициенты полинома (3.6.1) при ненулевых степенях λ. Найдем унитарную матрицу

$$U = \left[u_1, \ldots, u_n\right] = \left[V_q, \quad V_{n-q}\right],$$

в которой первые q столбцов, образующие блок V_q, являются базисом $\operatorname{im} X$; последние $n - q$ столбцов, образуюшие блок V_{n-q}, являются базисом $\ker X^H$. Построение матрицы U можно осуществить с помощью ΔW-0 разложения матрицы X^H. Будем предполагать, что

$$x_0 \notin \operatorname{span}\left\{x_1, \ldots, x_k\right\}, \quad (3.6.2)$$

так что найдется такой столбец u_ξ матрицы V_{n-q}, что

$$\left(x_0, u_\xi\right) \neq 0. \quad (3.6.3)$$

Без ограничения общности считаем, что u_ξ совпадает с последним столбцом u_n матрицы U. В противном случае делаем перестановку столбцов U с номерами ξ и n. Искомая унимодулярная матрица

$$W(\lambda) = \left[u_1, \ldots, u_{n-1}, s_k(\lambda)\right] \equiv \left[U_{n-1}, s_k(\lambda)\right] \quad (3.6.4)$$

отличается от унитарной матрицы U только последним столбцом, который есть полиномиальный вектор (3.6.1). Покажем, что $W(\lambda)$ есть унимодулярная матрица. Имеем

$$\det W(\lambda) = \sum_{p=0}^{k} \lambda^p \det W_p,$$

где W_p – матрица, отличающаяся от $W(\lambda)$ последним столбцом, который заменен на x_p. Учитывая, что $x_1, \dots, x_k \in \operatorname{im} U_{n-1}$, заключаем, что $\det W_1 = \dots = \det W_k = 0$, тогда как $\det W_0 = \mathrm{const} \neq 0$, что следует из предположения (3.6.3). Унимодулярность матрицы (3.6.4) установлена.

Для исчерпывания полиномиального решения $s_k(\lambda)$ из $D(\lambda)$ образуем матрицу

$$\widetilde{D}(\lambda) \equiv D(\lambda)W(\lambda) = \big[\widehat{D}(\lambda), \quad \mathbb{O}\big]. \tag{3.6.5}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевой столбец,

$$\widehat{D}(\lambda) = D(\lambda)U_{n-1} \tag{3.6.6}$$

– матрица размеров $m \times (n-1)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.4.

1^0. *Каноническая форма Смита $D(\lambda)$ и $\widetilde{D}(\lambda)$ имеет одно и то же число (линейно независимых над кольцом полиномов) как левых, так и правых полиномиальных решений и совпадающие инвариантные множители, соответствующие конечным элементарным делителям.*

2^0. *Матрица $\widetilde{D}(\lambda)$ имеет полиномиальное решение $\widetilde{p}_0 = (0, \dots, 0, 1)^H$ нулевой степени, соответствующее исчерпываемому решению $s_k(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$.*

3^0. *Между правыми полиномиальными решениями $x(\lambda)$, отличными от решения $s_k(\lambda)$, матрицы $D(\lambda)$ и правыми полиномиальными решениями $\widehat{x}(\lambda)$ матрицы $\widehat{D}(\lambda)$ имеет место взаимнооднозначное соответствие:*

$$x(\lambda) = U_{n-1}\widehat{x}(\lambda), \qquad \widehat{x}(\lambda) = \big[W^{-1}(\lambda)\big]_{n-1} x(\lambda). \tag{3.6.7}$$

Здесь через $[W^{-1}(\lambda)]_{n-1}$ обозначена матрица, составленная из первых $n-1$ строк матрицы $W^{-1}(\lambda)$.

4^0. *Левые полиномиальные решения и соответствующие конечным элементарным делителям левые жордановы цепочки матриц* $D(\lambda)$ *и* $\widetilde{D}(\lambda)$ *совпадают.*

5^0. *Если* $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_t$ *есть правая жорданова цепочка* $\widehat{D}(\lambda)$, *соответствующая конечному элементарному делителю* $(\lambda - \lambda_*)^t$, *то*

$$x_i = U_{n-1}\widehat{x}_i, \qquad i = 1, \dots, t$$

есть правая жорданова цепочка $D(\lambda)$, *соответствующая тому же элементарному делителю.*

6^0. *Правые минимальные индексы и бесконечные элементарные делители у матриц* $D(\lambda)$ *и* $\widehat{D}(\lambda)$ *могут быть различными. При условии* $C_sU_{n-1} \neq \mathbb{O}$ *сумма кратности бесконечного собственного значения и минимальных индексов правых полиномиальных решений, отличных от исчерпываемого, увеличивается на число, равное степени исчерпываемого полиномиального решения. Если степень* $\widehat{D}(\lambda)$ (*обозначим ее через* $\widehat{s}$) *меньше* s, *то эта сумма увеличивается на число* $k - \rho(s - \widehat{s})$.

Утверждение 1^0 следует из эквивалентности матриц $D(\lambda)$ и $\widetilde{D}(\lambda)$, вытекающей из унимодулярности матрицы $W(\lambda)$.

Утверждение 2^0 вытекает из равенства

$$\widetilde{D}(\lambda)p_0 = D(\lambda)W(\lambda)p_0 = 0,$$

справедливого для любого λ.

Докажем утверждение 3^0. Пусть равенство

$$\widehat{D}(\lambda)\widehat{x}(\lambda) = 0 \tag{3.6.8}$$

выполняется при любом λ, т.е. $\widehat{x}(\lambda)$ есть правое полиномиальное решение $\widehat{D}(\lambda)$. Подставим в (3.6.8) значение $\widehat{D}(\lambda)$ в форме (3.6.6). Получим

$$D(\lambda)U_{n-1}x(\lambda) = 0.$$

Следовательно, $U_{n-1}\widehat{x}(\lambda)$ есть правое полиномиальное решение матрицы $D(\lambda)$.

Обратно, пусть равенство

$$D(\lambda)x(\lambda) = 0 \tag{3.6.9}$$

выполняется при любом λ, т.е. $x(\lambda)$ – правое полиномиальное решение $D(\lambda)$. Из (3.6.5), учитывая, что $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица, имеем

$$D(\lambda) = \big[\widehat{D}(\lambda), \quad \mathbb{O}\big]W^{-1}(\lambda),$$

так что из (3.6.9) получим

$$\big[\widehat{D}(\lambda), \quad \mathbb{O}\big] W^{-1}(\lambda) x(\lambda) = 0.$$

Отсюда $\big[W^{-1}(\lambda)\big]_{n-1} x(\lambda)$ есть правое полиномиальное решение $\widehat{D}(\lambda)$.

Утверждение 4^0 следует из вида эквивалентного преобразования (3.6.5) и свойств канонической формы Смита.

Докажем утверждение 5^0. По условию для $\widehat{D}(\lambda)$ имеют место соотношения

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!} \widehat{D}^{(k)}(\lambda_*) \widehat{x}_{i-k+1} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, t-1, \tag{3.6.10}$$

причем система

$$\widehat{D}(\lambda_*) z = -\sum_{k=1}^{t} \frac{1}{k!} \widehat{D}^{(k)}(\lambda_*) \widehat{x}_{t-k+1}$$

несовместна. Из формулы (3.6.6) имеем

$$\widehat{D}^{(k)}(\lambda_*) = D^{(k)}(\lambda_*) U_{n-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, t. \tag{3.6.11}$$

Подставив (3.6.11) в (3.6.10), получим

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_*) U_{n-1} \, \widehat{x}_{i-k+1} = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, t-1.$$

Система

$$D(\lambda_*) U_{n-1} z = -\sum_{k=0}^{t} \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_*) U_{n-1} \, \widehat{x}_{t-k+1}$$

несовместна. Отсюда следует, что векторы $x_k = U_{n-1}\widehat{x}_k$ $(k = 1, \ldots, t)$ образуют жорданову цепочку $D(\lambda)$, соответствующую элементарному делителю $(\lambda - \lambda_*)^t$.

Утверждение 6^0 следует из сравнений балансного соотношения для матрицы $D(\lambda)$ и аналогичного соотношения

$$\widetilde{t}_c + \widetilde{t}_\infty + \widetilde{t}_R + \widetilde{t}_L = \rho \widetilde{s}$$

для матрицы $\widetilde{D}(\lambda) = D(\lambda) W(\lambda)$. При условии $C_s U_{n-1} \neq \mathbb{O}$ степень s матрицы $\widetilde{D}(\lambda)$ равна степени s исходной матрицы $D(\lambda)$. По установленному выше $\widetilde{t}_\infty + \widetilde{t}_R = t_\infty + t_R = (t_\infty + t_R - k) + k$, где

k – степень исчерпываемого полиномиального решения. Отсюда, учитывая очевидную связь спектральных характеристик $\widetilde{D}(\lambda)$ и $\widehat{D}(\lambda)$, получаем справедливость свойства 6^0. Аналогичные рассуждения позволяют установить 6^0 и для случая $C_s U_{n-1} = \mathbb{O}$, когда $\widehat{s} < s$.

Описанный выше алгоритм исчерпывания одного полиномиального решения легко распространяется на случай исчерпывания блочного полиномиального решения.

3.6.1.3. Исчерпывание полиномиальных решений $D(\lambda)$ с помощью регулярной λ-матрицы $K(\lambda)$ позволяет, не вычисляя полиномиальных решений $D(\lambda)$, преобразовать их в решения нулевой степени, а вычисление конечного спектра матрицы сводить к той же задаче для матриц полного столбцового ранга.

В качестве $K(\lambda)$ берем матрицу, отличающуюся от унитарной матрицы $n-\rho$ столбцами, где $n-\rho$ – размерность правого нуль-пространства $D(\lambda)$. Для этого выбираем любое число λ_*, отличное от собственных значений $D(\lambda)$, и находим (используя ΔW-0 разложение матрицы $D(\lambda_*)$) унитарную матрицу

$$Q_* \equiv \begin{bmatrix} Q_{1*}, & Q_{0*} \end{bmatrix} \tag{3.6.13}$$

такую, что столбцы $n\times\rho$ матрицы Q_{1*} образуют базис $\operatorname{im} D^H(\lambda_*)$, а столбцы $n\times(n-\rho)$ матрицы Q_{0*} образуют базис $\ker D(\lambda_*)$. Таким образом, столбцы матрицы Q_{0*} получаются из некоторого базиса $q_1(\lambda), \dots, q_n(\lambda)$ правого нуль-пространства $N_C(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_*$. Полагаем

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_{1*}, q_1(\lambda), \dots, q_{n-\rho}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{3.6.14}$$

Для выделения регулярной части спектральных характеристик $D(\lambda)$ образуем матрицу

$$\widetilde{D}(\lambda) \equiv D(\lambda)K(\lambda) = \begin{bmatrix} \widehat{D}(\lambda), & \mathbb{O}_{m,n-\rho} \end{bmatrix}, \tag{3.6.15}$$

где $\widehat{D}(\lambda) \equiv D(\lambda)Q_{1*}$; $\mathbb{O}_{m,n-\rho}$ – нулевая $m\times(n-\rho)$ матрица.

Получили матрицу $D(\lambda)$ полного столбцового ранга.

Заметим, что для образования $\widehat{D}(\lambda)$ требуется знать только блок Q_{1*} унитарной матрицы Q_*.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.5.

1^0. *Матрица $\widehat{D}(\lambda)$ не имеет правых полиномиальных решений.*

2^0. *Матрица $\widehat{D}(\lambda)$ имеет те же левые полиномиальные решения и минимальные индексы, что и исходная матрица $D(\lambda)$.*

3^0. *Конечная и при $C_sQ_{1*} \neq \mathbb{O}$ бесконечная части спектра исходной матрицы $D(\lambda)$ содержатся в спектре $\widehat{D}(\lambda)$.*

4^0. *Спектр $\widehat{D}(\lambda)$ содержит паразитическую часть, определяемую спектром матрицы $K(\lambda)$, кратность которой равна сумме правых минимальных индексов исходной матрицы $D(\lambda)$.*

Первое утверждение следует из построения (3.6.15) матриц $\widetilde{D}(\lambda)$ и $\widehat{D}(\lambda)$. Утверждение 2^0 и утверждение 3^0, касающиеся конечной части спектра, следуют из теоремы 3.4.

Докажем 3^0 для бесконечной части спектра $D(\lambda)$. Из (3.6.15) для $\overline{D}(\mu) = \mu^s D(\mu^{-1})$ имеем

$$\overline{D}(\mu)K_1(\mu) = \left[\overline{\widehat{D}}(\mu), \quad \mathbb{O}_{m,n-\rho}\right], \tag{3.6.16}$$

где

$$\overline{\widehat{D}}(\mu) = \mu^s \widehat{D}(\mu^{-1}), \qquad K_1(\mu) \equiv \left[Q_{0*}, \overline{q}_1(\mu), \dots, \overline{q}_{n-\rho}(\mu)\right]$$

– регулярная матрица. Тогда применение к разложению (3.6.16) теоремы 3.4 завершает доказательство.

Для установления утверждения 4^0 воспользуемся балансным соотношением

$$t_C + t_\infty + \widetilde{t}_\sigma + \widetilde{t}_L = \rho s, \tag{3.6.17}$$

справедливым для $\widetilde{D}(\lambda)$ (для $\widehat{D}(\lambda)$). Здесь через $\widetilde{t}_\sigma$ обозначим кратность той части спектра, которая не определяется спектром $D(\lambda)$, т.е. числами t_c и t_∞. Сравнивая (3.6.17) с аналогичным балансным соотношением для $D(\lambda)$, заключаем, что $\widetilde{t}_\sigma = t_R$. Тот факт, что дополнительная часть спектра совпадает со спектром матрицы $K(\lambda)$, следует из теоремы. Свойство 4^0 доказано.

Из рассуждений, проведенных выше, следует, что матрица $D(\lambda)$ кроме искомого спектра $D(\lambda)$ содержит паразитический спектр. Для вычисления спектра $D(\lambda)$ мы предлагаем два способа.

При первом способе надо проверить, является ли собственное значение $\widehat{\lambda}_i$ матрицы $\widehat{D}(\lambda)$ собственным значением для $D(\lambda)$. Очевидно, что если $\operatorname{rank} D(\widehat{\lambda}_i) = \rho$, то $\widehat{\lambda}_i$ не является собственным значением $D(\lambda)$. Если $\operatorname{rank} D(\widehat{\lambda}_i)$ меньше ρ, то $\widehat{\lambda}_i$ есть собственное значение $D(\lambda)$. В последнем случае желательно проверить совпадение кратностей $\widehat{\lambda}_i$ и как собственного значения $\widehat{D}(\lambda)$, и как собственного значения $D(\lambda)$.

При втором способе надо выполнить построение матрицы (3.6.13) при двух различных значениях λ_* и найти спектры для двух матриц $\widehat{D}(\lambda)$ полного столбцового ранга. Совпадающая часть спектров этих матриц даст искомый спектр $D(\lambda)$.

3.6.2. Исчерпывание регулярных спектральных характеристик.

Для полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ общего вида может быть обобщена идея исчерпывания по способу Виландта для постоянных матриц. Ниже предлагаются обобщения в двух направлениях: 1) исчерпывание группы собственных значений, когда известны соответствующие им блочное собственное значение и блочный собственный вектор; 2) исчерпывание известного кратного собственного значения полиномиальной матрицы.

1) Пусть известно блочное собственное значение $\Lambda \in \mathbb{C}^{l\times l}$ матрицы $D(\lambda)$ и соответствующий ему блочный собственный вектор $X \in \mathbb{C}^{n\times l}$ и пусть $Z \in \mathbb{C}^{n\times l}$ – матрица, удовлетворяющая условию

$$Z^H X = I. \tag{3.6.18}$$

Тогда исчерпывание собственных значений $D(\lambda)$, определяемых спектром матрицы Λ, в нуль сводится к построению матриц

$$D_0(\lambda) \equiv D(\lambda) + \sum_{i=0}^{s-1} \lambda^i H_i \Lambda Z^H, \tag{3.6.19}$$

где

$$H_{i-1} = \sum_{k=0}^{s-i} C_{i+k} X \Lambda^k, \qquad i = 1, \dots, s,$$

т.е. H_i – коэффициенты матрицы $H(\lambda)$ в разложении

$$D(\lambda)X = H(\lambda)\bigl(\lambda I - \Lambda\bigr). \tag{3.6.20}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.6.

1^0. *Блочной собственной паре Λ, X матрицы $D(\lambda)$ соответствует блочная собственная пара $\mathbb{O}_{ll}, X$ матрицы $D_0(\lambda)$.*

2^0. *Левые блочные спектральные характеристики матриц $D(\lambda)$ и $D_0(\lambda)$ одинаковы.*

3^0. *Любой правой блочной собственной паре Λ_1, X_1 с $\det \Lambda_1 \neq 0$ матрицы $D(\lambda)$, отличной от Λ, X, соответствует блочная пара $\Lambda_1, \widehat{X}_1$ матрицы $D_0(\lambda)$. Здесь $\widehat{X}_1 \equiv X_1 - X\Gamma_1$, $\Gamma_1 \equiv \Lambda Z^H X_1 \Lambda_1^{-1}$.*

Действительно, учитывая, что Λ, X – блочная собственная пара $D(\lambda)$, в силу соотношения

$$C_0X + C_1X\Lambda + \cdots + C_sX\Lambda^s = 0$$

имеем

$$\left(C_0 + H_0\Lambda Z^H\right)X = C_0X + \sum_{k=0}^{s-1} C_{k+1}X\Lambda^{k+1} = \mathbb{O}.$$

Отсюда $\mathbb{O}_{ll}$ и X есть правая блочная собственная пара $D_0(\lambda)$. Далее, пусть Λ_2, Y_2 – левая блочная собственная пара $D(\lambda)$. Покажем, что она будет левой блочной собственной парой и для $D_0(\lambda)$.

Учитывая

$$Y_2^H C_0 + \Lambda_2 Y_2^H C_1 + \cdots + \Lambda_2^s Y_2^H C_s = \mathbb{O}$$

для $D_0(\lambda)$, имеем

$$\sum_{k=0}^{s} \Lambda_2^k Y_2^H C_k + \sum_{i=0}^{s-1} \Lambda_2^i Y_2^H H_i \Lambda Z^H =$$
$$= \mathbb{O} + \sum_{k=1}^{s} \Lambda_2^{k-1} Y_2^H \sum_{i=0}^{s-k} C_{k+i} X \Lambda^i Z^H = \mathbb{O}.$$

Утверждение 2^0 доказано.

Докажем утверждение 3^0. Пусть Λ_1 – блочное собственное значение, не связанное со спектром матрицы Λ. Имеем

$$\sum_{k=0}^{s} C_k X_1 \Lambda_1^k - \sum_{k=0}^{s} C_k X \Gamma_1 \Lambda_1^k + \sum_{i=0}^{s-1} H_i \Lambda Z^H X_1 \Lambda_1^i - \sum_{i=0}^{s-1} H_i \Lambda Z^H X \Gamma_1 \Lambda_1^i =$$
$$- \sum_{k=0}^{s} C_k X \Gamma_1 \Lambda_1^k + \sum_{k=1}^{s} C_k X \sum_{j=1}^{k} \Lambda^j Z^H X_1 \Lambda_1^{k-j} - \sum_{k=1}^{s} C_k X \sum_{j=1}^{k} \Lambda^j \Gamma_1 \Lambda_1^{k-j} =$$
$$\sum_{k=0}^{s} C_k X \sum_{j=0}^{k} \Lambda^j \left(\Lambda Z^H X_1 \Lambda_1^{-1} - \Gamma_1\right) \Lambda_1^{k-j} = \mathbb{O}.$$

Утверждение 3^0 доказано.

Замечание. Если Λ – правое матричное решение $D(\lambda)$, то, применив процесс исчерпывания, при $X = Z = I$ придем к матрице

$$D_0(\lambda) = \lambda H(\lambda),$$

где $H(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$D(\lambda) = H(\lambda)\bigl(\lambda I - S\bigr). \tag{3.6.21}$$

2) Пусть известно собственное значение λ_* матрицы $D(\lambda)$. Для его исчерпывания в нуль будем строить конечную последовательность матриц

$$D_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} C_k^{(i)} \lambda^k, \qquad D_1(\lambda) \equiv D(\lambda).$$

Переход от $D_i(\lambda)$ к $D_{i+1}(\lambda)$ выполняется по следующему предписанию:

(1) Находим блочное собственное значение $\Lambda_i = \lambda_* I_{l_i}$ и соответствующий ему блочный собственный вектор $X_i \in \mathbb{C}^{n \times l_i}$. С этой целью определяем размерность l_i правого нуль-пространства матрицы $D_i(\lambda_*)$ и его ортонормированный базис, столбцы которого образуют матрицу X_i. Эти величины могут быть найдены с помощью ΔW-0 разложений постоянной матрицы $D_i(\lambda_*)$.

(2) Для преобразования $D_{i+1}(\lambda)$ в $D_i(\lambda)$ применяем исчерпывание блочного собственного значения (может быть, неполного) $\Lambda_i = \lambda_* I_{l_i}$, так что коэффициенты $D_{i+1}(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$C_s^{(i+1)} = C_s^{(i)}; \quad C_j^{(i+1)} = C_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{s-j} \lambda_*^k C_{k+j}^{(i)} X_i X_i^H, \\ j = s-1, s-2, \ldots, 0. \tag{3.6.22}$$

Построение последовательности матриц $D_i(\lambda)$ прекращается на шаге t, когда выполнено одно из условий: либо $l_t = 0$, либо $t > s \min(m, n)$.

Аналогично исчерпыванию спектральных характеристик в нуль может быть организовано исчерпывание в любую точку α комплексной области, в том числе и в бесконечность, как для правого (левого) блочного собственного значения, так и для обратных блочных собственных значений.

Глава 4. Некоторые сведения о двухпараметрических полиномиальных матрицах

§4.1. Спектральные характеристики

4.1.1. Определения спектральных характеристик и их свойства.

Пусть $F(\lambda, \mu)$ есть $m \times n$ двухпараметрическая полиномиальная матрица. Для определенности параметр λ будем называть основным (или спектральным), параметр μ – дополнительным (иногда оба параметра будут рассматриваться равноправными). Наряду с матричной записью $F(\lambda, \mu)$ с элементами $f_{ij}(\lambda, \mu)$, скалярными полиномами, будем записывать $F(\lambda, \mu)$ в виде матричного полинома

$$F(\lambda, \mu) = C_s(\mu)\lambda^s + \cdots + C_0(\mu), \tag{4.1.1}$$

где $C_k(\mu)$ есть $m \times n$ полиномиальные матрицы по параметру μ.

Будем различать регулярные и сингулярные двухпараметрические полиномиальные матрицы. Регулярной называется квадратная $F(\lambda, \mu)$ матрица, определитель которой отличается от тождественного нуля. В противном случае, когда либо $m \neq n$, либо $\det F(\lambda, \mu) \equiv 0$ при $m = n$, матрица $F(\lambda, \mu)$ называется сингулярной. Обозначим через $\rho = \operatorname{rank} F(\lambda, \mu)$ нормальный ранг матрицы $F(\lambda, \mu)$, т.е. максимальный порядок ее минора, отличного от тождественного нуля. В регулярном случае $\rho = m = n$, в сингулярном случае $\rho \leqslant \min(m, n)$.

В случае линейного вхождения параметра λ в элементы матрицы $F(\lambda, \mu)$, будем применять также обозначение $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ и называть двухпараметрическую полиномиальную матрицу пучком полиномиальных матриц $A(\mu)$ и $B(\mu)$.

Ставится задача нахождения нетривиальных решений уравнений

$$F(\lambda, \mu)x = 0 \quad \text{и} \quad y^H F(\lambda, \mu) = 0, \tag{4.1.2}$$

которыми являются

•правые и левые собственные векторы, отвечающие точкам спектра матрицы;

•правые и левые полиномиальные решения, принадлежащие соответственно правому и левому нуль-пространствам матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Спектр матрицы $F(\lambda, \mu)$ представляет собой геометрическое место точек (λ_*, μ_*), на которых $\rho_* := \operatorname{rank} F(\lambda_*, \mu_*) < \rho$.

Координаты точек спектра являются решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_\rho \\ j_1, & \dots, & j_\rho \end{pmatrix} = 0, \tag{4.1.3}$$

левые части которых суть миноры порядка ρ матрицы $F(\lambda, \mu)$, составленные из элементов ее, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, \dots, i_\rho$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_\rho$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_\rho \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_\rho \leqslant n$.

Одномерные и нульмерные решения системы (4.1.3) определяют соответственно одномерные и нульмерные собственные значения матрицы $F(\lambda, \mu)$. Одномерные собственные значения образуют непрерывную часть спектра $F(\lambda, \mu)$, т.е. совокупность собственных кривых, определенных уравнениями $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ или $\big(\lambda = \varphi(\mu), \mu = \psi(\lambda)\big)$. Пару (λ, μ), лежащую на собственной кривой, т.е. связанную указанной выше функциональной зависимостью, также будем называть одномерным собственным значением $F(\lambda, \mu)$. Заметим, что явной формульной зависимости $\Phi(\lambda, \mu), \varphi(\mu), \psi(\lambda)$ в общем случае не существует, но всегда можно указать правило, позволяющее при фиксированном значении $\mu = \mu_*$ (или $\lambda = \lambda_*$) находить точки (λ_*, μ_*), каждая из которых лежит, по крайней мере, на одной из собственных кривых.

Нульмерные решения системы (4.1.3) называются нульмерными собственными значениями матрицы $F(\lambda, \mu)$. Они образуют дискретную часть спектра.

Непрерывный конечный спектр $F(\lambda, \mu)$ состоит из корней алгебраического уравнения

$$\delta(\lambda, \mu) = 0,$$

где $\delta(\lambda, \mu)$ есть скалярный полином от двух переменных, являющийся общим наибольшим делителем всех миноров, стоящих в левой части системы (4.1.3).

В случае регулярной матрицы $F(\lambda, \mu)$ система (4.1.3) состоит из одного уравнения

$$\det F(\lambda, \mu) = 0,$$

которое имеет только одномерные решения, так что спектр регулярной матрицы является непрерывным.

В случае точек с "бесконечными" координатами, наряду с матрицей $F(\lambda, \mu)$ будем рассматривать полиномиальные матрицы, получаемые при заменах переменных $\lambda = \nu^{-1}, \mu = \eta^{-1}$, т.е. матрицы вида

$$\overline{F}(\nu,\mu) \equiv \nu^s F(\nu^{-1},\mu); \quad \widetilde{F}(\lambda,\eta) = \eta^t F(\lambda,\eta^{-1});$$
$$\widehat{F}(\nu,\eta) = \nu^s \eta^t F(\nu^{-1},\eta^{-1}) \tag{4.1.4}$$

и полагать по определению

$$F(\infty,\mu) \equiv \overline{F}(0,\mu);\ F(\lambda,\infty) \equiv \widetilde{F}(\lambda,0);\ F(\infty,\infty) = \widehat{F}(0,0).$$

Если собственное значение (любого вида) матрицы $F(\lambda,\mu)$ является кратным, то с ним могут быть связаны жордановы цепочки векторов; при этом в случае одномерного собственного значения число и длины жордановых цепочек могут изменяться с изменением координат точки, лежащей на собственной кривой.

Правые $x_1,\dots,x_t$ и левые $y_1,\dots,y_t$ жордановы цепочки длины t, отвечающие точке спектра (λ_*,μ_*), удовлетворяют соответственно соотношению

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} F_*^{(k)} x_{l-k+1} = 0 \qquad l = 0,1,\dots,t-1; \tag{4.1.5}$$

причем система

$$F_*\xi = -\sum_{k=1}^{t} \frac{1}{k!} F_*^{(k)} x_{t-k+1}$$

несовместна; соотношению

$$\sum_{k=0}^{l} y_{t-l+k} \frac{1}{k!} F_*^{(k)} = 0^H \qquad l = 0,1,\dots,t-1 \tag{4.1.6}$$

причем система

$$\xi^H F_* = -\sum_{k=1}^{t} y_k^H \frac{1}{k!} F_*^{(k)}$$

несовместна. Здесь $F_*^{(k)} = \frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda,\mu)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_*\\ \mu=\mu_*}}$.

Для пучка

$$D(\lambda,\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu) \tag{4.1.7}$$

соотношения (4.1.5) и (4.1.6) принимают следующий вид:

$$D_* x_1 = 0, \quad D_* x_l = B_* x_{l-1} \qquad (l = 2,\dots,t), \tag{4.1.8}$$

система $D_*\xi = B_* x_t$ несовместна, и

$$y_t^H D_* = 0 \qquad y_{t-l}^H D_* = y_{t-l+1}^H B_* \qquad (l = 1, \ldots, t-1) \qquad (4.1.9)$$

система $\xi^H D_* = y_1^H B_*$ несовместна.

Ненулевые полиномиальные векторы $x(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^n[\lambda, \mu]$ и $y(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^m[\lambda, \mu]$, удовлетворяющие при любых значениях λ и μ уравнениям

$$F(\lambda, \mu)x(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{и} \quad y^H(\lambda, \mu)F(\lambda, \mu) = 0, \qquad (4.1.10)$$

называются полиномиальными решениями (соответственно правым и левым) матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Пусть

$$x(\lambda, \mu) = \lambda^\varepsilon x_\varepsilon(\mu) + \cdots + x_0(\mu) \quad x_0(\mu) \not\equiv 0 \quad \text{и} \quad x_\varepsilon(\mu) \not\equiv 0$$

правое полиномиальное решение $F(\lambda, \mu)$. Степень ε называется индексом по параметру λ правого полиномиального решения $x(\lambda, \mu)$.

Аналогично

$$y(\lambda, \mu) = \lambda^\eta y_\eta(\mu) + \cdots + y_0(\mu) \quad y_0(\mu) \not\equiv 0, \quad y_\eta(\mu) \not\equiv 0$$

есть левое полиномиальное решение индекса η.

На полиномиальном решении $x(\lambda, \mu)$ матрицы $F(\lambda, \mu)$ тождества (4.1.10) имеют вид

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{k} C_i(\mu) x_{k-i}(\mu) = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, s+\varepsilon \\ C_i(\mu) \equiv 0 \quad \text{при} \quad i > s. \end{gathered} \qquad (4.1.11)$$

Для пучка $D(\lambda, \mu)$ тождества (4.1.10) будут

$$\begin{gathered} A(\mu)x_0(\mu) = 0 \quad A(\mu)x_k(\mu) = B(\mu)x_{k-1}(\mu) \quad k = 1, \ldots, \varepsilon \\ B(\mu)x_\varepsilon(\mu) = 0. \end{gathered} \qquad (4.1.12)$$

Очевидно при любых значениях $\lambda = \lambda_*, \mu = \mu_*$ векторы

$$x_{*i} \equiv \frac{1}{(i-1)!}\, x_*^{(i-1)} \quad i = 1, \ldots, \varepsilon + 1 \qquad (4.1.13)$$

удовлетворяют равенствам вида (4.1.5), но в отличие от жордановых цепочек векторов ограничения на несовместность системы отсутствуют. В связи с этим совокупность векторов (4.1.13) будем называть “паразитической” жордановой цепочкой векторов, порожденной правым полиномиальным решением $x(\lambda,\mu)$ в точке (λ_*,μ_*).

Аналогично можно ввести в рассмотрение "паразитическую" жорданову цепочку, порожденную левым полиномиальным решением $y(\lambda,\mu)$ в точке (λ_*,μ_*).

Если $\rho < n$, матрица $F(\lambda,\mu)$ имеет нетривиальное, размерности $n-\rho$, правое нуль-пространство из полиномиальных решений. Аналогично, если $\rho < m$, матрица $F(\lambda,\mu)$ имеет нетривиальное, размерности $m-\rho$, левое нуль-пространство из полиномиальных решений.

Рассмотрим базис правого (левого) нуль-пространства из полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$. Нас будет интересовать, так называемый, минимальный базис из полиномиальных решений $x_1(\lambda,\mu)$, $\dots$, $x_{n-\rho}(\lambda,\mu)$, т.е. такой базис, матрица $X(\lambda,\mu) = [x_1(\lambda,\mu),\dots,x_{n-\rho}(\lambda,\mu)]$, соответствующая которому, не имеет непрерывного спектра. Аналогично через $Y(\lambda,\mu) \equiv [y_1(\lambda,\mu),\dots,y_{n-\rho}(\lambda,\mu)]$ будем обозначать минимальный базис из левых полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$. Индексы полиномиальных решений, составляющие столбцы минимальных базисов, будем называть минимальными индексами.

Для дальнейшего будут полезны следующие очевидные свойства однопараметрической матрицы $\overline{F}(\lambda) \equiv F(\lambda,\overline{\mu})$, где $\overline{\mu}$ любое фиксированное значение $\mu=\overline{\mu}$, не совпадающее с координатами точек спектра $F(\lambda,\mu)$.

1^0. *Кратность $\overline{\sigma}$ спектра матрицы $\overline{F}(\lambda)$ совпадает с кратностью точек пересечения прямой $\mu=\overline{\mu}$ с собственными кривыми матрицы $F(\lambda,\mu)$.*

2^0. $\operatorname{rank}\overline{F}(\lambda) := \operatorname{rank}F(\lambda,\mu)=\rho$.

3^0. *Порядки $\overline{u}$ и $\overline{v}$ минимальных базисов нуль-пространств правых и левых полиномиальных решений матрицы $\overline{F}(\lambda)$ соответственно совпадают с суммой индексов полиномиальных столбцов матриц $\overline{X}(\lambda) := X(\lambda,\overline{\mu})$ и $\overline{Y}(\lambda) := Y(\lambda,\overline{\mu})$.*

4^0. *Степень матрицы $\overline{F}(\lambda)$ совпадает со степенью по λ матрицы $F(\lambda,\mu)$.*

5^0. *Имеет место балансное соотношение*

$$\overline{\sigma}+\overline{u}+\overline{v}=\overline{\rho}\,\overline{s}=\rho s.$$

Докажем теорему, устанавливающую связь дискретного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ со спектрами матриц $X(\lambda,\mu), Y(\lambda,\mu)$.

Теорема 4.1. *Для того чтобы пара чисел (λ_*, μ_*) была нульмерным собственным значением матрицы $F(\lambda, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы она была нульмерным собственным значением, по крайней мере, одной из матриц $X(\lambda, \mu)$ или $Y(\lambda, \mu)$.*

Доказательство теоремы проведем при следующих ограничениях:

1. Спектр $F(\lambda, \mu)$ не содержит собственных значений вида $(\lambda, \mu_*), (\lambda_*, \mu)$.

2. (λ_*, μ_*) есть конечная по λ точка спектра. Указанные ограничения не умаляют общности. Как будет установлено ниже, собственные значения $(\lambda, \mu_*), (\lambda_*, \mu)$ могут быть предварительно исчерпаны из спектра $F(\lambda, \mu)$. В случае $(\lambda_*, \mu_*) = (\infty, \mu_*)$ в матрице $F(\lambda, \mu)$ можно сделать замену $\lambda = \eta^{-1}$, переводящую точку (∞, μ_*) в $(0, \mu_*)$.

Перейдем к доказательству теоремы. В предположении, что пара чисел (λ_*, μ_*) есть нульмерное собственное значение $F(\lambda, \mu)$, докажем, что (λ_*, μ_*) является нульмерным собственным значением $X(\lambda, \mu)$ или (и) $Y(\lambda, \mu)$. Действительно, кратность спектра σ_* однопараметрической матрицы $F(\lambda, \mu_*)$ будет больше $\overline{\sigma}$, так как кроме точек пересечения прямой $\mu = \mu_*$ с собственными кривыми матрицы $F(\lambda, \mu)$ матрица $F(\lambda, \mu_*)$ будет иметь дополнительное собственное значение $\lambda = \lambda_*$, что следует из неравенства $\operatorname{rank} F(\lambda_*, \mu_*) < \rho$. Но из балансного соотношения следует, что увеличение σ_* должно компенсироваться уменьшением $u_* + v_*$, что влечет уменьшение размерности одной (или обеих) матриц $X(\lambda, \mu_*), Y(\lambda, \mu_*)$, так что $\operatorname{rank} X(\lambda, \mu_*) < n - \rho$ ($\operatorname{rank} Y(\lambda, \mu_*) < m - \rho$), следовательно, (λ_*, μ_*) является точкой спектра $X(\lambda, \mu)$ и (или) $Y(\lambda, \mu)$. Учитывая, что матрицы $X(\lambda, \mu)$ и $Y(\lambda, \mu)$ по условию не имеют непрерывного спектра, заключаем, что (λ_*, μ_*) есть нульмерное собственное значение по крайней мере одной из матриц $X(\lambda, \mu), Y(\lambda, \mu)$. Справедливость прямого утверждения установлена.

Обратно, пусть (λ_*, μ_*) есть нульмерное собственное значение по крайней мере одной из матриц $X(\lambda, \mu), Y(\lambda, \mu)$. Для определенности считаем

$$\operatorname{rank} X(\lambda_*, \mu_*) < n - \rho. \tag{4.1.14}$$

Сначала докажем принадлежность (λ_*, μ_*) точкам спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$. Допустим противное, т.е. $\operatorname{rank} F(\lambda_*, \mu_*) = \rho$. Но тогда размерность правого нуль-пространства $X(\lambda_*, \mu_*)$ матрицы $F(\lambda_*, \mu_*)$ есть $n - \rho$, что противоречит условию (4.1.14). Из полученного противоречия с учетом, что спектр $F(\lambda,\mu)$ не содержит собственных значений $(\lambda,\mu_*),(\lambda_*,\mu)$, следует справедливость утверждения, что (λ_*,μ_*) есть нульмерное собственное значение $F(\lambda,\mu)$. Теорема доказана. •

Точка (λ_i,μ_i) спектра $F(\lambda,\mu)$ принадлежит правому дискретному спектру $F(\lambda,\mu)$ и обозначается (λ_{i+},μ_{i+}), если $\operatorname{rank} X(\lambda_i,\mu_i) < n-\rho$. Точка $(\lambda_i,\mu_i) := (\lambda_{i-},\mu_{i-})$ спектра $F(\lambda,\mu)$ принадлежит левому дискретному спектру $F(\lambda,\mu)$, если $\operatorname{rank} Y(\lambda_i,\mu_i) < m-\rho$.

Значок "+" (значок "−") будем опускать, если из контекста ясна принадлежность точки правому (левому) дискретным спектрам. Как правило, мы будем иметь дело с правыми спектральными характеристиками, так что под словами "дискретный спектр" будет пониматься правый дискретный спектр, если не оговорено иначе.

4.1.2. Сопровождающие пучки и их спектральные свойства.

Решение спектральной задачи

$$F(\lambda,\mu)x(\lambda,\mu)=0 \tag{4.1.15}$$

для двухпараметрической полиномиальной $m\times n$ матрицы

$$F(\lambda,\mu)=C_s(\mu)\lambda^s+\cdots+C_0(\mu)$$

может быть осуществлено решением аналогичной задачи

$$D(\lambda,\mu)X(\lambda,\mu)=0 \tag{4.1.16}$$

для пучка $D(\lambda,\mu) := A(\mu)-\lambda B(\mu)$ полиномиальных матриц $A(\mu)$ и $B(\mu)$ больших размеров.

Линеаризация задачи, т.е. переход от (4.1.15) к (4.1.16), реализуется подобно тому, как это сделано в §1.4 для однопараметрических полиномиальных матриц путем введения так называемых сопровождающих пучков (см. пункты 1.4.1–1.4.3).

Для определенности рассуждений в качестве сопровождающего пучка для $F(\lambda,\mu)$ возьмем правый сопровождающий пучок

$$D(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\lambda I_m & \dots & \dots & C_0(\mu)\\ -I_m & \lambda I_m & \dots & C_1(\mu)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ & \ddots & & \\ & -I_m & \lambda I_m & C_{s-2}(\mu)\\ & & -I_m & C_{s-1}(\mu)+\lambda C_s(\mu)\end{bmatrix}.$$

Как и в случае однопараметрических полиномиальных матриц устанавливается справедливость следующих утверждений.

1^0. Пучок $D(\lambda,\mu)$ эквивалентен блочно-диагональной матрице:

$$\text{block diag}\{F(\lambda,\mu), I_{m(n-1)}\} = P(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu)Q(\lambda,\mu).$$

Здесь $P(\lambda,\mu), Q(\lambda,\mu)$ суть матрицы, осуществляющие эквивалентное преобразование.

2^0. Между спектральными характеристиками матрицы $F(\lambda,\mu)$ и пучка $D(\lambda,\mu)$ существует взаимно-однозначное соответствие.

•Правые $x_1,\ldots,x_t$ и левые $y_1,\ldots,y_t$ жордановы цепочки длины t матрицы $F(\lambda,\mu)$ и правые $X_1,\ldots,X_t$ и левые $Y_1,\ldots,Y_t$ жордановы цепочки длины t пучка $D(\lambda,\mu)$, отвечающие одной и той же точке спектра (λ_*,μ_*) матрицы $F(\lambda,\mu)$ и пучка $D(\lambda,\mu)$, связаны соотношениями

$$X_i = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{k!}\, Q_1^{(k)}(\lambda_*,\mu_*)x_{i-k}$$

$$Y_{t-i+1}^H = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{k!}\, y_{t-i+k+1}^H P_1^{(k)}(\lambda_*,\mu_*),\ \ i = 1,\ldots,t.$$

Здесь $P_1(\lambda,\mu)$ и $Q_1(\lambda,\mu)$ первая блочная строка и первый блочный столбец матриц $P(\lambda,\mu)$ и $Q(\lambda,\mu)$ соответственно:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda,\mu) &:= \big[I_m, \lambda I_m, \ldots, \lambda^{n-1} I_m\big] \\ Q_1(\lambda,\mu) &:= \big[B_1(\lambda,\mu), \ldots, B_{n-1}(\lambda,\mu), I_n\big]^B \\ B_i(\lambda,\mu) &:= \sum_{i=0}^{n-k} \lambda^i C_{k+i}(\mu). \end{aligned}$$

•Правые $x(\lambda,\mu)$ (левые $y(\lambda,\mu)$) полиномиальные решения матрицы $F(\lambda,\mu)$ и правые $X(\lambda,\mu)$ (левые $Y(\lambda,\mu)$) полиномиальные решения пучка $D(\lambda,\mu)$ связаны соотношением

$$X(\lambda,\mu) = Q_1(\lambda,\mu)x(\lambda,\mu);$$
$$\big(Y^H(\lambda,\mu) = y^H(\lambda,\mu)P_1(\lambda,\mu)\big).$$

§4.2. Согласованные пучки и их спектральные свойства [44]

4.2.1. Определение. Пусть $D(\lambda,\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ – заданный пучок размеров $m \times n$. Пучок $D_1(\lambda,\mu) = A_1(\mu) - \lambda B_1(\mu)$ назовем согласованным справа с пучком $D(\lambda, \mu)$, если их матрицы связаны соотношением

$$A(\mu)B_1(\mu) = B(\mu)A_1(\mu), \tag{4.2.1}$$

справедливым для любого μ.

Равенство (4.2.1) можно переписать в виде

$$\big[A(\mu), -B(\mu)\big] \begin{bmatrix} B_1(\mu) \\ A_1(\mu) \end{bmatrix} = 0, \tag{4.2.2}$$

(или в виде $\big[-B(\mu), A(\mu)\big] \left[\begin{smallmatrix} A_1(\mu) \\ B_1(\mu) \end{smallmatrix}\right] = 0$), т.е. столбцы матрицы $[B_1(\mu), A_1(\mu)]^B$ принадлежат правому нуль-пространству полиномиальной матрицы $\mathfrak{A}(\mu) \equiv [A(\mu), -B(\mu)]$.

Согласование будет неполным (частичным), если столбцы матрицы $[B_1(\mu),\ A_1(\mu)]^B$ не составляют базис правого нуль-простран ства матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. В противном случае будем говорить о полном согласовании. В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полным согласованием справа. При этом если нет особой необходимости, слова “справа” и “полный” будем опускать. Соотношение (4.2.2) будем называть базовым соотношением согласованных пучков.

4.2.2. Алгоритм построения согласованных пучков.

Для построения пучка $D_1(\lambda, \mu) = A_1(\mu) - \lambda B_1(\mu)$, согласованного с пучком $D(\lambda, \mu)$, следует выполнить следующие операции.

(1) Сформировать полиномиальную матрицу $\mathfrak{A}(\mu) = [A(\mu), -B(\mu)]$ и найти ее правое нуль-пространство $Q(\mu)$, взяв в качестве его базиса объединение минимального базиса $W_0(\mu)$ из правых полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$ и базиса из собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_r$ матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. Очевидно,

$$Q(\mu) = \begin{cases} W_0(\mu), & \text{если} \quad \mu \neq \mu_i, \\ S_i \cup W_0(\mu_i), & \text{если} \quad \mu = \mu_i. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Здесь S_i – подпространство, натянутое на собственные векторы матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, отвечающие собственному значению μ_i.

Для построения $Q(\mu) = W_0(\mu)$ при $\mu \neq \mu_i$ надо выполнить следующие операции.

(1i) Получить ΔW-1 разложение матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$:

$$\mathfrak{A}(\mu)W(\mu) = \big[\Delta(\mu), \mathbb{O}\big].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (2n-r)$ матрица ($r = \operatorname{rank}\mathfrak{A}(\mu)$), $\Delta(\mu)$ – матрица $m \times r$ полного столбцового ранга, $W(\mu)$ – унимодулярная $2n \times 2n$ матрица, которую представим в блочном виде $W(\mu) = [W_1(\mu), W_2(\mu)]$ с блоками $W_1(\mu)$ и $W_2(\mu)$ соответственно размеров $2n \times r$ и $2n \times (2n-r)$, так что столбцы $W_2(\mu)$ образуют унимодулярный базис из правых полиномиальных решений $\mathfrak{A}(\mu)$.

(1ii) Перестроить унимодулярный базис $W_2(\mu)$ в минимальный базис, например, применив к $W_2(\mu)$ алгоритм ΔW-1 разложения. Имеем

$$W_2(\mu)\widetilde{W}(\mu) = \big[W_0(\mu)\big].$$

Здесь $\widetilde{W}(\mu)$ есть унимодулярная порядка $(2n-r)$ матрица, осуществляющая ΔW разложение матрицы $W_2(\mu)$. Столбцы $2n\times(2n-r)$ матрицы $W_0(\mu)$ образуют искомый минимальный базис.

При $\mu = \mu_i$ в качестве $Q(\mu_i)$ можно взять ортонормированный базис Q_i правого нуль-пространства постоянной матрицы $\mathfrak{A}(\mu_i) = [A(\mu_i), -B(\mu_i)]$. Это можно выполнить с помощью ΔW-0 разложения $\mathfrak{A}(\mu_i)$.

(2) Образовать пучок

$$D_1(\lambda, \mu) = A_1(\mu) - \lambda B_1(\mu). \tag{4.2.4}$$

При $\mu \neq \mu_i$ $D_1(\lambda, \mu) = W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu)$, где $W_-(\mu)$ и $W_+(\mu)$ – матрицы, составленные из последних n и первых n строк матрицы $W_0(\mu)$. При $\mu = \mu_i$ $D_1(\lambda, \mu_i) = Q_{i-} - \lambda Q_{i+}$, где Q_{i-} и Q_{i+} суть матрицы, составленные из n последних и n первых строк матрицы Q_i.

По построению пучок $D_1(\lambda, \mu)$ является согласованным с пучком $D(\lambda, \mu)$.

4.2.3. Обращение матрицы $Q(\mu)$.

В дальнейшем следует знать левую обратную матрицу (обозначим ее $Q^\sharp(\mu)$) для матрицы $Q(\mu)$. При $\mu = \mu_i$ матрица $Q(\mu_i) = Q_i$ составлена из ортонормированных столбцов так, что

$$Q^\sharp(\mu_i) = Q_i^T.$$

При $\mu \neq \mu_i$ матрица $Q(\mu) \equiv W_0(\mu)$ составлена из столбцов, образующих минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений $\mathfrak{A}(\mu)$. $W_0(\mu)$ является подматрицей унимодулярной матрицы, поэтому она не имеет правых полиномиальных решений и конечных собственных значений. В дальнейшем матрицу такого типа будем называть матрицей с унимодулярным ядром.

Для построения $W_0^\sharp(\mu)$ докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 4.2. *Для любой $p \times q$ $(q \leqslant p)$ полиномиальной матрицы $M(\mu)$, имеющей унимодулярное ядро, существует полиномиальная левая обратная $q \times p$ матрица $M^\sharp(\mu)$.*

Доказательство проведем конструктивно, описывая алгоритм построения $M^\sharp(\mu)$.

Для этого применим к матрице $M^T(\mu)$ алгоритм ΔW-1 разложения. Имеем

$$M^T(\mu)\widetilde{W}(\mu) = \big[\widetilde{\Delta}(\mu), \mathbb{O}\big],$$

где $\widetilde{W}(\mu)$ – унимодулярная $p \times p$ матрица, $\widetilde{\Delta}(\mu)$ – постоянная неособенная (или унимодулярная) $q \times q$ матрица, $\mathbb{O}$ – нулевая $q \times (p-q)$ матрица. Представим $\widetilde{W}(\mu)$ в блочном виде $\widetilde{W}(\mu) = \big[\widetilde{W}_1(\mu), \widetilde{W}_0(\mu)\big]$ с блоками $\widetilde{W}_1(\mu)$ и $\widetilde{W}_0(\mu)$ размеров $p \times q$ и $p \times (p-q)$, соответственно. Имеем

$$M^T(\mu)\widetilde{W}_1(\mu) = \widetilde{\Delta}(\mu) \qquad \text{или} \qquad \widetilde{W}_1^T M(\mu) = \widetilde{\Delta}^T(\mu).$$

Отсюда, учитывая, что $\Delta^{-T}(\mu)$ существует и является постоянной или унимодулярной матрицей, находим

$$\widetilde{\Delta}^{-T}(\mu)\widetilde{W}_1^T(\mu)M(\mu) = I_q,$$

так что в качестве левой обратной матрицы для $M(\mu)$ можно взять матрицу вида:

$$M^\sharp(\mu) = \widetilde{\Delta}^{-T}(\mu)\widetilde{W}_1^T(\mu), \tag{4.2.5}$$

которая по построению является полиномиальной. Лемма доказана.

Вернемся к построению матрицы $W_0^\sharp(\mu)$. Учитывая, что $W_0(\mu)$ составлена из столбцов унимодулярной матрицы, т.е. удовлетворяет условиям Леммы 4.2, имеем

$$W_0^\sharp(\mu) = \widetilde{\Delta}^{-T}(\mu)\widetilde{W}_1^T(\mu), \tag{4.2.6}$$

где $\widetilde{\Delta}(\mu)$ и $\widetilde{W}_1(\mu)$ получены из ΔW-1 разложения матрицы $W_0^T(\mu)$:

$$W_0^T(\mu)\widetilde{W}(\mu) = \big[\widetilde{\Delta}(\mu), \mathbb{O}\big], \tag{4.2.7}$$

$$\widetilde{W}(\mu) = \big[\widetilde{W}_1(\mu), \widetilde{W}_0(\mu)\big]; \tag{4.2.8}$$

$\widetilde{\Delta}(\mu)$ есть постоянная или унимодулярная $(2n-r)\times(2n-r)$ матрица; $\widetilde{W}_1(\mu)$ – матрица размеров $2n\times(2n-r)$, составленная из первых $2n-r$ столбцов унимодулярной матрицы $\widetilde{W}(\mu)$ разложения (4.2.7).

Следствие 4.3. *Имеет место равенство*

$$\ker W_0^\sharp(\mu) = \ker \widetilde{W}_1^T(\mu). \tag{4.2.9}$$

Справедливость следует из представления $W_0^\sharp(\mu)$ в форме (4.2.6).

Следствие 4.4. *Имеет место равенство*

$$\ker W_0^\sharp(\mu) = im\,\mathfrak{A}^T(\mu), \tag{4.2.10}$$

т.е. подпространство из правых полиномиальных решений матрицы $W_0^\sharp(\mu)$ совпадает с образом оператора, задаваемого матрицей

$$\mathfrak{A}^T(\mu) = \begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}. \tag{4.2.11}$$

Действительно, из (4.2.7) и (4.2.8) следует, что

$$\widetilde{W}_1(\mu) = \operatorname{im} W_0(\mu) = \ker \mathfrak{A}(\mu). \tag{4.2.12}$$

С другой стороны, имеем

$$\ker \mathfrak{A}(\mu) \oplus \operatorname{im} \mathfrak{A}^T(\mu) = \mathbb{C}^{2n}[\mu],$$
$$\operatorname{im} \widetilde{W}_1(\mu) \oplus \ker \widetilde{W}_1^T(\mu) = \mathbb{C}^{2n}[\mu].$$

Отсюда с учетом (4.2.11) и (4.2.12) получаем равенство

$$\ker \widetilde{W}_1^T(\mu) = \operatorname{im} \mathfrak{A}^T(\mu).$$

Так что в силу (4.2.9) имеем

$$\ker W_0^\sharp(\mu) = \operatorname{im} \mathfrak{A}^T(\mu).$$

Справедливость (4.2.10) установлена.

4.2.4. Спектральные свойства согласованных пучков.

Ниже будут рассмотрены спектральные свойства согласованных пучков. Все формулировки свойств и их доказательства приведены для случая, когда согласованный с $D(\lambda,\mu)$ пучок $D_1(\lambda,\mu)$ рассматривается для $\mu\neq\mu_i$, (где μ_i – любое собственное значение матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$), так что $D_1(\lambda,\mu) = W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu)$ есть пучок полиномиальных матриц. В случае $\mu = \mu_i$ доказательство аналогичных свойств проводится по тому же плану с заменой $W_0(\mu)$ на Q_i, $W_0^\sharp(\mu)$ на Q_i^T, пучка $D_1(\lambda,\mu)$ полиномиальных матриц на пучок $D_1(\lambda,\mu_i) = Q_{i-} - \lambda Q_{i+}$ постоянных матриц.

Перейдем к рассмотрению следующих свойств.

1^0. *Между правыми полиномиальными решениями $x(\lambda,\mu)$ и $y(\lambda,\mu)$ согласованных пучков $D(\lambda,\mu)$ и $D_1(\lambda,\mu)$ соответственно, существует взаимно однозначное соответствие. При этом степень по λ у $y(\lambda,\mu)$ на единицу больше степени $x(\lambda,\mu)$.*

Доказательство. Пусть

$$x(\lambda,\mu) = a_s(\mu)\lambda^s + \cdots + a_0(\mu)$$

имеет степень s, так что $a_s(\mu) \not\equiv 0$ и $a_0(\mu) \not\equiv 0$. Покажем, что $y(\lambda,\mu) = W_0^\sharp(\mu) z(\lambda,\mu) = b_{s+1}(\mu)\lambda^{s+1} + \cdots + b_0(\mu)$ есть правое полиномиальное решение степени $s+1$ пучка $D_1(\lambda,\mu)$, т.е. $b_{s+1}(\mu) \not\equiv 0$ и $b_0(\mu) \not\equiv 0$.

Здесь полиномиальный вектор $z(\lambda,\mu) = [x(\lambda,\mu), \lambda x(\lambda,\mu)]^B$ принадлежит правому нуль-пространству матрицы $\mathfrak{A}(\mu) = [A(\mu), -B(\mu)]$. Следовательно, существует полиномиальный вектор $y(\lambda,\mu)$ такой, что имеет место тождественное относительно λ равенство $W_0(\mu) y(\lambda,\mu) = z(\lambda,\mu)$ или $y(\lambda,\mu) = W_0^\sharp(\mu) z(\lambda,\mu)$. В силу строения $z(\lambda,\mu)$ при любом λ справедливо равенство:

$$\bigl(W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu)\bigr) y(\lambda,\mu) = 0.$$

Откуда следует, что $y(\lambda,\mu) = W_0^\sharp(\mu) z(\lambda,\mu)$ есть правое полиномиальное решение пучка $D_1(\lambda,\mu)$, соответствующее правому полиномиальному решению $x(\lambda,\mu)$ пучка $D(\lambda,\mu)$. Далее представим $y(\lambda,\mu)$ в виде:

$$y(\lambda,\mu) = b_{s+1}(\mu)\lambda^{s+1} + b_s(\mu)\lambda^s + \cdots + b_0(\mu),$$

где $b_{s+1}(\mu) = W_0^\sharp(\mu) \begin{bmatrix} 0 \\ a_s(\mu) \end{bmatrix}$, $b_0(\mu) = W_0^\sharp(\mu) \begin{bmatrix} a_0(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}$. Надо установить, что $b_{s+1}(\mu) \not\equiv 0$ и $b_0(\mu) \not\equiv 0$, т.е. $y(\lambda,\mu)$ имеет степень $s+1$. Для этого достаточно показать, что $a_s(\mu)$ и $a_0(\mu)$ не принадлежит правому нуль-пространству матрицы $W_0^\sharp(\mu)$, которое совпадает, учитывая (4.2.10), с $\operatorname{im} \begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}$.

Из (4.1.8) следует, что $a_0(\mu) \in \ker A(\mu)$, $a_s(\mu) \in \ker B(\mu)$, тогда, учитывая соотношения

$$\ker A(\mu) \oplus \operatorname{im} A^T(\mu) = \mathbb{C}^n[\mu],$$
$$\ker B(\mu) \oplus \operatorname{im} B^T(\mu) = \mathbb{C}^n[\mu],$$

заключаем, что $a_0(\mu) \notin \operatorname{im} A^T(\mu)$, $a_s(\mu) \notin \operatorname{im} B^T(\mu)$. Следовательно, векторы $a_0(\mu)$ и $a_s(\mu)$ не принадлежат $\operatorname{im} \left[\begin{smallmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{smallmatrix}\right]$, что завершает доказательство прямого утверждения.

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y(\lambda, \mu)$ есть правое полиномиальное решение пучка $D_1(\lambda,\, \mu)$ степени $s+1$. Сначала установим, что

$$x(\lambda, \mu) = W_+(\mu) y(\lambda, \mu)$$

есть правое полиномиальное решение пучка $D(\lambda, \mu)$. Действительно, учитывая, что

$$\big(W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu)\big) y(\lambda, \mu) = 0$$

при любом λ, имеем

$$\begin{aligned} &\big(A(\mu) - \lambda B(\mu)\big) W_+(\mu) y(\lambda, \mu) = \\ &= A(\mu) W_+(\mu) y(\lambda, \mu) - \lambda B(\mu) W_+(\mu) y(\lambda, \mu) = \\ &= A(\mu) W_+(\mu) y(\lambda, \mu) - B(\mu) W_-(\mu) y(\lambda, \mu) = \\ &= \big[A(\mu), -B(\mu)\big] \begin{bmatrix} W_+(\mu) \\ W_-(\mu) \end{bmatrix} y(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

По построению $\left[\begin{smallmatrix} W_+(\mu) \\ W_-(\mu) \end{smallmatrix}\right] = W_0(\mu)$ и $[A(\mu), -B(\mu)] W_0(\mu) = 0$. Отсюда при любом λ имеем

$$\big(A(\mu) - \lambda B(\mu)\big) W_+(\mu) y(\lambda, \mu) = 0, \quad \text{т.е.} \quad x(\lambda, \mu) \equiv W_+(\mu) y(\lambda, \mu)$$

есть правое полиномиальное решение пучка $D(\lambda, \mu)$. Далее докажем, что степень $x(\lambda, \mu)$ на единицу меньше степени

$$y(\lambda, \mu) = b_{s+1}(\mu) \lambda^{s+1} + \cdots + b_0(\mu), \qquad b_{s+1}(\mu) \not\equiv 0, \quad b_0(\mu) \not\equiv 0.$$

Для этого, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в тождестве:

$$\begin{aligned} W_0(\mu) y(\lambda, \mu) = z(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} x(\lambda, \mu) \\ \lambda x(\lambda, \mu) \end{bmatrix} = \\ = W_0(\mu) b_{s+1}(\mu) \lambda^{s+1} + \cdots + W_0(\mu) b_0(\mu), \end{aligned}$$

получим

$$W_0(\mu) b_{s+1}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_s(\mu) \end{bmatrix}, \qquad W_0(\mu) b_0(\mu) = \begin{bmatrix} a_0(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $W_0(\mu)$ имеет полный столбцовый ранг, $b_{s+1}(\mu) \not\equiv 0$ и $b_0(\mu) \not\equiv 0$, отсюда находим $a_s(\mu) \not\equiv 0$ и $a_0(\mu) \not\equiv 0$, так что

$$x(\lambda, \mu) = a_s(\mu)\lambda^s + \cdots + a_0(\mu)$$

имеет степень s. Справедливость свойства 1^0 установлена.

Следствие 4.5. *Пучок $D_1(\lambda, \mu) = W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu)$ не имеет правых полиномиальных решений нулевой степени.*

Справедливость утверждения следует из полноты столбцового ранга матрицы $W_0(\mu)$.

Следствие 4.6. *Правые полиномиальные решения $x(\lambda, \mu)$ и $y(\lambda, \mu)$, соответственно пучков $D(\lambda, \mu)$ и $D_1(\lambda, \mu)$ связаны соотношениями*

$$x(\lambda, \mu) = W_+(\mu) y(\lambda, \mu)$$
$$y(\lambda, \mu) = W_0^\sharp(\mu) z(\lambda, \mu) = W_0^\sharp(\mu) \begin{bmatrix} x(\lambda, \mu) \\ \lambda x(\lambda, \mu) \end{bmatrix}.$$

Справедливость установлена при доказательстве свойства 1^0.

2^0. *Между минимальными базисами из правых полиномиальных решений пучков $D(\lambda, \mu)$ и $D_1(\lambda, \mu)$ существует взаимно однозначное соответствие.*

Сначала установим, что столбцы матрицы

$$Y(\lambda, \mu) = W_0^\sharp(\mu) \begin{bmatrix} X(\lambda, \mu) \\ \lambda X(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \equiv \left[y_1(\lambda, \mu), \ldots, y_N(\lambda, \mu)\right]$$

образуют минимальный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений пучка $D_1(\lambda, \mu)$, если столбцы матрицы $X(\lambda, \mu) \equiv [x_1(\lambda, \mu), \ldots, x_N(\lambda, \mu)]$ образуют минимальный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений $D(\lambda, \mu)$. Для этого достаточно установить справедливость утверждений: а) матрица $Y(\lambda, \mu)$ имеет полный столбцовый ранг; б) матрица $Y(\lambda, \mu)$ не имеет одномерных собственных значений (за исключением, быть может собственных значений (λ, μ_*), $\mu_* \in \{\mathbb{C} \cup \infty\}$ и (∞, μ)); в) матрица $V(\mu) \equiv [b_{s_1+1}(\mu), \ldots, b_{s_N+1}(\mu)]$, составленная из коэффициентов при старших степенях λ полиномиальных столбцов матрицы $Y(\lambda, \mu)$, имеет полный столбцовый ранг.

Доказательство утверждения а) проведено от противного.

Пусть $Y(\lambda, \mu)$ не имеет полного столбцового ранга, т.е. существует правое полиномиальное решение $\omega(\lambda, \mu)$, что при любом λ

$$Y(\lambda, \mu) W(\mu) = W_0^\sharp(\mu) Z(\lambda, \mu) \omega(\lambda, \mu) = 0.$$

Учитывая, что матрица $Z(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} X(\lambda,\mu) \\ \lambda X(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ полного столбцового ранга, отсюда имеем $Z(\lambda,\mu)\omega(\lambda,\mu) \in \ker W_0^\sharp(\mu)$, а следовательно, в силу (4.2.10) не принадлежит $W_0(\mu) = \ker \mathfrak{A}(\mu)$, что противоречит предположению, что столбцы $Z(\lambda,\mu)$ принадлежат $W_0(\mu)$. Из противоречия следует справедливость пункта а).

От противного докажем утверждение б).

Пусть матрица $Y(\lambda,\mu)$ имеет одномерное собственное значение $(\varphi(\mu),\mu)$, которому соответствует собственный вектор $\omega(\mu)$:

$$Y\big(\varphi(\mu),\mu\big)\omega(\mu) = W_0^\sharp(\mu)Z\big(\varphi(\mu),\mu\big)\omega(\mu) = 0.$$

Поскольку матрица $Z(\varphi(\mu),\mu)$ имеет полный ранг (благодаря тому, что матрица $X(\varphi(\mu),\mu)$ имеет полный ранг), имеем $Z(\varphi(\mu),\mu)\omega(\mu) \in \ker W_0^\sharp(\mu)$. Следовательно, опять в силу (4.2.10), столбцы матрицы $Z(\varphi(\mu),\mu)$ не принадлежат $W_0(\mu)$. Полученное противоречие доказывает справедливость пункта б).

Перейдем к доказательству пункта в). Для этого образуем матрицу $U(\mu)$ из коэффициентов при старших степенях λ векторных столбцов $Z(\lambda,\mu)$. Имеем

$$U(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_1}(\mu) & a_{s_2}(\mu) & \dots & a_{s_N}(\mu) \end{bmatrix},$$

где $[a_{s_1}(\mu),\dots,a_{s_N}(\mu)]$ – коэффициенты при старших степенях λ столбцов матрицы $X(\lambda,\mu)$. По условию векторы $a_{s_1}(\mu)$, $a_{s_2}(\mu)$, …, $a_{s_N}(\mu)$ линейно независимые, а следовательно, $U(\mu)$ есть матрица полного столбцового ранга. С другой стороны,

$$U(\mu) = W_0(\mu)\big[b_{s_1+1}(\mu),\dots,b_{s_N+1}(\mu)\big]$$

и $W_0(\mu)$ есть матрицы полного столбцового ранга, причем $\operatorname{rank} W_0(\mu) = 2n - r \geqslant N$, $\operatorname{rank} U(\mu) = N$. Отсюда матрица $[b_{s_1+1}(\mu),\dots,b_{s_N+1}(\mu)]$ имеет полный столбцовый ранг. Прямое утверждение свойства 2^0 доказано.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Пусть $Y(\lambda,\mu)$ – минимальный базис из правых полиномиальных решений пучка $D_1(\lambda,\mu)$ и матрица $X(\lambda,\mu) = [x_1(\lambda,\mu),\dots,x_N(\lambda,\mu)]$ составлена из полиномиальных решений $D(\lambda,\mu)$, соответствующих полиномиальным решениям $Y(\lambda,\mu) = [y_1(\lambda,\mu),\dots,y_N(\lambda,\mu)]$ пучка $D_1(\lambda,\mu)$. Докажем, что столбцы $X(\lambda,\mu)$ образуют минимальный базис из правых полиномиальных решений пучка $D(\lambda,\mu)$. Сначала установим, что $x_1(\lambda,\mu),\dots,x_N(\lambda,\mu)$ – линейно независимые над кольцом скалярных полиномов. Допустим противное, пусть $\omega(\lambda,\mu) \not\equiv 0$ есть такой полином, что при любом λ имеет место

$$X(\lambda,\mu)\omega(\lambda,\mu) = 0.$$

Тогда $Z(\lambda,\mu)\omega(\lambda,\mu) = 0$, где $Z(\lambda,\mu) \equiv [X(\lambda,\mu), \lambda X(\lambda,\mu)]^B$. Но

$$Z(\lambda,\mu) \equiv W_0(\mu)Y(\lambda,\mu), \tag{4.2.13}$$

т.е. имеет полный столбцовый ранг. Противоречие доказывает линейную независимость столбцов $X(\lambda,\mu)$.

Далее установим, что матрица $[a_{s_1}(\mu),\dots,a_{s_N}(\mu)]$, составленная из коэффициентов при старших степенях λ векторных столбцов матрицы $X(\lambda,\mu)$, имеет полный столбцовый ранг.

Рассмотрим матрицу

$$U(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{s_1}(\mu) & \dots & a_{s_N}(\mu) \end{bmatrix}, \tag{4.2.14}$$

составленную из коэффициентов при старших степенях λ векторных столбцов $Z(\lambda,\mu)$. Из (4.2.13) имеем

$$U(\mu) = W_0(\mu)\big[b_{s_1+1}(\mu),\dots,b_{s_N+1}(\mu)\big],$$

где матрицы $W_0(\mu)$ и $[b_{s_1+1}(\mu),\dots,b_{s_N+1}(\mu)]$ имеют полный столбцовый ранг. Отсюда $U(\mu)$ имеет также полный столбцовый ранг. Тогда из (4.2.14) следует, что матрица $[a_{s_1}(\mu),\dots,a_{s_N}(\mu)]$ имеет полный столбцовый ранг. Таким образом установлено, что $X(\lambda,\mu)$ образует минимальный базис из правых полиномиальных решений пучка $D(\lambda,\mu)$. Свойство 2^0 доказано.

Следствие 4.7. *Каждый правый минимальный индекс по λ пучка $D(\lambda,\mu)$ на единицу меньше правого минимального индекса пучка $D_1(\lambda,\mu)$.*

Следствие 4.8. *Правые минимальные базисы из правых полиномиальных решений пучков $D(\lambda,\mu)$ и $D_1(\lambda,\mu)$ связаны соотношениями:*

$$X(\lambda,\mu) = W_+(\mu)Y(\lambda,\mu),$$
$$Y(\lambda,\mu) = W_0^\sharp(\mu)Z(\lambda,\mu).$$

Справедливость следствий 4.7 и 4.8 вытекает из свойства 2^0.

Следствие 4.9. *Каждый левый минимальный индекс по λ пучка $D(\lambda,\mu)$ при переходе к пучку $D_1(\lambda,\mu)$ уменьшается на единицу.*

Учитывая, что любое левое полиномиальное решение пучка является правым полиномиальным решением транспонированного пучка, доказательство следствия проведем для пучков $D_1^T(\lambda,\mu)$ и $D^T(\lambda,\mu)$, т.е. установим, что любой правый минимальный индекс пучка $D_1^T(\lambda,\mu)$ меньше на единицу соответствующего правого минимального индекса пучка $D^T(\lambda,\mu)$. Действительно, транспонируя равенство

$$[A(\mu), -B(\mu)] \begin{bmatrix} W_+(\mu) \\ W_-(\mu) \end{bmatrix} = 0,$$

получим

$$[W_+^T(\mu), W_-^T(\mu)] \begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix} = 0,$$

так что столбцы $\begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}$ принадлежат нуль-пространству из правых полиномиальных решений матрицы

$$[W_+^T(\mu), W_-^T(\mu)].$$

Покажем, что размерность этого нуль-пространства матрицы $[W_+^T(\mu), W_-^T(\mu)]$ не больше m, где m – число строк пучка $D(\lambda,\mu)$. Действительно, имеем

$$\operatorname{rank}[A(\mu), -B(\mu)] = r \quad \text{и} \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} W_+(\mu) \\ W_-(\mu) \end{bmatrix} = 2n - r,$$

так что $\dim\ker[W_+^T(\mu), W_-^T(\mu)] = r$, но $r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix} \leqslant m$. Возможны два случая: $r = m$ и $r < m$.

Пусть $r = m$, т.е. столбцы $\begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}$ образуют нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы $[W_+^T(\mu), W_-^T(\mu)]$.

Не умаляя общности, считаем, что столбцы матрицы $\begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}$ составлены из столбцов унимодулярной матрицы. Предположим, что пучок $D_1^T(\mu) = W_-^T(\mu) - \lambda W_+^T(\mu)$ имеет правое полиномиальное решение степени t. Тогда ему соответствует правое полиномиальное решение пучка $D^T(\lambda,\mu)$, степень которого по следствию 4.7 на единицу больше. Справедливость следствия для $r = m$ установлена.

Рассмотрим случай $r < m$, т.е. столбцы $\begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}$ линейно зависимые над кольцом скалярных полиномов, так что пучок

$A^T(\mu) - \lambda B^T(\mu)$ имеет правые нулевой степени по λ полиномиальные решения и при этом размерность базиса, составленного из них, равна $m-r$. Выделим из столбцов $\begin{bmatrix} A^T(\mu) \\ -B^T(\mu) \end{bmatrix}$ линейно независимые столбцы. Пусть они образуют матрицу $\begin{bmatrix} \widehat{A}^T(\mu) \\ -\widehat{B}^T(\mu) \end{bmatrix}$ полного столбцового ранга, т.е. пучок $\widehat{A}^T(\mu) - \lambda \widehat{B}^T(\mu)$ есть сужение пучка $D^T(\lambda, \mu)$ на подпространтсве, не содержащее правых нулевой степени по λ полиномиальных решений. Итак, при $r < m$ столбцы матрицы $[\widehat{A}^T(\mu) - \lambda \widehat{B}^T(\mu)]$ образуют базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $[W_+^T(\mu), -W_-^T(\mu)]$. Далее, как и в следствии 4.7, устанавливается, что каждый минимальный индекс пучка $D_1^T(\lambda, \mu)$ на единицу меньше соответствующего правого минимального индекса пучка $\widehat{A}(\mu) - \lambda \widehat{B}(\mu)$, что и завершает доказательство сделанного утверждения.

3^0. *Собственные значения согласованных справа пучков $D(\lambda, \mu)$ и $D_1(\lambda, \mu)$ совпадают, а между соответствующими им правыми жордановыми цепочками векторов существует взаимно однозначное соответствие.*

Это свойство справедливо для любого собственного значения из непрерывной и дискретной частей спектра.

Пусть (λ_*, μ_*) – точка спектра пучка $D(\lambda, \mu)$, а $x_1, \ldots, x_t$ соответствующая ей правая жорданова цепочка векторов длины t. Покажем, что (λ_*, μ_*) является также точкой спектра пучка $D_1(\lambda, \mu)$ с соответствующей ей правой жордановой цепочкой векторов $y_1, \ldots, y_t$ вида

$$y_1 = W_0^\sharp(\mu_*) \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_* x_1 \end{bmatrix}, \qquad y_l = W_0^\sharp(\mu_*) \begin{bmatrix} x_l \\ \lambda_* x_l + x_{l-1} \end{bmatrix}.$$

Введем матрицу

$$U_* = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_t \\ \lambda_* x_1 & \lambda_* x_2 + x_1 & \ldots & \lambda_* x_t + x_{t-1} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\big[A(\mu_*), -B(\mu_*)\big] U_* = 0,$$

т.е. столбцы матрицы U_* принадлежат правому нуль-пространству $W_0(\mu_*)$ матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*) = [A(\mu_*), -B(\mu_*)]$. Следовательно, существует такая матрица

$$V_* = \big[y_1, \ldots, y_t\big],$$

что имеет место равенство

$$W_0(\mu_*)V_* = U_*. \tag{4.2.15}$$

Учитывая, что $W_0(\mu_*) = [W_+(\mu_*), W_-(\mu_*)]^B$, из (4.2.15) имеет цепочку равенств

$$\begin{aligned} W_+(\mu_*)y_1 = x_1, \quad & W_-(\mu_*)y_1 = \lambda_* x_1, \\ W_+(\mu_*)y_l = x_l, \quad & W_-(\mu_*)y_l = \lambda_* x_l + x_{l-1}, \quad l = 2, \dots, t, \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

откуда следует, что

$$W_0(\mu_*)y_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_* x_1 \end{bmatrix}, \qquad W_0(\mu_*)y_l = \begin{bmatrix} x_l \\ \lambda_* x_l + x_{l-1} \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t.$$

Следовательно,

$$y_1 = W_0^\sharp(\mu_*) \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_* x_1 \end{bmatrix}, \qquad y_l = W_0^\sharp(\mu_*) \begin{bmatrix} x_l \\ \lambda_* x_l + x_{l-1} \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t.$$

Из равенств (4.2.16) имеем

$$\begin{aligned} & D_1(\lambda_*, \mu_*)y_1 = 0 \\ & D_1(\lambda_*, \mu_*)y_l = W_+(\mu_*)y_{l-1}, \qquad l = 2, \dots, t. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Сначала покажем, что так построенные векторы $y_1, \dots, y_t$ являются линейно независимыми. Для этого достаточно установить, что $\operatorname{rank} V_* = t$. Допустим противное, пусть $\operatorname{rank} V_* < t$. Тогда с учетом, что $\operatorname{rank} W_0(\mu_*)V_* = \operatorname{rank} U_*$ и $\operatorname{rank} W_0(\mu_*) = 2n - r \geqslant n \geqslant t$ получим, что $\operatorname{rank} V_* = t$. Линейная независимость векторов $y_1, \dots, y_t$ установлена.

Далее из равенств (4.2.17) следует, что длина t_1 жордановой цепочки $y_1, \dots, y_{t_1}$ не меньше t. Покажем, что $t_1 = t$. Доказательство от противного, пусть $t_1 > t$ и имеет место равенство

$$D_1(\lambda_*, \mu_*)y_{t+1} = W_+(\mu_*)y_t.$$

Умножим обе части равенства слева на матрицу $B(\mu_*)$. Тогда, принимая во внимание фундаментальное равенство согласованных пучков $A(\mu_*)W_+(\mu_*) = B(\mu_*)W_-(\mu_*)$, имеем

$$D(\lambda_*, \mu_*)W_+(\mu_*)y_{t+1} = B(\mu_*)W_+(\mu_*)y_t,$$

т.е. вектор $\xi = W_1(\mu_*)y_{t+1}$ является решением системы

$$D(\lambda_*, \mu_*)\xi = B(\mu_*)x_t,$$

которая по предположению является несовместной.

Докажем обратное утверждение. Пусть $y_1, \dots, y_t$ жорданова цепочка векторов, соответствующая точке спектра (λ_*, μ_*) пучка $D_1(\lambda, \mu)$. Надо установить, что векторы

$$x_l = W_+(\mu_*) y_l, \qquad l = 1, \dots, t \tag{4.2.18}$$

образуют жорданову цепочку той же длины t, соответствующую точке спектра (λ_*, μ_*) пучка $D(\lambda, \mu)$. По условию имеют место равенства (4.2.17):

$$\begin{aligned} &D_1(\lambda_*, \mu_*) y_1 = 0 \\ &D_1(\lambda_*, \mu_*) y_l = W_+(\mu_*) y_{l-1}, \qquad l = 2, \dots, t, \end{aligned}$$

причем система $D_1(\lambda_*, \mu_*)\xi = W_+(\mu_*) y_t$ несовместна.

Умножим равенства слева на матрицу $B(\mu_*)$. Тогда, учитывая фундаментальное соотношение $B(\mu_*) W_-(\mu_*) = A(\mu_*) W_+(\mu_*)$, получаем

$$\begin{aligned} &D(\lambda_*, \mu_*) x_1 = 0 \\ &D(\lambda_*, \mu_*) x_l = B(\mu_*) x_{l-1}, \qquad l = 2, \dots, t. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Установим линейную независимость векторов $x_1, \dots, x_t$. Предположим обратное: существует вектор $\Gamma_* \neq 0$ такой, что

$$[x_1, \dots, x_t]\, \Gamma_* = 0.$$

Учитывая формулы (4.2.18) для определения векторов x_l, $l = 1, \dots, t$, получаем

$$W_+(\mu_*) [y_1, \dots, y_t]\, \Gamma_* = 0.$$

Из этого равенства следует, что вектор

$$\widetilde{y} = [y_1, \dots, y_t]\, \Gamma_*$$

либо является нулевым, либо принадлежит $\{\ker W_+(\mu_*) \setminus 0\}$.

Равенство $\widetilde{y} = 0$ означает линейную зависимость векторов $y_1, \dots, y_t$, что противоречит исходному предположению.

Принадлежность $\widetilde{y} \in \{\ker W_+(\mu_*) \setminus 0\}$ означала бы, что вектор $\widetilde{y}$ является либо собственным вектором пучка $D_1(\lambda, \mu)$, отвечающим точке спектра (∞, μ_*), либо значением правого полиномиального решения этого пучка, вычисленным при $\lambda = \infty$ (т.е. линейной комбинацией векторных коэффициентов при старших степенях полиномиальных решений пучка $D_1(\lambda, \mu)$).

Обе возможности противоречат известным условиям линейной независимости векторов из жордановых цепочек, отвечающих различным собственным значениям ($\lambda_* \neq \infty$), и векторных коэффициентов полиномиальных решений.

Докажем теперь, что длина t_1 жордановой цепочки $x_1, \dots, x_{t_1}$ равна t. Предположим обратное: $t_1 > t$, тогда имеет место равенство

$$D(\lambda_*, \mu_*)x_{t+1} = B(\mu_*)x_t.$$

Из этого равенства вытекает, что вектор $[x_{t+1}, \lambda_* x_{t+1} + x_t]^B$ принадлежит $W_0(\mu_*)$. Следовательно, найдется ненулевой вектор $\widetilde{y}$, удовлетворяющий равенствам

$$W_0(\mu_*)\widetilde{y} = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_* x_{t+1} + x_t \end{bmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{matrix} W_+(\mu_*)\widetilde{y} = x_{t+1}, \\ W_-(\mu_*)\widetilde{y} = \lambda_* x_{t+1} + x_t \end{matrix}.$$

Учитывая, что $x_t = W_+(\mu_*)y_t$, получим равенство

$$D_1(\lambda_*, \mu_*)\widetilde{y} = W_+(\mu_*)y_t,$$

противоречащее предположению о несовместности системы:

$$D_1(\lambda_*, \mu_*)\xi = W_+(\mu_*)y_t.$$

Следовательно, $t_1 = t$, что и завершает доказательство свойства 3^0.

Следствие 4.10. *Векторы правых жордановых цепочек, отвечающих одному и тому же собственному значению согласованных пучков $D(\lambda, \mu)$ и $D_1(\lambda, \mu)$ связаны следующими соотношениями:*

а) *Для одномерного собственного значения $(\lambda_* = \varphi(\mu), \mu)$, $\lambda_* \neq \infty$ при $\mu \neq \mu_i$, где μ_i – собственное значение матрицы $\mathfrak{A}(\mu) = [A(\mu), -B(\mu)]$:*

$$x_l(\mu) = W_+(\mu)y_l(\mu), \qquad l = 1, \dots, t;$$

$$y_1(\mu) = W_0^\sharp(\mu)\begin{bmatrix} x_1(\mu) \\ \lambda_* x_1(\mu) \end{bmatrix}, \; y_l(\mu) = W_0^\sharp(\mu)\begin{bmatrix} x_l(\mu) \\ \lambda_* x_l(\mu) + x_{l-1}(\mu) \end{bmatrix},$$
$$l = 2, \dots, t;$$

при $\mu = \mu_i$

$$x_l(\mu_i) = Q_{i+}y_l(\mu_i), \qquad l = 1, \dots, t;$$

$$y_1(\mu_i) = Q_i^T\begin{bmatrix} x_1(\mu_i) \\ \lambda_* x_1(\mu_i) \end{bmatrix}, \; y_l(\mu_i) = Q_i^T\begin{bmatrix} x_l(\mu_i) \\ \lambda_* x_l(\mu_i) + x_{l-1}(\mu_i) \end{bmatrix},$$
$$l = 2, \dots, t,$$

где Q_i – ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}(\mu_i)$: Q_{i+}, Q_{i-} – матрицы, составленные из первых и последних n-строк матрицы Q_i, соответственно.

б) *Для нульмерного собственного значения (λ_*, μ_*)*

$$x_l = Q_{*+}y_l, \qquad l = 1, \dots, t;$$
$$y_1 = Q_*^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_* x_1 \end{bmatrix}, \quad y_l = Q_*^T \begin{bmatrix} x_l \\ \lambda_* x_l + x_{l-1} \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t,$$

где Q_* – ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*)$: Q_{*+}, Q_{*-} – матрицы, составленные из первых и последних n-строк матрицы Q_*, соответственно.

в) *Если $\lambda_* = \infty$, то векторы из жордановых цепочек $D(\lambda, \mu)$ и $D_1(\lambda, \mu)$ связаны соотношениями:*

при $\mu \neq \mu_i$

$$x_l(\mu) = W_-(\mu)y_l(\mu), \qquad l = 1, \dots, t;$$
$$y_1(\mu) = W_0^\sharp(\mu) \begin{bmatrix} 0 \\ x_1(\mu) \end{bmatrix}, \quad y_l(\mu) = W_0^\sharp(\mu) \begin{bmatrix} x_{l-1}(\mu) \\ x_l(\mu) \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t;$$

при $\mu = \mu_i$

$$x_l(\mu_i) = Q_{i-}y_l(\mu_i), \qquad l = 1, \dots, t;$$
$$y_1(\mu_i) = Q_i^T \begin{bmatrix} 0 \\ x_1(\mu_i) \end{bmatrix}, \quad y_l(\mu_i) = Q_i^T \begin{bmatrix} x_{l-1}(\mu_i) \\ x_l(\mu_i) \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t;$$

г) *Если (∞, μ_*) есть нульмерное собственное значение, то*

$$x_l = Q_{*-}y_l, \qquad l = 1, \dots, t;$$
$$y_1 = Q_*^T \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad y_l = Q_*^T \begin{bmatrix} x_{l-1} \\ x_l \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t.$$

Как мы уже говорили в гл. 1, спектральные свойства $1^0 - 3^0$ и следствия к ним справедливы для согласованных пучков $D(\lambda) = A - \lambda B$ и $D_1 = Q_- \lambda Q_+$ с постоянными матрицами. Приводим эти свойства.

1^0. *Между правыми полиномиальными решениями $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ согласованных пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$, соответственно, существует взаимно однозначное соответствие*

$$x(\lambda) = Q_+ y(\lambda), \qquad y(\lambda) = Q_0^T \left[x(\lambda), \lambda x(\lambda)\right]^B,$$

при этом степень $y(\lambda)$ на единицу больше степени $x(\lambda)$; пучок $D_1(\lambda)$ не имеет правых полиномиальных решений нулевой степени. Здесь и ниже Q_0 – ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A} = [A, -B]$, Q_+ – матрица, составленная из первых n строк матрицы Q_0.

2^0. *Между минимальными базисами пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ существует взаимно однозначное соответствие:*

$$X(\lambda) = \left[x_1(\lambda), \dots, x_N(\lambda)\right] = Q_+ Y(\lambda),$$
$$Y(\lambda) = \left[y_1(\lambda), \dots, y_N(\lambda)\right],$$
$$Y(\lambda) = Q_0^T \left[X(\lambda), \lambda X(\lambda)\right]^B.$$

При этом каждый правый минимальный индекс пучка $D_1(\lambda)$ на единицу больше правого минимального индекса пучка $D(\lambda)$, каждый левый минимальный индекс пучка $D_1(\lambda)$ на единицу меньше соответствующего левого минимального индекса пучка $D(\lambda)$.

Здесь через $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ обозначены матрицы, столбцы которых составляют минимальные базисы из правых полиномиальных решений пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$, соответственно.

3^0. *Собственные значения пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ совпадают, а между соответствующими им правыми жордановыми цепочками векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению λ_* пучков $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ существует взаимно однозначное соответствие*

$$x_l = Q_+ y_l, \qquad l = 1, \dots, t;$$
$$y_1 = Q_0^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_* x_1 \end{bmatrix}, \quad y_l = Q_0^T \begin{bmatrix} x_l \\ \lambda_* x_l + x_{l-1} \end{bmatrix}, \quad l = 2, \dots, t.$$

Здесь обозначены $x_1, \dots, x_t$ – жорданова цепочка векторов пучка $D(\lambda)$; $y_1, \dots, y_t$ – соответствующая ей жорданова цепочка векторов пучка $D_1(\lambda)$.

Замечание. Свойства $1^0 - 3^0$ для согласованных пучков с постоянными матрицами были исследованы в [77] и в работах автора в связи с изучением свойств AB-алгоритма и его модификаций.

§4.3. Понижающие подпространства и их свойства [44, 160, 237, 287]

4.3.1. Понижающие подпространства для регулярного пучка.

Понятие понижающего подпространства, рассмотренное в гл. 1 для пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$ с постоянными матрицами, распространим на случай пучков $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ с полиномиальными матрицами.

Пусть $X(\mu)$ есть подпространство размерности l в $\mathbb{C}^n[\mu]$, $Y(\mu) = A(\mu)X(\mu) + B(\mu)X(\mu)$, так что $A(\mu)X(\mu) \subset Y(\mu)$, $B(\mu)X(\mu) \subset Y(\mu)$.

Будем говорить, что пара $\big(X(\mu), Y(\mu)\big)$ образует пару правых понижающих (deflating) подпространств регулярного пучка $D(\lambda, \mu)$, если $\dim Y(\mu) = \dim X(\mu)$. Пара $\big(U(\mu), V(\mu)\big)$ левых понижающих подпространств для пучка $D(\lambda, \mu)$ определяется как правая пара понижающих подпространств для пучка $D^H(\lambda, \mu) = A^H(\mu) - \lambda B^H(\mu)$.

Пусть унимодулярные матрицы

$$Z(\mu) = \big[Z_1(\mu), Z_2(\mu)\big] \qquad \text{и} \qquad \mathcal{P}(\mu) = \big[\mathcal{P}_1(\mu), \mathcal{P}_2(\mu)\big]$$

таковы, что столбцы матриц $Z_1(\mu)$ и $\mathcal{P}_1(\mu)$ образуют некоторые унимодулярные базисы подпространств $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ одинаковых размерностей. Образуем пучок

$$\widehat{D}(\lambda, \mu) = \mathcal{P}^H(\mu) D(\lambda, \mu) Z(\mu) = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{11}(\lambda, \mu) & \widehat{D}_{12}(\lambda, \mu) \\ \widehat{D}_{21}(\lambda, \mu) & \widehat{D}_{22}(\lambda, \mu) \end{bmatrix}, \qquad (4.3.1)$$

где $\widehat{D}_{ij}(\lambda, \mu) = \mathcal{P}_i^H(\mu) D(\lambda, \mu) Z_j(\mu) = \widehat{A}_{ij}(\mu) - \lambda \widehat{B}_{ij}(\mu), \quad i, j = 1, 2.$

Справедлива теорема.

Теорема 4.11. *Для того, чтобы пара $\big(X(\mu), Y(\mu)\big)$ была парой понижающих подпространств для регулярного пучка $D(\lambda, \mu)$ полиномиальных матриц, необходимо и достаточно, чтобы пучок $\widehat{D}_{21}(\lambda, \mu)$ был нулевым ($\widehat{A}_{21}(\mu) = \widehat{B}_{21}(\mu) = \mathbb{O}$). При этом имеют место следующие свойства.*

1) *Объединение спектров пучков $\widehat{D}_{11}(\lambda, \mu)$ и $\widehat{D}_{22}(\lambda, \mu)$ совпадает со спектром пучка $D(\lambda, \mu)$.*

2) *Правая и левая пары понижающих подпространств для $D(\lambda, \mu)$ взаимно связаны: если унимодулярные матрицы $Z(\mu)$ и $\mathcal{P}(\mu)$ таковы, что $\big(Z_1(\mu), \mathcal{P}_1(\mu)\big)$ есть правая пара, то $\big(\mathcal{P}_2(\mu), Z_2(\mu)\big)$ есть левая пара понижающих подпространств для $D(\lambda, \mu)$.*

3) *Если правая пара $\big(Z_1(\mu), \mathcal{P}_1(\mu)\big)$ отвечает части спектра пучка $D(\lambda, \mu)$, которая определяется блоком $\widehat{D}_{11}(\lambda, \mu)$, то левая пара $\big(\mathcal{P}_2(\mu), Z_2(\mu)\big)$ соответствует спектру блока $\widehat{D}_{22}(\lambda, \mu)$.*

Доказательство теоремы 4.11 и свойств к ней проводится по тому же плану, что и доказательство аналогичных утверждений для пучка $A - \lambda B$ с постоянными матрицами (см., например, [287]).

4.3.2. Понижающие подпространства для сингулярного пучка.

Введем понятие понижающего (reducing) подпространства для сингулярного $m \times n$ пучка

$$D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu).$$

Пусть $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ – подпространства размерностей l и k, соответственно, в пространствах $\mathbb{C}^n[\mu]$ и $\mathbb{C}^m[\mu]$, причем $Y(\mu) = A(\mu)X(\mu)+B(\mu)X(\mu)$. Будем говорить, что $\big(X(\mu), Y(\mu)\big)$ образуют пару понижающих подпространств сингулярного пучка $D(\lambda, \mu)$, если

$$\dim Y(\mu) = \dim X(\mu) - \dim N_c(\mu), \tag{4.3.2}$$

где через $N_c(\mu)$ обозначено правое нуль-пространство из полиномиальных решений пучка $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$. В этом случае (с учетом соответствующих размеров унимодулярных матриц $Z(\mu)$ и $\mathcal{P}(\mu)$ и их блоков $Z_1(\mu)$ и $\mathcal{P}_1(\mu)$) справедлива теорема.

Теорема 4.12. *Для того, чтобы пара $\big(X(\mu), Y(\mu)\big)$ являлась парой правых понижающих подпространств для сингулярного пучка $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы пучок $\widehat{D}_{21}(\lambda, \mu)$ был нулквым $\big(\widehat{A}_{21}(\mu) = \widehat{B}_{21}(\mu) = \mathbb{O}\big)$. При этом имеют место следующие свойства.*

1) *Объединение спектров пучков $\widehat{D}_{11}(\lambda, \mu)$ и $\widehat{D}_{22}(\lambda, \mu)$ совпадают со спектром пучка $D(\lambda, \mu)$.*

2) *Все правые минимальные индексы по λ исходного пучка определяются блоком $\widehat{D}_{11}(\lambda, \mu)$, а все левые минимальные индексы по λ определяются блоком $\widehat{D}_{22}(\lambda, \mu)$.*

3) *Правые и левые пары понижающих подпространств имеют такую же взаимосвязь, как и в регулярном случае.*

Доказательство теоремы 4.12 проводится по тому же плану, что и доказательство аналогичного утверждения для сингулярного пучка с постоянными матрицами (см., например, [163]).

Замечание. В определении понижающего подпространства вместо равенства (4.3.2) можно использовать неравенство

$$\dim Y(\mu) \leqslant \dim X(\mu).$$

При этом свойство 1) принимает следующий вид: объединение спектров пучков $\widehat{D}_{11}(\lambda,\mu)$ и $\widehat{D}_{22}(\lambda,\mu)$ содержат спектр пучка $D(\lambda,\mu)$.

4.3.3. Построение понижающих подпространств.

В предположении, что, по крайней мере, одна из матриц пучка $D(\lambda,\mu)$ имеет нетривиальное нуль-пространство из правых полиномиальных решений, матрицы $Z(\mu)$ и $\mathcal{P}(\mu)$, преобразующие пучок $D(\lambda,\mu)$ в эквивалентный пучок $\widehat{D}(\lambda,\mu)=\mathcal{P}^H(\mu)D(\lambda,\mu)Z(\mu)$ квазитреугольной формы, могут быть вычислены следующим алгоритмом.

(1) Находится унимодулярная матрица $W(\mu)$, осуществляющая ΔW-1 факторизацию матрицы $B(\mu)$. Для определенности предполагаем, что матрица $B(\mu)$ имеет нетривиальное нуль-пространство из правых полиномиальных решений. Имеем

$$B(\mu)W(\mu)=\bigl[\Delta(\mu),\mathbb{O}\bigr],$$

где $\Delta(\mu)$ – матрица полного столбцового ранга, имеющая конечные собственные значения такие же, как матрица $B(\mu)$: $W(\mu)=\bigl[W_1(\mu),W_0(\mu)\bigr]$ – унимодулярная матрица, блок $W_0(\mu)$ которой суть унимодулярный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $B(\mu)$.

(2) Находится унимодулярная матрица $\widehat{W}(\mu)$, осуществляющая ΔW-1 факторизацию матрицы $A_1(\mu)=\bigl[A(\mu)W_0(\mu)\bigr]^H$:

$$A_1(\mu)\widehat{W}(\mu)=\bigl[\widehat{\Delta}(\mu),\mathbb{O}\bigr],\qquad \widehat{W}(\mu)=\bigl[\widehat{W}_1(\mu),\widehat{W}_0(\mu)\bigr],$$

где столбцы матрицы $\widehat{W}_0(\mu)$ образуют унимодулярный базис нуль-пространства из левых полиномиальных решений матрицы $\bigl[A(\mu)W_0(\mu)\bigr]$.

Так построенные унимодулярные матрицы $W(\mu)$ и $\widehat{W}(\mu)$ только порядком следования блоков $Z_1(\mu)$, $Z_2(\mu)$ и $\mathcal{P}_1(\mu)$, $\mathcal{P}_2(\mu)$ отличаются от искомых матриц $Z(\mu)$ и $\mathcal{P}(\mu)$, а именно,

$$Z(\mu)=\bigl[W_0(\mu),W_1(\mu)\bigr]\qquad\text{и}\qquad \mathcal{P}(\mu)=\bigl[\widehat{W}_1(\mu),\widehat{W}_0(\mu)\bigr].$$

Имеем

$$\widehat{W}^H(\mu)D(\lambda,\mu)W(\mu)= \\ =\begin{bmatrix}\widehat{D}_{12}(\lambda,\mu) & \widehat{D}_{11}(\lambda,\mu)\\ \widehat{D}_{22}(\lambda,\mu) & \widehat{D}_{21}(\lambda,\mu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{D}_{12}(\lambda,\mu) & \widehat{D}_{11}(\lambda,\mu)\\ \widehat{D}_{22}(\lambda,\mu) & \mathbb{O}\end{bmatrix}.$$

Подпространства $X(\mu) = W_0(\mu)$ и $Y(\mu) = \widehat{W}_1(\mu)$ образуют пару понижающих подпространств для пучка $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$. Так что объединение соответствующих спектральных характеристик блоков $\widehat{D}_{11}(\lambda, \mu)$ и $\widehat{D}_{22}(\lambda, \mu)$ дает весь спектр, правые и левые минимальные индексы по параметру λ исходного пучка $D(\lambda, \mu)$.

§4.4. Исчерпывание одномерных собственных значений видов (λ, μ_*) и (λ_*, μ)

Ниже приводятся алгоритмы, позволяющие вычислить и исчерпать одномерные собственные значения вида (λ, μ_*) и (λ_*, μ) (где μ_* и λ_* – фиксированные числа, λ и μ – произвольные) из двухпараметрической полиномиальной матрицы.

4.4.1. Первый алгоритм применим для произвольной $m \times n$ двухпараметрической матрицы. Он основан на алгоритме относительной факторизации матричного полинома $F(\lambda, \mu) = F_s(\mu)\lambda^s + \dots + F_0(\mu)$, т.е. на факторизации вида

$$F(\lambda, \mu) = \Delta_1(\mu)\nabla_1(\lambda)\widehat{F}(\lambda, \mu)\nabla_2^T(\lambda)\Delta_2^T(\mu), \qquad (4.4.1)$$

где $\Delta_1(\mu)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$, $\nabla_1(\lambda)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ попарно взаимно простые слева матричные полиномы; $\Delta_2^T(\mu)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$, $\nabla_2^T(\lambda)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ попарно взаимно простые справа матричные полиномы.

Для вычисления разложения (4.4.1) надо выполнить следующие шаги.

(1) Вычислить левый общий наибольший делитель (ОНД) матричных полиномов $F_s(\mu), \dots, F_0(\mu)$, т.е. получить для них равенства вида

$$F_k(\mu) = \Delta_1(\mu)W_{1k}(\mu), \qquad k = s, \dots, 0, \qquad (4.4.2)$$

где $W_{1s}(\mu), \dots, W_{10}(\mu)$ – взаимно простые слева матричные полиномы.

Для этого следует выполнить операции:

(1i) получить ΔW-1 факторизацию матрицы $\mathfrak{A}(\mu) = [F_s(\mu), \dots, F_0(\mu)]$:

$$\mathfrak{A}(\mu)W(\mu) = [\Delta_1(\mu), \mathbb{O}],$$

где $\Delta_1(\mu)$ – матрица полного столбцового ранга размеров $m \times r$ $(r = \operatorname{rank}\mathfrak{A}(\mu))$;

(1ii) обратить унимодулярную матрицу $W(\mu)$, записав ее в блочном виде

$$W^{-1}(\mu) = \begin{bmatrix} W_{1s}(\mu) & \dots & W_{10}(\mu) \\ * & \dots & * \end{bmatrix},$$

где $W_{1k}(\mu)$ – матрицы размеров $r \times n$.

(2) Подставить $F_k(\mu)$ в форме (4.4.2) в $F(\lambda, \mu)$. Имеем

$$F(\lambda, \mu) = \Delta_1(\mu)\big[W_{1s}(\mu)\lambda^s + \dots + W_{10}(\mu)\big] \equiv \Delta_1(\mu)\widetilde{F}(\lambda, \mu), \quad (4.4.3)$$

где $\widetilde{F}(\lambda, \mu) = W_{1s}(\mu)\lambda^s + \ldots + W_{10}(\mu)$, коэффициенты $W_{1s}(\mu), \ldots, W_{10}(\mu)$ взаимно простые слева матричные полиномы.

(3) Записать $\widetilde{F}(\lambda, \mu)$ по степеням μ

$$\widetilde{F}(\lambda, \mu) = \widetilde{F}_t(\lambda)\mu^t + \dots + \widetilde{F}_0(\lambda)$$

и найти $\nabla_1(\lambda)$,т.е. левый общий наибольший делитель матричных полиномов $\widetilde{F}_t(\lambda), \dots, \widetilde{F}_0(\lambda)$, записав их в аналогичном (4.4.2) виде

$$\widetilde{F}_k(\lambda) = \nabla_1(\lambda)\widetilde{W}_{1k}(\lambda), \qquad k = t, \dots, 0. \quad (4.4.4)$$

Здесь $\widetilde{W}_{1t}(\lambda), \dots, \widetilde{W}_{10}(\lambda)$ – взаимно простые слева матричные полиномы. Равенство (4.4.3) с учетом (4.4.4) можно записать в виде

$$F(\lambda, \mu) = \Delta_1(\mu)\nabla_1(\lambda)F_1(\lambda, \mu), \quad (4.4.5)$$

где $F_1(\lambda, \mu) \equiv \widetilde{W}_{1t}(\lambda)\mu^t + \dots + \widetilde{W}_{10}(\lambda)$ – матричный полином, не имеющий своими левыми делителями матричных полиномов от одной переменной.

Для построения разложения (4.4.1) следует шаги $1^0 - 3^0$ применить к матричному полиному $F_1^T(\lambda, \mu)$. В результате будет построено разложение

$$F_1^T(\lambda, \mu) = \Delta_2(\mu)\nabla_2(\lambda)F_2(\lambda, \mu). \quad (4.4.6)$$

С учетом (4.4.6) из (4.4.5) получим

$$F(\lambda, \mu) = \Delta_1(\mu)\nabla_1(\lambda)\widehat{F}(\lambda, \mu)\nabla_2^T(\lambda)\Delta_2^T(\mu),$$

где $\widehat{F}(\lambda, \mu) \equiv F_2^T(\lambda, \mu)$.

Так полученная матрица $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ не будет иметь одномерных собственных значений (λ, μ_*) и (λ_*, μ), порожденных корнями μ_* и λ_* уравнений

$$\begin{aligned} &\det \Delta_1(\mu) = 0, \qquad \det \Delta_2(\mu) = 0, \\ &\det \nabla_1(\lambda) = 0, \qquad \det \nabla_2(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Все прочие одномерные* и нульмерные собственные значения матриц $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ и $F(\lambda, \mu)$ совпадают.

*Среди одномерных собственных значений матрицы $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ могут быть и собственные значения вида (λ_*, μ), (λ, μ_*), которые не порождаются корнями уравнений (4.4.7).

4.4.2. Второй алгоритм исчерпывания одномерных собственных значений вида (λ, μ_*) и (λ_*, μ) применим для регулярных матриц $F(\lambda, \mu)$.

Так для вычисления собственных значений (λ, μ_*) следует выполнить следующие шаги.

(1) Записать $\det F(\lambda, \mu)$ как полином по степеням λ:

$$\det F(\lambda, \mu) = a_m(\mu)\lambda^m + \cdots + a_0(\mu). \qquad (4.4.8)$$

(2) Найти корни μ_{*i} общего наибольшего делителя $\Delta(\mu)$ коэффициентов $a_m(\mu), \ldots, a_0(\mu)$.

Для этого следует произвести следующие операции.

(2i) Получить ΔW-1 факторизацию матрицы $\mathfrak{A}(\mu) \equiv [a_m(\mu), ..., a_0(\mu)]$:

$$\mathfrak{A}(\mu)W(\mu) = \left[\delta(\mu), \mathbb{O}\right]$$

и найти корни $\delta(\mu) = 0$.

(2ii) Обратить унимодулярную матрицу $W(\mu)$

$$W^{-1}(\mu) = \begin{bmatrix} \omega_{1m}(\mu) & \ldots & \omega_{10}(\mu) \\ * & \ldots & * \end{bmatrix},$$

где через $\omega_{1m}(\mu), \ldots, \omega_{10}(\mu)$ обозначены элементы первой строки матрицы $W^{-1}(\mu)$. Тогда корни уравнения

$$\omega_{1m}(\mu)\lambda^m + \cdots + \omega_{10}(\mu) = 0 \qquad (4.4.9)$$

совпадают со всеми одномерными собственными значениями исходной матрицы $F(\lambda, \mu)$, кроме одномерных собственных значений вида (λ, μ_{*i}), λ – произвольное. Для исчерпывания собственных значений вида (λ_{*i}, μ) следует выполнить шаги (1) и (2), взяв в качестве исходного вместо уравнения (4.4.8) уравнение (4.4.9), переписав его по степеням параметра μ.

4.4.3. Третий алгоритм применим для матрицы $F(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга.

Так для исчерпывания (λ_*, μ) из $F(\lambda, \mu)$ в матрице $F(\lambda, \mu)$ делается замена переменных $\lambda = \lambda' + \lambda_*$, которая переводит собственное значение (λ_*, μ) в собственное значение вида $(0, \mu)$. К полученной таким образом матрице $F(\lambda, \mu)$ (обозначение остается прежним) применяется алгоритм из §3.5 исчерпывания нулевого собственного значения из полиномиальной (однопараметрической) матрицы полного ранга, обобщенный на случай двухпараметрических матриц. Согласно алгоритма строится конечная последовательность двухпараметрических матриц $\{F_k(\lambda, \mu)\}$,

$F_0(\lambda,\mu)=F(\lambda,\mu)$

$$F_{k+1}(\lambda,\mu)=F_k(\lambda,\mu)W^k(\mu)\mathrm{diag}\left\{I_{r_{k+1}},\mu^{-1}I_{n-r_{k+1}}\right\},\qquad k=0,\dots,l,$$

где $W^k(\mu)=[W_1^k(\mu),W_2^k(\mu)]$ – унимодулярная матрица, осуществляющая ΔW-1 разложение матрицы $F_k(0,\mu)$, причем $W_2^k(\mu)=\ker F_k(0,\mu)$, r_{k+1} – ранг матрицы $F_k(0,\mu)$ $(r_0=0)$, так что $W_1^k(\mu)$ и $W_2^k(\mu)$ суть матрицы размеров $n\times r_{k+1}$ и $n\times(n-r_{k+1})$.

Обозначим $F_k(\lambda,\mu)=F_{sk}(\mu)\lambda^s+\dots+F_{0k}(\mu)$. Тогда переход от $F_k(\lambda,\mu)$ к $F_{k+1}(\lambda,\mu)$ может быть реализован по формулам

$$F_{q,k+1}(\mu)=\left[F^{(1)}_{q,k+1}(\mu),F^{(0)}_{q,k+1}(\mu)\right],$$

где $F^{(1)}_{q,k+1}(\mu)=F^{(1)}_{q,k}(\mu)W_1^{(k)}(\mu)$, $F^{(0)}_{q,k+1}(\mu)=F^{(0)}_{q+1,k}(\mu)\,W_2^{(k)}(\mu)$ $(q=0,1,\dots,s)$.

Процесс заканчивается на шаге l, когда будет построена матрица $F_l(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга $r_l=n$, не имеющая (λ_*,μ) своим собственным значением.

Для исчерпывания из $F(\lambda,\mu)$ собственных значений (λ,μ_*) следует предварительно в матрице $F_l(\lambda,\mu)$ сделать замену переменных $\mu=\mu'+\mu_*$, переводящую μ_* в нуль; записать полученную матрицу в виде матричного полинома по степеням μ; проделать аналогичные вышеописанные операции исключения собственного значения вида $(\lambda,0)$ из построенного таким образом матричного полинома.

4.4.4. Четвертый алгоритм применим к матрицам полного ранга. Для определенности считаем $F(\lambda,\mu)$ матрицей полного столбцового ранга, из которой следует исчерпать одномерное собственное значение (λ,μ_*), геометрическая кратность которого совпадает с алгебраической кратностью. Алгоритм требует выполнения следующих операций.

(1) Вычисляется однопараметрическая полиномиальная матрица $F(\lambda,\mu_*)$. Очевидно, $F(\lambda,\mu_*)$ имеет, по крайней мере, одно правое полиномиальное решение, так как по условию (λ,μ_*) есть собственное значение $F(\lambda,\mu)$ или, что то же, при любом λ уравнение

$$F(\lambda,\mu_*)U(\lambda)=0$$

имеет решение.

(2) Находится ΔW-1 разложение матрицы $F(\lambda,\mu_*)$

$$F(\lambda,\mu_*)W_*(\lambda)=\left[\Delta_*(\lambda),\mathbb{O}\right].$$

Здесь $W_*(\lambda)$ – унимодулярная матрица, последние $n-\rho_*$ столбцы которой образуют базис из правых полиномиальных решений $F(\lambda,\mu_*)$ ($\rho_* := \operatorname{rank} F(\lambda,\mu_*)$), $\mathbb{O}$ – нулевая $n\times(n-\rho_*)$ матрица.

(3) Вычисляется двухпараметрическая полиномиальная матрица

$$F_1(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)W_*(\lambda),$$

последние $n-\rho_*$ столбцы которой обращаются в нулевые при $\mu=\mu_*$, а следовательно, $(\mu-\mu_*)$ является общим делителем компонент каждого из них.

(4) Вычисляется матрица

$$\begin{aligned} F_2(\lambda,\mu) &= F_1(\lambda,\mu)\operatorname{diag}\left\{I_{\rho_*}, I_{n-\rho_*}(\mu-\mu_*)^{-1}\right\} = \\ &= F(\lambda,\mu)W_*(\lambda)\operatorname{diag}\left\{I_{\rho_*}, (\mu-\mu_*)^{-1}I_{n-\rho_*}\right\}. \end{aligned}$$

Так вычисленная матрица $F_2(\lambda,\mu)$ является искомой двухпараметрической полиномиальной матрицей, спектр которой совпадает со спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$, за исключением исчерпанного собственного значения (λ,μ_*).

Глава 5. Алгоритмы решения спектральных задач для пучка полиномиальных матриц [39]

§5.1. Разделение непрерывного и дискретного спектров, вычисление минимальных индексов

Докажем теоремы о возможности разделения непрерывного и дискретного спектров сингулярного пучка полиномиальных матриц и опишем алгоритм, позволяющий, минуя вычисление спектров, реализовать это разделение.

Теорема 5.1. *Пучок $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ размеров $m \times n$ эквивалентен пучку вида*

$$\begin{bmatrix} D_{22}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ D_{12}(\lambda,\mu) & D_{11}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ D_{32}(\lambda,\mu) & D_{31}(\lambda,\mu) & D_{33}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}. \tag{5.1.1}$$

Здесь $D_{ij}(\lambda, \mu)$ $(i, j = 1, 2)$ – пучки полиномиальных матриц. Пучок $D_{33}(\lambda, \mu)$ имеет полный строчный ранг. Он определяет левые полиномиальные решения, часть дискретного спектра и одномерное собственное значение вида (∞, μ) пучка $D(\lambda, \mu)$. Пучок $D_{22}(\lambda, \mu)$ имеет полный столбцовый ранг. Он определяет левые полиномиальные решения, часть дискретного спектра и одномерное собственное значение вида (∞, μ) пучка $D(\lambda, \mu)$. Пучок $D_{11}(\lambda, \mu)$ является регулярным. Он имеет только непрерывный спектр, совпадающий (за исключением указанных собственных значений $(0, \mu)$, (∞, μ)) с непрерывным спектром исходного пучка $D(\lambda, \mu)$. Объединение дискретных спектров пучков $D_{22}(\lambda, \mu)$ и $D_{33}(\lambda, \mu)$ совпадают с дискретным спектром исходного пучка.

Доказательство теоремы проведем конструктивно, описывая алгоритм построения пучка вида (5.1.1).

Алгоритм состоит из конечного числа шагов. Сначала выделяется пучок $D_{33}(\lambda, \mu)$. Типичный (первый) шаг состоит в выполнении следующих операций.

(1) Полагая $A_{11}(\mu) = A(\mu)$, $B_{11}(\mu) = B(\mu)$, находим ΔW-1 разложение ведущей матрицы $A_{11}(\mu)$. Если исходный пучок имеет правые полиномиальные решения или одномерное собственное значение $(0, \mu)$, то $A_{11}(\mu)$ имеет нетривиальное правое нуль-пространство. В противном случае пучок (5.1.1) не содержит пучка $D_{33}(\lambda, \mu)$ и следует перейти к выделению блока $D_{22}(\lambda, \mu)$.

Пусть $A_{11}(\mu)$ имеет правые полиномиальные решения и пусть

$$A_{11}(\mu) W_a(\mu) = \left[\Delta_a(\mu), \mathbb{O}\right]$$

есть ΔW-1 разложение $A_{11}(\mu)$.

(2) Вычисляем пучок

$$\left[A_{11}(\mu) - \lambda B_{11}(\mu)\right] W_a(\mu) = \left[A_2(\mu) - \lambda B_2(\mu); \mathbb{O} - \lambda B_1(\mu)\right],$$

где $A_2(\mu) \equiv \Delta_a(\mu)$ имеет размеры $m \times (n-\rho_1)$ и является матрицей полного столбцового ранга ($(n-\rho_1)$ – ранг $A_{11}(\mu)$); $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times \rho_1$ матрица. Пучки $A_2(\mu) - \lambda B_2(\mu)$ и $-\lambda B_1(\mu)$ имеют размеры $m \times (n-\rho_1)$ и $m \times \rho_1$, соответственно.

(3) Находим ΔW-1 разложение матрицы $B_1^T(\mu)$:

$$B_1^T(\mu) W_b(\mu) = \left[\widehat{B}_{11}^T(\mu), \mathbb{O}\right],$$

где $\widehat{B}_{11}(\mu)$ – матрица размеров $r_1 \times \rho_1$, $r_1 = \operatorname{rank} \widehat{B}_{11}^T(\mu) \leqslant \rho_1$, $\mathbb{O}$ – нулевая $(m - r_1) \times \rho_1$ матрица.

(4) Вычисляем пучок

$$W_b^T(\mu)\left[A_{11}(\mu) - \lambda B_{11}(\mu)\right] W_a(\mu) =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} A_{21}(\mu) - \lambda B_{21}(\mu) \\ A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu) \end{matrix}}_{n-\rho_1} & \underbrace{\begin{matrix} -\lambda \widehat{B}_{11}(\mu) \\ \mathbb{O} \end{matrix}}_{\rho_1} \end{array}\right] \begin{matrix} \}r_1 \\ \}m - r_1 \end{matrix}.$$

После перестановки блочных строк имеем

$$\theta W_b^T(\mu)\left[A_{11}(\mu) - \lambda B_{11}(\mu)\right] W_a(\mu) = \begin{bmatrix} A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu) & \mathbb{O} \\ A_{21}(\mu) - \lambda B_{21}(\mu) & -\lambda \widehat{B}_{11}(\mu) \end{bmatrix},$$

где θ – матрица перестановок.

Если ведущая матрица $A_{22}(\mu)$ имеет неполный столбцовый ранг, аналогичный процесс выделения блоков из пучка $A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu)$ продолжается и заканчивается на шаге k, когда ведущая матрица $A_{k+1,k+1}(\mu)$ имеет полный столбцовый ранг.

В результате будет построен пучок

$$P_1(\mu) D(\lambda, \mu) Q_1(\mu) = \begin{bmatrix} A_{k+1,k+1}(\mu) - \lambda B_{k+1,k+1}(\mu) & \mathbb{O} \\ A_{k+1,k}(\mu) - \lambda B_{k+1,k}(\mu) & D_{33}(\lambda, \mu) \end{bmatrix}.$$

По построению $A_{k+1,k+1}(\mu) - \lambda B_{k+1,k+1}(\mu)$ имеет полный столбцовый ранг; пучок $D_{33}(\lambda, \mu)$ – сингулярный полного строчного ранга, не имеющий регулярного блока, за исключением, возможно, одномерного собственного значения $(0, \mu)$.

Если пучок $A_{k+1,k+1}(\mu) - \lambda B_{k+1,k+1}(\mu)$ размеров $m_1 \times n_1$ имеет неполный строчный ранг, т.е. имеет левые полиномиальные решения, то переходим к выделению из него блока $D_{22}(\lambda,\mu)$. Типичный шаг состоит в выполнении следующих операций.

(1) Полагаем $\widetilde{A}_{11}(\mu) := A_{k+1,k+1}(\mu)$, $\widetilde{B}_{11}(\mu) := B_{k+1,k+1}(\mu)$ и находим ΔW-1 разложение ведущей матрицы $\widetilde{B}_{11}^T(\mu)$. Имеем

$$\widetilde{B}_{11}^T(\mu)\widetilde{W}_b(\mu) = [\underbrace{\widetilde{\Delta}_b(\mu)}_{m_1-h_1}, \underbrace{\mathbb{O}}_{h_1}], \qquad m_1 - h_1 = \operatorname{rank}\widetilde{B}_{11}^T(\mu).$$

(2) Вычисляем пучок

$$\widetilde{W}_b^T(\mu)[\widetilde{A}_{11}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{11}(\mu)] = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_2(\mu) - \lambda\widetilde{B}_2(\mu) \\ \widetilde{A}_1(\mu) - \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}m_1 - h_1 \\ \}h_1 \end{matrix}.$$

(3) Находим ΔW-1 разложение матрицы $\widetilde{A}_1(\mu)$:

$$\widetilde{A}_1(\mu)\widetilde{W}_a(\mu) = [\widetilde{A}_{11}(\mu), \mathbb{O}]\}h_1,$$

$q_1 = \operatorname{rank}\widetilde{A}_1(\mu) \leqslant h_1$; $\breve{A}_{11}(\mu)$ – матрица размеров $h_1 \times q_1$.

(4) Вычисляем пучок

$$\widetilde{W}_b^T(\mu)[\widetilde{A}_{11}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{11}(\mu)]\widetilde{W}_a(\mu) =$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{21}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{21}(\mu) & A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu) \\ \underbrace{\widetilde{A}_{11}(\mu) - \mathbb{O}}_{q_1} & \underbrace{\mathbb{O}}_{n_1 - q_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}m_1 - h_1 \\ \}h_1 \end{matrix}.$$

После перестановки блочных столбцов имеем

$$\widetilde{W}_b^T(\mu)[\widetilde{A}_{11}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{11}(\mu)]\widetilde{W}_a(\mu)\widetilde{\theta} =$$
$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{22}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{22}(\mu) & \widetilde{A}_{21}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{21}(\mu) \\ \mathbb{O} & \breve{A}_{11}(\mu) \end{bmatrix}$$

($\widetilde{\theta}$-матрица перестановок).

Если ведущая матрица $\widetilde{B}_{22}(\mu)$ имеет неполный строчный ранг, аналогичный процесс выделения из пучка $\widetilde{A}_{22}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{22}(\mu)$ блоков, содержащих левые полиномиальные решения и одномерное собственное значение (∞,μ), продолжается и заканчивается на шаге l, когда матрица $\widetilde{B}_{l+1,l+1}(\mu)$ будет полного строчного ранга, а следовательно, неособенная.

В результате выделения из $D(\lambda,\mu)$ блоков, содержащих правые и левые полиномиальные решения, будет построен эквивалентный $D(\lambda,\mu)$ пучок вида

$$\begin{bmatrix} D_{11}(\lambda,\mu) & D_{12}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_{22}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ D_{31}(\lambda,\mu) & D_{32}(\lambda,\mu) & D_{33}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}.$$

После перестановки первой и второй блочных строк и столбцов, получим

$$P(\mu)D(\lambda,\mu)Q(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} D_{22}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ D_{12}(\lambda,\mu) & D_{11}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ D_{32}(\lambda,\mu) & D_{31}(\lambda,\mu) & D_{33}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}.$$

Здесь через $P(\mu)$ и $Q(\mu)$ обозначены результирующие унимодулярные матрицы, осуществляющие переход от исходного пучка $D(\lambda,\mu)$ к пучку вида (5.1.1). По построению пучок $D_{11}(\lambda,\mu) = \widetilde{A}_{l+1,l+1}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{l+1,l+1}(\mu)$ регулярный и имеет спектр, совпадающий с конечным непрерывным спектром пучка $D(\lambda,\mu)$ за исключением собственных значений видов $(0,\mu)$ и (∞,μ). Пучок

$$D_{22}(\lambda,\mu) = \tag{5.1.2}$$
$$\begin{bmatrix} \breve{A}_{ll}(\mu) & \widetilde{A}_{l,l-1}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{l,l-1}(\mu) & \dots & \widetilde{A}_{l,1}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{l,1}(\mu) \\ & \breve{A}_{l-1,l-1}(\mu) & \dots & \widetilde{A}_{l-1,1}(\mu) - \lambda\widetilde{B}_{l-1,1}(\mu) \\ & \mathbb{O} & \ddots & \vdots \\ & & & \breve{A}_{11}(\mu) \end{bmatrix}$$

является пучком полного столбцового ранга, не содержащим непрерывного спектра, за исключением, возможно, одномерного собственного значения (∞,μ). Дискретный спектр пучка $D_{22}(\lambda,\mu)$ входит в дискретный спектр исходного пучка $D(\lambda,\mu)$. Пучок

$$D_{33}(\lambda,\mu) = \tag{5.1.3}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda\widehat{B}_{kk}(\mu) & & & \\ A_{k-1,k}(\mu)-\lambda B_{k-1,k}(\mu) & -\lambda\widehat{B}_{k-1,k-1}(\mu) & & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{1,k}(\mu)-\lambda B_{1,k}(\mu) & A_{1,k-1}(\mu)-\lambda B_{1,k-1}(\mu) & \dots & -\lambda\widehat{B}_{11}(\mu) \end{pmatrix}$$

является пучком полного строчного ранга, не содержащим непрерывного спектра, за исключением, возможно, одномерного собственного значения $(0,\mu)$. Дискретный спектр пучка $D_{33}(\lambda,\mu)$ принадлежит дискретному спектру исходного пучка.

Следствие 5.2. *Объединение дискретных спектров пучков $D_{22}(\lambda,\mu)$ и $D_{33}(\lambda,\mu)$ образует конечный дискретный спектр исходного пучка $D(\lambda,\mu)$.*

Следствие 5.3. *Алгоритм из теоремы 5.1 дает возможность вычислить также правые и левые по λ минимальные индексы пучка $D(\lambda,\mu)$, а также спектральные индексы одномерных собственных значений $(0,\mu)$ и (∞,μ).*

1) Из размеров строк и столбцов блочных матриц $\widehat{B}_{ii}(\mu)$ пучка $D_{33}(\lambda,\mu)$ в форме (5.1.3) можно построить две последовательности чисел $\{\rho_i\}$ и $\{r_i\}$ (где ρ_i – число столбцов, а r_i – число строк матрицы $\widehat{B}_{ii}(\mu)$), удовлетворяющих неравенствам

$$\rho_1 \geqslant r_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_k \geqslant r_k \geqslant \rho_{k+1} = 0.$$

Величина $\varepsilon_i = \rho_i - r_i$, $i = 1,\ldots,k$ определяет число равных i правых минимальных индексов пучка $A(\mu)-\lambda B(\mu)$. Величина $\theta_{0,i} = r_i - \rho_{i+1}$ определяет число равных i структурных индексов одномерного собственного значения $(0,\mu)$.

2) Из размеров строк и столбцов блочных матриц $\breve{A}_{ii}(\mu)$ пучка $D_{22}(\lambda,\mu)$ в форме (5.1.2) можно построить две последовательности чисел $\{h_i\}$ и $\{q_i\}$ (где h_i – число строк, а q_i – число столбцов матрицы $\breve{A}_{ii}(\mu)$, удовлетворяющих неравенствам

$$h_1 \geqslant q_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_l \geqslant q_l \geqslant h_{l+1} = 0.$$

Величина $\delta_i = h_i - q_i$, $i = 1,\ldots,l$ определяет число равных i левых минимальных индексов пучка $A(\mu)-\lambda B(\mu)$. Величина $\delta_i^{\infty} = q_i - h_{i+1}$, $i = 1,\ldots,l$ определяет число равных i структурных индексов одномерного собственного значения (∞,μ).

Справедливость теоремы 5.1 и следствий из нее следует из способа построения пучка (5.1.1), если принять во внимание унимодулярность преобразующих матриц, свойства понижающих подпространств, построенных на базе ΔW-1 разложения некоторых вспомогательных матриц.

Перейдем к рассмотрению алгоритма выделения из пучков $D_{33}(\lambda,\mu)$ и $D_{22}(\lambda,\mu)$ одномерных решений видов $(0,\mu)$ и (∞,μ). Для этого установим справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.4. *Пучок вида* (5.1.1) *эквивалентен пучку вида*

$$\left[\begin{array}{ccccc} D_{11}(\lambda,\mu) & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots & & \mathbb{O} \\ & \vdots & \begin{matrix} D_{11}^{(2)}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ * & D_2(\lambda,\mu) \end{matrix} & \vdots & \\ * & & \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ & & * & \vdots & \begin{matrix} D_{11}^{(3)}(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ * & D_3(\lambda,\mu) \end{matrix} \end{array}\right].$$

Здесь $D_{11}(\lambda,\mu)$, $D_{11}^{(2)}(\lambda,\mu)$ *и* $D_{11}^{(3)}(\lambda,\mu)$ *суть регулярные пучки, объединение спектров которых дает весь конечный непрерывный спектр исходного пучка. Пучки* $D_2(\lambda,\mu)$ *и* $D_3(\lambda,\mu)$ *суть пучки соответственно полного столбцового и строчного рангов, не имеющие непрерывного спектра. Объединение дискретных спектров пучков* $D_2(\lambda,\mu)$ *и* $D_3(\lambda,\mu)$ *дает весь конечный дискретный спектр исходного пучка. Минимальные индексы левых и правых полиномиальных решений соответственно пучков* $D_2(\lambda,\mu)$ *и* $D_3(\lambda,\mu)$ *совпадают с минимальными индексами левых и правых полиномиальных решений исходного пучка.*

Здесь через $*$ обозначены не интересующие нас полиномиальные пучки, через $\mathbb{O}$ обозначены нулевые блоки результирующего пучка.

Для доказательства теоремы применим алгоритм приведения исходного пучка к пучку вида (5.1.1) последовательно сначала к пучку $D_{33}(\lambda,\mu)$, затем к пучку $D_{22}(\lambda,\mu)$.

Так применение первой части алгоритма к пучку $D_{33}(\lambda,\mu)$ с заменой ведущей матрицы $A_{11}(\mu)$ на матрицу $B_{11}(\mu)$ приведет к выделению регулярного пучка (обозначим его $D_{11}^{(3)}(\lambda,\mu)$), имеющего только одномерное собственное значение $(0,\mu)$, и пучка $D_3(\lambda,\mu)$ полного строчного ранга, имеющего только правые полиномиальные решения с такими же минимальными индексами, что и у полиномиальных решений пучка $D_{33}(\lambda,\mu)$, а следовательно, и исходного пучка. Применение второй части алгоритма к пучку $D_{22}(\lambda,\mu)$ с заменой ведущей матрицы $\widetilde{B}_{11}^T(\mu)$ на $\widetilde{A}_{11}^T(\mu)$ приведет к выделению регулярного блока (обозначим его $\widetilde{D}_{11}^{(2)}(\lambda,\mu)$), имеющего только одномерные собственные значения (∞,μ) и пучка полного столбцового ранга $D_2(\lambda,\mu)$, имеющего только левые полиномиальные решения с минимальными индексами, совпадающими с соответствующими минимальными индексами полиномиальных решений исходного пучка.

Объединение спектров пучков $D_{11}(\lambda,\mu)$, $D_{11}^{(3)}(\lambda,\mu)$ и $D_{11}^{(2)}(\lambda,\mu)$ даст непрерывный спектр исходного пучка.

§5.2. Алгоритм вычисления дискретного спектра

5.2.1 Алгоритм вычисления дискретного спектра пучка полного столбцового ранга, не содержащего непрерывного спектра.

Пусть $D(\lambda,\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ – пучок $m \times n$ ранга n $(m > n)$, не содержащий непрерывного спектра; $D_1(\lambda,\mu)$ – пучок, согласованный с $D(\lambda,\mu)$. Напомним, что по построению

$$D_1(\lambda,\mu) = \begin{cases} W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu), & \mu \neq \mu_*, \\ Q_- - Q_+, & \mu = \mu_*. \end{cases}$$

Здесь через μ_* обозначено любое фиксированное собственное значение полиномиальной матрицы $\mathfrak{A}(\mu) = [A(\mu), -B(\mu)]$; $W_-(\mu)$ и $W_+(\mu)$ – полиномиальные матрицы, построенные соответственно из n последних и n первых строк матрицы $W_0(\mu)$, столбцы которой образуют минимальный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$; Q_- и Q_+ – постоянные матрицы, построенные соответственно из n последних и n первых строк матрицы Q_*, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства постоянной матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*)$.

Следующие утверждения лежат в основе предлагаемого ниже алгоритма.

1^0. *Пучок $D_1(\lambda,\mu)$ имеет полный столбцовый ранг и не содержит непрерывного спектра.*

2^0. *Любое нульмерное собственное значение (λ_*,μ_*) пучка $D_1(\lambda,\mu)$ является нульмерным собственным значением пучка $D(\lambda,\mu)$, а соответствующие ему собственные векторы y_* и x_* соответственно пучков $D_1(\lambda,\mu)$ и $D(\lambda,\mu)$ связаны соотношением*

$$x_* = Q_+ y_*, \qquad y_* = Q_*^T \left[x_*, \lambda_* x_*\right]^B. \tag{5.2.1}$$

3^0. *Пара чисел (λ_*,μ_*) является нульмерным собственным значением пучка $D(\lambda,\mu)$, если число μ_* есть собственное значение полиномиальной матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, число λ_* есть собственное значение пучка $D_1(\lambda,\mu_*)$.*

Справедливость утверждений 1^0 и 2^0 непосредственно следует из свойств спектральных характеристик согласованных пучков (см. §4.2, свойства 1^0 и 3^0).

Приведем обоснование утверждения 3^0. Обозначим через y_* – вектор,соответствующий собственному значению λ_* пучка $D_1(\lambda,\mu_*)$. Имеем

$$D_1(\lambda_*,\mu_*)y_* \equiv \big(Q_- - \lambda_* Q_+\big)y_* = 0. \tag{5.2.2}$$

Учитывая, что пучок $D_1(\lambda,\mu_*)$ согласован с пучком $D(\lambda,\mu_*)$, заключаем, что $D_1(\lambda,\mu)$ есть также пучок полного столбцового ранга, не содержащий непрерывного спектра. Тогда из равенства (5.2.2) следует, что y_* есть собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_* пучка $D_1(\lambda,\mu_*)$; (λ_*,μ_*) – нульмерное собственное значение.

Алгоритм вычисления дискретного спектра пучка $D(\lambda,\mu)$ состоит в построении конечной последовательности пучков полиномиальных матриц уменьшающихся размеров: каждый последующий пучок является согласованным с предыдущим. Типичный (первый) шаг перехода от пучка $D_0(\lambda,\mu) = A_0(\mu) - \lambda B_0(\mu)$ размеров $m_0 \times n_0$ ($A_0(\mu) \equiv A(\mu)$, $B_0(\mu) \equiv B(\mu)$, $m_0 = m$, $n_0 = n$, $m_0 > n_0$) к пучку $D_1(\lambda,\mu) = A_1(\mu) - \lambda B_1(\mu)$ размеров $m_1 \times n_1$, согласованному с $D_0(\lambda,\mu)$, требует выполнения следующих операций.

(1) Формируется матрица

$$\mathfrak{A}_0(\mu) = \big[A_0(\mu), -B_0(\mu)\big] \tag{5.2.3}$$

и находится ее ΔW-1 разложение

$$\mathfrak{A}_0(\mu)W(\mu) = \big[\Delta_0(\mu), \mathbb{O}\big], \tag{5.2.4}$$

где $W(\mu) = [W_1(\mu), W_2(\mu)]$ – унимодулярная матрица с блоками $W_1(\mu)$, $W_2(\mu)$ соответственно размеров $2n_0 \times r_0$ и $2n_0 \times (2n_0 - r_0)$, r_0 – ранг $\mathfrak{A}_0(\mu)$, $\Delta_0(\mu)$ – матрица $m_0 \times r_0$ полного ранга, все собственные значения которой дают конечный спектр матрицы $\mathfrak{A}_0(\mu)$.

(2) Находится минимальный базис $W_0(\mu)$ правого нуль-пространства из полиномиальных решений $\mathfrak{A}_0(\mu)$. Для этого осуществляется ΔW-1 разложение матрицы $W_2(\mu)$

$$W_2(\mu)\widetilde{W}(\mu) = W_0(\mu), \tag{5.2.5}$$

где $\widetilde{W}(\mu)$ – унимодулярная матрица, реализующая разложение (5.2.5), столбцы $W_0(\mu)$ дают искомый минимальный базис.

(3) Вычисляюся собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_{\rho_0}$ матрицы $\mathfrak{A}_0(\mu)$ и для каждого фиксированного $\mu_* = \mu_i$ находится $Q_i = \ker \mathfrak{A}(\mu_i)$ и пучок $D_1(\lambda,\mu_i) = Q_{i-} - \lambda Q_{i+}$, согласованный с $D(\lambda,\mu)$ при $\mu = \mu_i$.

(4) Вычисляются собственные значения $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i,t_i}$ пучка $D_1(\lambda, \mu_i)$.

Пары (λ_{ij}, μ_i), $i = 1, \ldots, t_i$ так вычисленных чисел для каждого μ_i, $i = 1, \ldots, \rho_0$ принадлежат дискретному спектру пучка $D(\lambda, \mu)$.

(5) Формируется пучок $D_1(\lambda, \mu) = W_-(\mu) - \lambda W_+(\mu)$ размеров $m_1 \times n_1$, где $W_-(\mu)$ и $W_+(\mu)$ – матрицы, построенные из последних n_0 и первых n_0 строк матрицы $W_0(\mu)$.

По построению и из свойств согласованных пучков следует, справедливость неравенств

$$m_1 = n_0 < m_0, \quad n_1 = 2n_0 - r_0 \leqslant n_0 \quad (r_0 \geqslant n_0), \quad q_0 = m_0 - n_0,$$

где q_0 – число левых полиномиальных решений пучка $D_0(\lambda, \mu)$.

В результате будет построена последовательность пучков $\{D_k(\lambda, \mu)\}$, $k = 0, \ldots, l$ размеров $m_k \times n_k$, причем выполняются неравенства

$$m_0 > n_0 = m_1 > n_1 = m_2 > \ldots > n_l = m_{l+1} = 0.$$

Процесс заканчивается на шаге l, когда

$$n_l = m_{l+1} = 0.$$

Объединение вычисленных дискретных спектров пучков строящейся последовательности даст искомый (конечный по μ) спектр пучка $D(\lambda, \mu)$.

Для вычисления нульмерных собственных значений вида (λ_*, ∞) и (∞, ∞) следует на каждом шаге процесса вычислять не только конечные собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$, но и бесконечное собственное значение, если последнее есть у $\mathfrak{A}_k(\mu)$. Для этого следует в полиномиальной матрице $\mathfrak{A}_k(\mu)$ сделать замену переменных $\mu = 1/\mu'$, т.е. от $\mathfrak{A}_k(\mu)$ перейти к матрице $\mu^{-t}\overline{\mathfrak{A}}(\mu)$, где $\overline{\mathfrak{A}}(\mu)$ имеет своими собственными значениями μ_*^{-1}, так что собственное значение $\mu_* = \infty$ матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$ перейдет в собственное значение $\mu_* = 0$ для матрицы $\overline{\mathfrak{A}}_k(\mu)$. Построить пучок $Q_- - \lambda Q_+$. Здесь Q_- и Q_+ – матрицы, построенные, как и выше, из n последних и n первых строк матрицы Q_0, столбцы которой суть ортонормированный базис матрицы $\overline{\mathfrak{A}}_k(0)$.

5.2.2. Алгоритм вычисления дискретного спектра произвольного пучка полиномиальных матриц.

Алгоритм состоит из трех стадий.

На первой стадии, используя алгоритм разделения непрерывногои дискретного спектров пучка $D(\lambda, \mu)$ (см. §5.1), находим пучки $D_{22}(\lambda, \mu)$ и $D_{33}(\lambda, \mu)$ полного столбцового и строчного рангов, соответственно.

На второй стадии одномерные собственные значения вида $(0, \mu)$ и (∞, μ) удаляем из пучков $D_{33}(\lambda, \mu)$ и $D_{22}(\lambda, \mu)$, соответственно. Результирующие пучки обозначим $D_3(\lambda, \mu)$ и $D_2(\lambda, \mu)$.

На третьей стадии, используя алгоритм вычисления нульмерных собственных значений пучка полного столбцового ранга, не содержащего непрерывного спектра, находим дискретные спектры пучков $D_2(\lambda, \mu)$ и $D_3^T(\lambda, \mu)$, которые в совокупности дадут весь дискретный спектр исходного пучка $D(\lambda, \mu)$.

§5.3. Вычисление собственных векторов и жордановых цепочек

Пусть (λ_*, μ_*) – нульмерное собственное значение $m \times n$ пучка $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ ранга n, не имеющего непрерывного спектра.

Задача состоит в вычислении векторов

$$x_1^{(i)}, \dots, x_{t_i}^{(i)}, \qquad i = 1, \dots, q_*, \tag{5.3.1}$$

удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} &\left[A(\mu_*) - \lambda_* B(\mu_*)\right] x_1^{(i)} = 0, \\ &\left[A(\mu_*) - \lambda_* B(\mu_*)\right] x_k^{(i)} = B(\mu_*) x_{k-1}^{(i)}, \quad k = 2, \dots, t_i, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

причем система

$$\left[A(\mu_*) - \lambda_* B(\mu_*)\right] \xi = B(\mu_*) x_{t_i}^{(i)}$$

несовместна. Здесь $x_1^{(i)}$ – собственный вектор, отвечающий нульмерному собственному значению пучка $D(\lambda, \mu)$; q_* – число линейно независимых жордановых цепочек, соответствующих нульмерному собственному значению (λ_*, μ_*). Эту задачу можно рассматривать как задачу вычисления собственных векторов и жордановых цепочек, соответствующих собственному значению $\lambda = \lambda_*$ пучка

$$D(\lambda, \mu_*) = A(\mu_*) - \lambda B(\mu_*) \tag{5.3.3}$$

постоянных матриц полного столбцового ранга и решать известными для этого случая алгоритмами главы 2. Ниже приводится один из таких алгоритмов. Не умаляя общности считаем

$\lambda_* = 0$. В противном случае в (5.3.3) делаем замену переменного $\lambda = \lambda' + \lambda_*$. Согласно алгоритму строится конечная последовательность $\{D_k(\lambda)\}$ пучков $D_k(\lambda) = A_k - \lambda B_k$, $k = 1, \dots, l$, $D_0(\lambda) = D(\lambda, \mu_*)$ по предписанию:

$$D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda) T^k \{I_{r_{k+1}}, \lambda^{-1} I_{h_{k+1}}\}, \qquad k = 0, 1, \dots, l-1. \quad (5.3.4)$$

Здесь T^k – ортогональная матрица, блочное разбиение $T^k = [T_1^k\, T_2^k]$ которой дает ранговое сечение пространства на образ матрицы $D_k^T(0)$ и нуль-пространство матрицы $D_k(0)$, так что T_1^k и T_2^k имеют соответственно размеры $n \times r_{k+1}$ и $n \times h_{k+1}$, $r_{k+1} = \operatorname{rank} D_k(0)$, $h_{k+1} = n - r_{k+1}$; I_p – единичная $p \times p$ матрица. Построение T^k можно осуществить, применив к $D_k(0) = A_k$ алгоритм ΔW-0 разложения. Переход от $D_k(\lambda)$ и $D_{k+1}(\lambda)$ осуществляется по формулам:

$$A_{k+1} = [A_{k+1,1}, B_{k+1,2}],$$
$$B_{k+1} = [B_{k+1,1}, \mathbb{O}],$$

где $A_{k+1,1} = A_k T_1^k$, $B_{k+1,1} = B_k T_1^k$, $B_{k+1,2} = B_k T_2^k$ – матрицы, составленные из первых r_{k+1} столбцов и последних h_{k+1} столбцов A_{k+1} и B_{k+1}.

Параллельно построению $\{D_k(\lambda)\}$ вычисляем матрицы

$$\overline{M}^{k+1} = M^k T^k = [M^k T_1^k, M^k T_2^k] \equiv [\overline{M}_1^{k+1}, \overline{M}_2^{k+1}],$$

$$M^{k+1} = \begin{bmatrix} & \vdots & \mathbb{O}_2^{k+1} \\ \overline{M}_1^{k+1} & \vdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \vdots & \overline{M}_2^{k+1} \\ \mathbb{O}_1^{k+1} & \vdots & \end{bmatrix} \equiv [M_1^{k+1}, M_2^{k+1}], \qquad k = 0, \dots, l$$

$$M^0 = I.$$

$$T^k = \begin{bmatrix} T_{11}^k & \vdots & T_{12}^k \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \underbrace{T_{21}^k}_{r_{k+1}} & \vdots & T_{22}^k \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r_k \\ \\ \\ \end{matrix}, \qquad \begin{aligned} \overline{M}_1^{k+1} &= [P_0^{k+1}, \dots, P_k^{k+1}]^B, \\ \overline{M}_2^{k+1} &= [Z_{k+1}^{k+1}, \dots, Z_1^{k+1}]^B. \end{aligned}$$

Алгоритм построения пучков (5.3.4) продолжается до тех пор, пока при некотором l получим матрицу A_l полного столбцового ранга. В результате будет получена следующая информация.

1) Последовательность чисел $\{r_k\}$, $\quad k = 1, \dots, l+1$, где $r_{k+1} - r_k \equiv \delta_{k0}$ есть число элементарных делителей степени k пучка (5.3.3), соответствующих собственному значению $\lambda_* = 0$;

2) Пучок

$$D_l(\lambda) \equiv D_l(\lambda, \mu_*) = D(\lambda, \mu_*) \prod_{k=1}^{l} T^k \operatorname{diag}\left\{I_{r_{k+1}}, \lambda^{-1} I_{h_{k+1}}\right\},$$

не имеющий нулевого собственного значения; отличные от конечного λ_* собственные значения $D_l(\lambda, \mu_*) = A_l(\mu_*) - \lambda B_l(\mu_*)$ в паре с μ_* совпадают с конечными нульмерными собственными значениями вида (λ_*, μ_*) исходного пучка;

3) Жордановы цепочки, порожденные собственным значением $(0, \mu_*)$. Для этого следует выполнить операции.

(1) Найти матрицу Y_k, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства матрицы $(T_{22}^k)^T$.

(2) образовать искомые цепочки векторов

$$\begin{aligned} x_i^k &= Z_i^k Y_k, \qquad i = 1, \dots, k; \qquad k = 1, \dots, l-2; \\ x_i^{l+1} &= Z_i^{l+1}, \qquad i = 1, \dots, l-1. \end{aligned}$$

Замечание.. Для построения собственных векторов и жордановых цепочек, соответствующих нульмерному собственному значению вида (∞, μ_*) пучка $D(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга, не содержащего непрерывного спектра, описанный выше алгоритм следует применить к пучку $\overline{D}(\lambda, \mu) = B(\mu) - \lambda' A(\mu)$, полученному из $D(\lambda, \mu)$ заменой переменных $\lambda = 1/\lambda'$. При этой замене нульмерное собственное значение (∞, μ_*) пучка $D(\lambda, \mu)$ перейдет в нульмерное собственное значение $(0, \mu_*)$ пучка $\overline{D}(\lambda, \mu)$.

§5.4. Раскрытие функционального определителя

При решении спектральной задачи для регулярного пучка $D(\lambda, \mu)$ порядка n иногда полезно осуществить раскрытие функционального определителя $\det D(\lambda, \mu)$, представив его в виде полинома по λ

$$\det D(\lambda, \mu) = a_n(\mu)\lambda^n + a_{n-1}(\mu)\lambda^{n-1} + \dots + a_0(\mu),$$

где $a_k(\mu)$, $\quad k = 0, 1, \dots, n$ суть скалярные полиномы от μ. Для раскрытия $\det D(\lambda, \mu)$, например, можно применить интерполяционный метод, подробное описание которого с рекомендациями по выбору узлов можно найти в статье [73]. Здесь мы приводим алгоритм раскрытия функционального определителя, обобщающий метод Леверье–Фаддеева для вычисления характеристического полинома постоянной матрицы.

Алгоритм состоит в построении двух конечных последовательностей $\{A_k(\lambda,\mu)\}$ и $\{B_k(\lambda,\mu)\}$ двухпараметрических полиномиальных матриц и последовательности $\{q_k(\lambda,\mu)\}$ скалярных полиномов от двух переменных. Указанные последовательности строятся по предписанию:

$$A_k(\lambda,\mu) = D(\lambda,\mu)B_{k-1}(\lambda,\mu); \qquad B_k(\lambda,\mu) = A_k(\lambda,\mu) - q_k(\lambda,\mu)I;$$
$$q_k(\lambda,\mu) = \frac{1}{k}\operatorname{tr} A_k(\lambda,\mu); \qquad B_0(\lambda,\mu) = I; \qquad k = 1,\dots,n.$$

В результате n шагов будет построен искомый полином

$$q_n(\lambda,\mu) = \det D(\lambda,\mu) = a_n(\mu)\lambda^n + a_{n-1}(\mu)\lambda^{n-1} + \dots + a_0(\mu).$$

Замечание. Описанный алгоритм раскрытия функционального определителя применим к любой регулярной многопараметрической матрице с полиномиальным вхождением параметров. Так в случае двухпараметрической $n\times n$ матрицы $F(\lambda,\mu)$, имеющей по одному из параметров (обозначим его λ) степень s, алгоритм состоит в построении последовательностей $\{A_k(\lambda,\mu)\}$, $\{B_k(\lambda,\mu)\}$ и $\{q_k(\lambda,\mu)\}$:

$$A_k(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)B_{k-1}(\lambda,\mu); \qquad B_k(\lambda,\mu) = A_k(\lambda,\mu) - q_k(\lambda,\mu)I;$$
$$q_k(\lambda,\mu) = \frac{1}{k}\operatorname{tr} A_k(\lambda,\mu); \qquad B_0(\lambda,\mu) = I; \qquad k = 1,\dots,n.$$

В результате n шагов будет построен полином по λ:

$$q_n(\lambda,\mu) = \det F(\lambda,\mu) = a_m(\mu)\lambda^m + a_{m-1}(\mu)\lambda^{m-1} + \dots + a_0(\mu), \ m \leqslant ns,$$

корни которого составляют конечный непрерывный спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$.

Глава 6. Решение спектральных задач для двухпараметрической полиномиальной матрицы

Пусть

$$F(\lambda, \mu) = C_s(\mu)\lambda^s + \cdots + C_0(\mu)$$

есть $m \times n$ двухпараметрическая полиномиальная матрица целых степеней $s \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$ соответственно по λ и μ, ранга $\rho \leqslant \min(m, n)$.

В главе рассмотрены два подхода к решению спектральных задач для $F(\lambda, \mu)$. Первый подход основан на линеаризации задачи по одному из параметров (для определенности λ), который заключается в переходе к, так называемому, сопровождающему пучку $A(\mu) - \lambda B(\mu)$ полиномиальных матриц, больших размеров, с последующим решением аналогичных спектральных задач для него. Второй подход основан на $\Delta W - 2$ факторизации матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Глава состоит из трех параграфов.

В §6.1 рассматриваются способы линеаризации двухпараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda, \mu)$ общего вида, исследуются свойства вводимых сопровождающих пучков, связь их спектральных характеристик с таковыми для матрицы $F(\lambda, \mu)$.

В §6.2 предлагается ΔW-2 алгоритм, осуществляющий ранговое сечение векторных пространств, в которых действует оператор $F(\lambda, \mu)$. Исследуются свойства ΔW-2 разложения.

В §6.3 рассматривается применение ΔW-2 разложения и алгоритма, его реализующего, к решению спектральных задач для $F(\lambda, \mu)$ как-то:

- построение минимального базиса нуль-пространств (левого и правого) из полиномиальных решений $F(\lambda, \mu)$;
- разделение непрерывного и дискретного спектров; вычисление конечного дискретного спектра (нульмерных собственных значений).

§6.1. Линеаризация двухпараметрической полиномиальной матрицы

6.1.1. Сопровождающие пучки.

Пусть $F(\lambda, \mu) = C_s(\mu)\lambda^s + \cdots + C_0(\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица, линеаризацию которой по параметру λ следует осуществить.

Введем в рассмотрение левый $F_L(\lambda,\mu)$ и правый $F_R(\lambda,\mu)$ сопровождающие $F(\lambda,\mu)$ пучки видов

$$F_L(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} \mathbb{O} & -I_n & & & \\ & \mathbb{O} & -I_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbb{O} & -I_n \\ C_0(\mu) & C_1(\mu) & \dots & C_{s-2}(\mu) & C_{s-1}(\mu) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -I_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & -I_n & \\ & & & -C_s(\mu) \end{bmatrix}$$

$$F_R(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} \mathbb{O} & & & C_0(\mu) \\ -I_m & \ddots & & C_1(\mu) \\ & \ddots & \mathbb{O} & C_{s-2}(\mu) \\ & & -I_m & C_{s-1}(\mu) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -I_m & & & \\ & \ddots & & \\ & & -I_m & \\ & & & -C_s(\mu) \end{bmatrix} \tag{6.1.1}$$

соответственно размеров $[m+(s-1)n]\times ns$ и $ms\times[n+(s-1)m]$. Наряду с пучками $F_\varphi(\lambda,\mu)$ $(\varphi=L,R)$ будем использовать пучки $\overline{F}_\varphi(\nu,\mu)=\nu F(\nu^{-1},\mu)$.

6.1.2. Связь между спектральными характеристиками.

Справедливы следующие эквивалентные преобразования

$$\begin{aligned} &\text{block diag}\,\{F(\lambda,\mu),I_\alpha\}=P_\varphi(\lambda,\mu)F_\varphi(\lambda,\mu)Q_\varphi(\lambda,\mu),\\ &\text{block diag}\,\{\overline{F}(\nu,\mu),I_\alpha\}=P_{\overline{\varphi}}(\nu,\mu)\overline{F}_\varphi(\nu,\mu)Q_{\overline{\varphi}}(\nu,\mu),\quad \varphi=L,R. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Здесь $P_\varphi(\lambda,\mu),Q_\varphi(\lambda,\mu)$ и $P_{\overline{\varphi}}(\nu,\mu),Q_{\overline{\varphi}}(\nu,\mu)$ суть унимодулярные матрицы видов:

$$P_L(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} G_1(\lambda,\mu) & \dots & G_{s-1}(\lambda,\mu) & I_m \\ -I_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & -I_n & \mathbb{O}_{nm} \end{bmatrix},\quad Q_L(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} I_n & & & \\ \lambda I_n & I_n & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda^{s-1}I_n & \lambda^{s-2}I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}$$

$$P_R(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} I_m & \lambda I_m & \dots & \lambda^{s-1}I_m \\ & I_m & \dots & \lambda^{s-2}I_m \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \end{bmatrix},\quad Q_R(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} G_1(\lambda,\mu) & -I_m & & \\ \vdots & & \ddots & \\ G_{s-1}(\lambda,\mu) & \dots & \dots & -I_m \\ I_n & & & \mathbb{O}_{nm} \end{bmatrix}, \tag{6.1.3}$$

где $G_i(\lambda,\mu)=\sum\limits_{k=0}^{s-i}\lambda^k C_{i+k}(\mu)$;

$$P_{\overline{L}}(\nu,\mu)=\begin{bmatrix} H_1(\nu,\mu) & \ldots & H_{s-1}(\nu,\mu) & I_m \\ & & I_n & \\ & \ddots & & \\ I_n & & & \end{bmatrix},\quad Q_{\overline{L}}(\nu,\mu)=\begin{bmatrix} \nu^{s-1}I_n & \ldots & \nu I_n & I_n \\ \vdots & & I_n & \\ \nu I_n & \ddots & & \\ I_n & & & \end{bmatrix}$$

$$P_{\overline{R}}(\nu,\mu)=\begin{bmatrix} \nu^{s-1}I_m & \ldots & \nu I_m & I_m \\ \vdots & & I_m & \\ \nu I_m & \ddots & & \\ I_m & & & \end{bmatrix},\quad Q_{\overline{R}}(\nu,\mu)=\begin{bmatrix} H_1(\nu,\mu) & \ldots & \ldots & I_n \\ \vdots & & \ddots & \\ H_{s-1}(\nu,\mu) & I_n & & \\ I_n & & & \end{bmatrix},$$

где $H_i(\nu,\mu)=-\sum\limits_{k=1}^{i}\nu^k C_{i-k}(\mu) \quad i=1,\ldots,s-1$; I – единичная матрица.

Справедливость равенств (6.1.2) устанавливается непосредственной подстановкой (6.1.3) в (6.1.2).

Равенства (6.1.2) позволяют установить следующую связь между спектральными характеристиками матрицы $F(\lambda,\mu)$ и ее сопровождающими пучками $F_\varphi(\lambda,\mu)$.

1^0. Одномерные и нульмерные собственные значения (с учетом их кратностей) матрицы $F(\lambda,\mu)$ и пучки $F_\varphi(\lambda,\mu)$ совпадают. Между жордановыми цепочками, отвечающими одной и той же точке (λ_*,μ_*) спектров матрицы $F(\lambda,\mu)$ и пучков $F_\varphi(\lambda,\mu)$, существует взаимнооднозначное соответствие, именно:

а) для $\lambda_*<\infty$

$$x_{\varphi,i}=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{k!}\,Q^{(k)}_{\varphi 1,*}x_{i-k},\ y^H_{\varphi,t-i+1}=\sum_{k=0}^{i-1}y^H_{t-i+k+1}\frac{1}{k!}P^{(k)}_{\varphi 1,*}\ i=1,\ldots,t;$$

б) для $\lambda_*=\infty$, т.е. $\nu_*=0$

$$x_{\varphi,i}=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{k!}\,Q^{(k)}_{\overline{\varphi}1,*}x_{i-k},$$

$$y_{\varphi,t-i+1}=\sum_{k=0}^{i-1}y^H_{t-i+k+1}\frac{1}{k!}P^{(k)}_{\overline{\varphi}1,*}\quad i=1,\ldots,t.$$

Здесь $x_1,\ldots,x_t$ и $y_1,\ldots,y_t$ – правая и левая жордановы цепочки матрицы $F(\lambda,\mu)$; $x_{\varphi i}$, $y_{\varphi i}$ $(i=1,\ldots,t)$ – правая и левая жордановы цепочки пучка $F_\varphi(\lambda,\mu)$, отвечающие точке (λ_*,μ_*) спектра.

Через $Q_{\varphi 1}(\lambda,\mu)$ и $P_{\varphi 1}(\lambda,\mu)$ $\big(Q_{\overline{\varphi}1}(\nu,\mu)$ и $P_{\overline{\varphi}1}(\nu,\mu)\big)$ обозначены первый блочный столбец и первая блочная строка матриц $Q_\varphi(\lambda,\mu)$ и $P_\varphi(\lambda,\mu)$ $\big(Q_{\overline{\varphi}}(\nu,\mu)$ и $P_{\overline{\varphi}}(\nu,\mu)\big)$ соответственно. $Q^{(k)}_{\varphi 1,*}$, $P^{(k)}_{\varphi 1,*}$ $\big(Q^{(k)}_{\overline{\varphi}1,*}$, $P^{(k)}_{\overline{\varphi}1,*}\big)$ суть значения производных порядка k по λ, вычисленные в точке (λ_*,μ_*).

2^0. Размерности правых и левых нуль-пространств из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$ и пучка $F_\varphi(\lambda,\mu)$ совпадают. Между полиномиальными решениями $x(\lambda,\mu)$, $y(\lambda,\mu)$ матрицы $F(\lambda,\mu)$ и полиномиальными решениями $x_\varphi(\lambda,\mu)$, $y_\varphi(\lambda,\mu)$ пучка $F_\varphi(\lambda,\mu)$ существует взаимнооднозначное соответствие:

$$x_\varphi(\lambda,\mu)=Q_{\varphi 1}(\lambda,\mu)x(\lambda,\mu),\qquad y^H_\varphi(\lambda,\mu)=y^H(\lambda,\mu)P_{\varphi 1}(\lambda,\mu).$$

При этом, если степени векторов $x(\lambda,\mu)$, $y(\lambda,\mu)$ по параметру λ равны ε и η соответственно, то степени по λ векторов $x_R(\lambda,\mu)$ есть ε, $y_L(\lambda,\mu)$ есть η, $x_L(\lambda,\mu)$ есть $\varepsilon+s-1$, $y_R(\lambda,\mu)$ есть $\eta+(s-1)$. Степени векторов по парметру μ у векторов $x_L(\lambda,\mu)$ и $y_R(\lambda,\mu)$ такие же, как у $x(\lambda,\mu)$ и $y(\lambda,\mu)$; степень $x_R(\lambda,\mu)$ и $y^H_R(\lambda,\mu)$ определяются максимальной степенью по μ векторов

$$\widetilde{x}_i(\lambda,\mu)=\sum_{j=0}^{\varepsilon-1}\lambda^j x_{ij}(\mu)\qquad x_{ij}(\mu)=-\sum_{k=j+1}^{\varepsilon}C_{i-k+j}(\mu)x_k(\mu)$$

$$\widetilde{y}^H_i(\lambda,\mu)=\sum_{j=0}^{\eta-1}\lambda^j y^H_{ij}(\mu)\qquad y^H_{ij}(\mu)=-\sum_{k=j+1}^{\eta}y^H_k(\mu)C_{i+k-j}(\mu).$$

Справедливость свойств $1^0,2^0$ проверяется с использованием равенств (6.1.2), устанвливающих эквивалентную связь сопровождающих пучков $F_\varphi(\lambda,\mu)$ с блочно-диагональными матрицами из блоков $F(\lambda,\mu)$ и единичной матрицы.

6.1.3. Другой способ линеаризации двухпараметрической полиномиальной матрицы.

Введем в рассмотрение блочный вектор

$$\Lambda:=\big(\lambda^s x,\ldots,\lambda^0 x\big)^T$$

и запишем уравнение $F(\lambda,\mu)x=0$ в эквивалентной форме

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda=0,\tag{6.1.4}$$

где $\mathfrak{A}(\mu):=[C_s(\mu),\ldots,C_0(\mu)]$ – однопараметрическая полиномиальная $m\times n(s+1)$ матрица. Обозначим $Q(\mu)$ матрицу, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства матрицы

$\mathfrak{A}(\mu)$, и запишем $Q(\mu)$ в блочном виде

$$Q(\mu) := [Q_s(\mu), \ldots , Q_0(\mu)]^B$$

с блоками $Q_k(\mu)$ размеров $n \times \sigma$, где $\sigma := \dim Q(\mu)$. Введем в рассмотрение матрицы $Q_+(\mu)$ и $Q_-(\mu)$, составленные соответственно из s первых и s последних блоков $Q(\mu)$:

$$Q_+(\mu) := [Q_s(\mu), \ldots , Q_1(\mu)]^B, \qquad Q_-(\mu) := [Q_{s-1}(\mu), \ldots , Q_0(\mu)]^B.$$

Рассмотрим уравнение

$$[Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)]y(\lambda, \mu) = 0. \tag{6.1.5}$$

Справедливо утверждение.

Теорема 6.1. *Между спектральными характеристиками уравнений* (6.1.5) *и* (6.1.4) *существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Сначала установим, что между решениями задач (6.1.4) и (6.1.5) существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть (λ_*, μ_*, x_*) есть решение уравнения (6.1.4); $Q_* := Q(\mu_*)$ есть правое нуль-пространство матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*)$; $\Lambda_* := (\lambda_*^s x_*, \ldots, \lambda_*^0 x_*)^B$ есть блочный вектор, принадлежащий подпространству Q_*, так что существует вектор $y_* \neq 0$ такой, что

$$Q_* y_* = \Lambda_*.$$

Учитывая строение вектора Λ_*, последнее равенство можно записать в виде

$$[Q_+(\mu_*) - \lambda_* Q_-(\mu_*)]y_* = 0.$$

Отсюда следует, что тройка (λ_*, μ_*, y_*) есть решение уравнения (6.1.5). Докажем обратное утверждение. Пусть (λ_*, μ_*, y_*) есть решение уравнения (6.1.5). Введем в рассмотрение ненулевой вектор $x_* := Q_0(\mu_*)y_*$ и покажем, что тройка (λ_*, μ_*, x_*) есть решение уравнения (6.1.4).

Действительно, по предположению, справедливо равенство

$$[Q_+(\mu_*) - \lambda_* Q_-(\mu_*)]y_* = 0,$$

которое может быть записано в развернутом виде

$$\begin{aligned}
&Q_1(\mu_*)\overline{y} = \lambda_* Q_0(\mu_*)y_* = \lambda_* x_*\\
&Q_2(\mu_*)y_* = \lambda_* Q_1(\mu_*)y_* = \lambda_*^2 x_*\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Q_s(\mu_*)y_* = \lambda_* Q_{s-1}(\mu_*)y_* = \cdots = \lambda_*^s x_*.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что вектор $\Lambda_* := (\lambda_*^s x_*, \dots, x_*)^T$ удовлетворяет равенству

$$\Lambda_* = Q(\mu_*)y_*,$$

т.е. вектор Λ_* принадлежащий правому нуль-пространству матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*)$, так что справедливо равенство

$$\mathfrak{A}(\mu_*)\Lambda_* = 0,$$

что и доказывает, что $(\lambda_*, \mu_*; x_* := Q_0(\mu_*)y_*)$ есть решение уравнения (6.1.4).

Взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (6.1.4) и (6.1.5) установлено.

Перейдем к доказательству соответствия между правыми полиномиальными решениями задач (6.1.4) и (6.1.5), а также между собственными тройками этих задач. Для этого, учитывая уже установленное взаимно однозначное соответствие между любыми решениями задач (6.1.4) и (6.1.5), достаточно доказательство провести только для одной группы спектральных характеристик. Для определенности доказательство проведем для правых полиномиальных решений.

Пусть $x(\lambda, \mu)$ есть правое полиномиальное решение задачи (6.1.4), так что при любых λ, μ имеет место равенство

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda = 0,$$

и следовательно, существует вектор $y(\lambda, \mu)$ такой, что

$$Q(\mu)y(\lambda, \mu) = \Lambda \quad \text{так что} \quad [Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)]y(\lambda, \mu) = 0.$$

Последнее равенство означает, что $y(\lambda, \mu)$ есть правое полиномиальное решение задачи (6.1.5).

Обратно, пусть $y(\lambda, \mu)$ есть правое полиномиальное решение задачи (6.1.5), т.е. при любых λ, μ имеет место равенство

$$[Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)]y(\lambda, \mu) = 0.$$

Записав это равенство в развернутом виде, получим

$$\begin{aligned}
&Q_1(\mu)y(\lambda, \mu) = \lambda Q_0(\mu)y(\lambda, \mu)\\
&Q_2(\mu)y(\lambda, \mu) = \lambda Q_1(\mu)y(\lambda, \mu) = \lambda^2 Q_0(\mu)y(\lambda, \mu)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Q_s(\mu)y(\lambda, \mu) = \lambda Q_{s-1}(\mu)y(\lambda, \mu) = \cdots = \lambda^s Q_0(\mu)y(\lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Обозначив $x(\lambda,\mu) := Q_0(\mu)y(\lambda,\mu)$, получим при любых λ и μ справедливость равенства

$$\Lambda \equiv [\lambda^s x(\lambda,\mu),\ldots,\lambda^0 x(\lambda,\mu)]^B = Q(\mu)y(\lambda,\mu),$$

т.е. вектор Λ принадлежит нуль-пространству матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, так что имеем при любом λ, μ

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda = 0,$$

а следовательно, $F(\lambda,\mu)x(\lambda,\mu) = 0$, т.е. $x(\lambda,\mu)$ есть правое полиномиальное решение $F(\lambda,\mu)$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что переход от (6.1.4) к (6.1.5) можно трактовать как способ линеаризации задачи (6.1.4).

Суммируя сказанное, можно рекомендовать следующий алгоритм линеаризации двухпараметрической матрицы.

(1) Уравнение (6.1.4) записывается в эквивалентном виде:

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda = 0,$$

где $\mathfrak{A}(\mu) = \big[C_s(\mu),\ldots,C_0(\mu)\big]$ – полиномиальная матрица размеров $m\times n(s+1)$; $\Lambda = (\lambda^s x,\ldots,\lambda^0 x)^B$ – блочный полиномиальный вектор степени s, размерности $(s+1)n$.

(2) Вычисляется правое нуль-пространство $Q(\mu)$ матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$ и конструируется уравнение

$$[Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)]y = 0.$$

В качестве $Q(\mu)$ берется $Q(\mu_*) = \ker\mathfrak{A}(\mu_*)$, т.е. базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*)$, если μ_* есть собственное значение полиномиальной матрицы $\mathfrak{A}(\mu_*)$; $Q(\mu) := W(\mu)$ – минимальный базис из правых полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, если $\mu \neq \mu_*$.

§6.2. Классификация некоторых факторизаций двухпараметрической полиномиальной матрицы

6.2.1. Факторизации двухпараметрических полиномиальных матриц.

Пусть $F(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ ($\rho \leqslant \min(m,n)$). Рассмотрим следующие три вида факторизации $F(\lambda,\mu)$:

1) ΔW-2 факторизация $F(\lambda,\mu)$ вида

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),0], \qquad (6.2.1)$$

обладающая следующими свойствами.

(а) Левые дискретные спектры и нуль-пространства из левых полиномиальных решений матриц $F(\lambda,\mu)$ и двухпараметрической полиномиальной $m\times\rho$ матрицс $\Delta(\lambda,\mu)$ совпадают.

(б) $W(\lambda,\mu)$ есть $n\times n$ регулярная двухпараметрическая полиномиальная матрица, унимодулярная по λ. Конечный спектр $W(\lambda,\mu)$ состоит из собственных прямых вида $\mu=\mu_*$.

(в) O есть нулевая $m\times(n-\rho)$ матрица. Последние $(n-\rho)$ столбцы матрицы $W(\lambda,\mu)=[W_1(\lambda,\mu),W_0(\lambda,\mu)]$, образующие матрицу $W_0(\lambda,\mu)$, являются базисом правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$.

(г) Правый конечный дискретный спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$ совпадает с конечным спектром матрицы $W_0(\lambda,\mu)$.

(д) $\Delta(\lambda,\mu)$ есть матрица полного столбцового ранга. Степень по λ матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$, не выше степени по λ матрицы $F(\lambda,\mu)$. Непрерывный спектр $\Delta(\lambda,\mu)$ состоит из объединения конечного непрерывного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ и спектра матрицы $W(\lambda,\mu)$, не принадлежащего спектру матрицы $W_0(\lambda,\mu)$.

2) ∇V-2 факторизация $F(\lambda,\mu)$ вида

$$F(\lambda,\mu)=\nabla(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu), \tag{6.2.2}$$

обладающая следующими свойствами.

(а) $\nabla(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная матрица ранга ρ. Непрерывный спектр матрицы $\nabla(\lambda,\mu)$ совпадает с конечным по λ непрерывным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$ и не содеожит собственных прямых $\mu=\mu_{i+}$, если даже последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$. Левые дискретные спектры и нуль-пространства, порожденные левыми полиномиальными решениями матриц $F(\lambda,\mu)$ и $\nabla(\lambda,\mu)$, совпадают.

(б) $V(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $\rho\times n$ матрица ранга ρ. Конечный непрерывный спектр матрицы $V(\lambda,\mu)$ состоит из прямых $\mu=\mu_{i+}$, если последние входят в спектр исходной матрицы $F(\lambda,\mu)$, и отсутствует в противном случае. Правые дискретные спектры и нуль-пространства, порожденные правыми полиномиальными решениями матриц $F(\lambda,\mu)$ и $V(\lambda,\mu)$, совпадают.

3) UTV-факторизация* $F(\lambda,\mu)$ вида

$$F(\lambda,\mu) = U(\lambda,\mu)T(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu), \qquad (6.2.3)$$

обладающая следующими свойствами.

(а) $T(\lambda,\mu)$ есть регулярная двухпараметрическая полиномиальная $\rho\times\rho$ матрица. Конечный спектр $T(\lambda,\mu)$ совпадает с конечным непрерывным спектром $F(\lambda,\mu)$, за исключением собственных прямых $\mu=\mu_{i-}$ и $\mu=\mu_{i+}$, если последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$.

(б) $V(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $\rho\times n$ матрица ранга ρ. Конечный спектр $V(\lambda,\mu)$ состоит из конечного правого дискретного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ и прямых $\mu=\mu_{i+}$, если последние принадлежат спектру $F(\lambda,\mu)$. Правые нуль-пространства из полиномиальных решений матриц $F(\lambda,\mu)$ и $V(\lambda,\mu)$ совпадают.

(в) $U(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m\times\rho$ матрица ранга ρ. Конечный спектр $U(\lambda,\mu)$ состоит из конечного левого дискретного спектра $F(\lambda,\mu)$ и прямых $\mu=\mu_{i*}$, если последние принадлежат спектру $F(\lambda,\mu)$. Левые нуль-пространства из полиномиальных решений матриц $F(\lambda,\mu)$ и $U(\lambda,\mu)$ совпадают.

Доказательство существования факторизаций (6.2.1), (6.2.2), (6.2.3) проведем конструктивно, описывая алгоритмы их реализующие. При этом для простоты рассуждений будем предполагать, что спектр $F(\lambda,\mu)$ не содержит прямых вида $\mu=\mu_*$ и $\lambda=\lambda_*$.

6.2.2 ΔW-2 алгоритм и его обоснование.

ΔW-2 алгоритм реализует ΔW-2 факторизацию (6.2.1) полиномиальной матрицы и вычисляет собственные прямые $\mu=\mu_{i*}$, образующие конечный спектр матрицы $W(\lambda,\mu)$ из (6.2.1).

ΔW-2 алгоритм состоит в построении конечной последовательности матричных полиномов $\{F_k(\lambda,\mu)\}$, $k=1,\dots,l$ по формуле

$$F_k(\lambda,\mu) = F_{k-1}(\lambda,\mu)W_k(\lambda,\mu)$$

$$F_0(\lambda,\mu) := F(\lambda,\mu) = C_s(\mu)\lambda^s + C_{s-1}(\mu)\lambda^{s-1} + \ldots + C_0(\mu);$$

$$F_l(\lambda,\mu) := [\Delta(\lambda,\mu), \mathbb{O}].$$

Реализация типичного (первого) шага требует выполнения следующих операций.

*Учитывая минимальность размеров матриц-сомножителей в факторизации UTV, будем последнюю называть также минимальной факторизацией матрицы $F(\lambda,\mu)$.

(1) По коэффициентам $F_0(\lambda, \mu)$ формируется вспомогательная $m \times n_1$ $(n_1 \leqslant n)$ полиномиальная матрица

$$M_1(\mu) = [\underbrace{\overline{C}_{s,1}(\mu)}_{t_1}, \underbrace{\overline{C}_{s-1,2}(\mu)}_{t_2}, \dots, \underbrace{\overline{C}_{s+1-p,p}(\mu)}_{t_p}], \quad p \leqslant s+1, \quad (6.2.4)$$

которая образована ненулевыми коэффициентами, стоящими при старших степенях λ в столбцах матрицы $F_0(\lambda, \mu)$.

Построение $M_1(\mu)$ начинается с просмотра коэффициента $C_s(\mu)$.

Если среди столбцов $C_s(\mu)$ нет нулевых, то $M_1(\mu) = C_s(\mu)$. В противном случае следует переставить столбцы во всех коэффициентах $C_q(\mu)$ $(q = s, s-1, \dots, 0)$ так, чтобы

$$C_s(\mu) := \left[\overline{C}_s(\mu), \mathbb{O}\right], \qquad C_q(\mu) := \left[C_{q1}, C_{q2}\right] \quad q = s-1, \dots, 0.$$

Здесь через $\overline{C}_{s1}(\mu)$ обозначена матрица $m \times t_1$, составленная из ненулевых столбцов $C_s(\mu)$; $C_{q1}(\mu)$ и $C_{q2}(\mu)$ – матрицы размеров $m \times t_1$ и $m \times (n - t_1)$, соответственно.

Если среди столбцов $C_{s-1,2}(\mu)$ нет нулевых, то $M_1(\mu) := \left[\overline{C}_{s1}\ C_{s-1,2}\right]$. В противном случае следует переставить столбцы в коэффициентах $C_q(\mu)$ $(q = s-1, \dots, 0)$ так, чтобы

$$C_{s-1,2}(\mu) = \left[\overline{C}_{s-1,2}, \mathbb{O}\right] \qquad C_{q2}(\mu) := \left[C_{q2}(\mu), C_{q3}(\mu)\right],$$

где $\overline{C}_{s-1,2}$ – матрица $m \times t_2$, не имеющая нулевых столбцов; $C_{q2}(\mu)$ и $C_{q3}(\mu)$ – матрицы размеров $m \times t_2$ и $m \times (n - \sigma_2)$, $\sigma_2 = t_1 + t_2$.

Если блок $C_{s-2,3}$ не имеет нулевых столбцов, то

$$M_1(\mu) := \left[\overline{C}_{s1}(\mu), \overline{C}_{s-1,2}(\mu), C_{s-2,3}(\mu)\right].$$

В противном случае процесс формирования матрицы $M_1(\mu)$ аналогично продолжается и заканчивается на шаге $p \leqslant s+1$, когда будет построена матрица $M_1(\mu)$ вида

$$M_1(\mu) := \left[\overline{C}_{s1}(\mu),\ \overline{C}_{s-1,2}(\mu), \dots, \overline{C}_{s+2-p,p-1}(\mu),\ \overline{C}_{s+1-p,p}(\mu)\right],$$

состоящая из блоков соответственно размеров $m \times t_1$, $m \times t_2$, $\dots$, $m \times t_{s+2-p}$, $m \times (n - \sigma_{p-1})$, $\sigma_{p-1} = \sum\limits_{k=1}^{s+2-p} t_k$. При $p < s+1$ среди последующих столбцов матрицы $M_1(\mu)$ могут быть нулевые. В этом случае все коэффициенты преобразуемого матричного полинома имеют последними нулевые столбцы и их размеры могут быть уменьшены вычеркиванием нулевых столбцов. Размеры полученного матричного полинома обозначим $m \times n_1$. Матрица $M_1(\mu)$ размеров $m \times n_1$ будет состоять из ненулевых столбцов

$$M_1(\mu) = \left[\overline{C}_{s1}(\mu), \dots, \overline{C}_{s+1-p,p}(\mu)\right].$$

(2) Вычисляется полиномиальная матрица $T_1(\mu)$, столбцы которой образуют минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $M_1(\mu)$.

Для построения $T_1(\mu)$ выполняются следующие операции:

(2.1) Находится ΔW-1 разложение матрицы $M_1(\mu)$:

$$M_1(\mu)W(\mu) = \left[\Delta(\mu), \mathbb{O}\right] \qquad W(\mu) = \left[W_1(\mu), W_0(\mu)\right],$$

где $W(\mu)$ – унимодулярная матрица, а ее блок $W_0(\mu)$ – унимодулярный базис нуль-пространства $M_1(\mu)$ из правых полиномиальных решений.

(2.2) Унимодулярный базис $W_0(\mu)$ перестраивается в искомый минимальный базис $T_1(\mu)$. Для этого находится ΔW-1 разложение матрицы $W_0(\mu)$. Имеем

$$W_0(\mu)\widetilde{W}(\mu) = \left[T_1(\mu)\right],$$

где $\widetilde{W}(\mu)$ – унимодулярная матрица.

(3) Матрица $T_1(\mu)$ преобразуется к левой трапецеидальной матрице $L_1(\mu)$. Преобразование $T_1(\mu)$ к виду $L_1(\mu)$ осуществляется умножением $T_1(\mu)$ справа на цепочку унимодулярных матриц. Типичный (первый) шаг состоит в умножении $T_1(\mu)\widetilde{W}_1(\mu)$, где $\widetilde{W}_1(\mu)$ – унимодулярная матрица, осуществляющая ΔW-1 факторизацию ведущей (первой) строки $T_1(\mu)$. Имеем

$$T^{(1)}(\mu) := T_1(\mu)\widetilde{W}_1(\mu) = \begin{bmatrix} l_{11}(\mu) & 0 & \dots & 0 \\ l_{21}(\mu) & t_{22}(\mu) & \dots & t_{2q}(\mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1}(\mu) & t_{m2}(\mu) & \dots & t_{mq}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Здесь $q = n_1 - r_1$, $r_1 = \operatorname{rank} M_1(\mu)$. Далее в качестве ведущей берется строка $[t_{22}(\mu), \dots, t_{2q}(\mu)]$, составленная из элементов второй строки преобразуемой матрицы, и находится унимодулярная матрица $\widetilde{W}_2(\mu)$, осуществляющая ΔW-1 разложение этой строки. Имеем

$$T^{(2)}(\mu) \equiv T^{(1)}(\mu) \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{O} & \widetilde{W}_2(\mu) \end{smallmatrix}\right].$$

Процесс аналогично продолжается пока не придем к искомой левой трапецеидальной матрице $L_1(\mu)$.

Если при переходе от $T_1(\mu)$ к $L_1(\mu)$ на некотором шаге i в преобразуемой матрице встретится строка с номером i нулевая, то она вычеркивается. Соответствующий столбец в L_1 заменяется столбцом единичной матрицы, так чтобы в позиции (i,i) элемент был равен единице. Приведение к левой трапецеидальной матрице продолжается с вычеркнутой строкой.

В результате будет построена матрица $L_1(\mu)$ размеров $n_1 \times h_1$, где $h_1 \geqslant n_1 - r_1$. Столбцы этой матрицы содержат базис нуль-пространства матрицы $M_1(\mu)$ и быть может столбцы единичной матрицы, причина наличия которых описана выше. В дальнейшем изложении будем считать, что $L_1(\mu)$ имеет $n_1 - r_1$ столбцов. Все рассуждения, приведенные ниже, остаются в силе, если всюду $(n_1 - r_1)$ заменить на h_1.

Заметим, что среди диагональных элементов $l_{ii}(\mu)$ матрицы $L_1(\mu)$ могут быть скалярные полиномы, корни которых μ_* нам потребуются в дальнейшем.

(4) На базе матрицы $L_1(\mu)$ формируется λ-модулярная матрица $W^{(1)}(\lambda,\mu)$. С этой целью запишем $L_1(\mu)$ в блочном виде.

а) Если $\sigma_{k-1} \leqslant n_1 - r_1, \quad \sigma_k > n_1 - r_1$ при $k < p$ (k – число блочных столбцов в $L_1(\mu)$, то

$$L_1(\mu) = \begin{array}{r} t_1\{ \\ \\ \\ \\ t_p\{ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} L_{11}(\mu) & & & \\ L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & \mathbb{O} \\ & & \ddots & \\ L_{k1}(\mu) & L_{k2}(\mu) & \dots & L_{kk}(\mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{L_{p1}(\mu)}_{t_1} & \underbrace{L_{p2}(\mu)}_{t_2} & \dots & \underbrace{L_{pk}(\mu)}_{t_k} \end{bmatrix}.$$

б) Если $\sigma_{k-1} \leqslant n_1 - r_1, \quad \sigma_k > n_1 - r_1$ только при $k = p$, то

$$L_1(\mu) = \begin{array}{r} t_1\{ \\ \\ \\ t_p\{ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} L_{11}(\mu) & & & & \\ L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & \\ \dots & \dots & \dots & L_{p-1,p-1}(\mu) & \\ L_{p1}(\mu) & L_{p2}(\mu) & \dots & L_{p,p-1}(\mu) & L_{pp}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\sigma_k := \sum\limits_{k=1}^{k} t_i$, $L_{ii}(\mu) \quad i = 1, \dots, k-1$ – левые треугольные с ненулевой диагональю регулярные матрицы размеров $t_i \times t_i$;

$L_{kk}(\mu)$ есть $t_k \times (n_1 - r_1 - \sigma_{k-1})$ матрица полного столбцового ранга с ненулевой диагональю. Искомая матрица $W_1(\lambda, \mu)$ будет:

в случае а)

$$W^{(1)}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} L_{11}(\mu) & & & & \\ \lambda L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & \mathbb{O} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \lambda^{k-1}L_{k1}(\mu) & \lambda^{k-2}L_{k2}(\mu) & \dots & L_{kk}(\mu) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \lambda^{p-1}L_{p1}(\mu) & \lambda^{p-2}L_{p2}(\mu) & \dots & L_{pk}(\mu) & I_{r_1} \end{bmatrix};$$

в случае б)

$$W^{(1)}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} L_{11}(\mu) & & & & \\ \lambda L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & & \mathbb{O} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \lambda^{p-1}L_{p1}(\mu) & \lambda^{p-2}L_{p2}(\mu) & \dots & \lambda L_{pp}(\mu) & I_{r_1} \end{bmatrix}.$$

(5). Осуществляется переход к матричному полиному $F_1(\lambda, \mu)$

$$F_1(\lambda,\mu) = F_0(\lambda,\mu)\theta_1 \overline{W}_1(\lambda,\mu),$$

где θ_1 – результирующая матрица перестановок первого шага, $\overline{W}_1(\lambda,\mu)$ – унимодулярная по λ матрица

$$\overline{W}_1(\lambda,\mu) = \begin{cases} W^{(1)}(\lambda,\mu) & \text{при} \quad n = n_1 \\ \text{block diag}\,\{W^{(1)}(\lambda,\mu), I_{n-n_1}\} \end{cases}.$$

Операции (1)–(6) алгоритма выполняются до тех пор, пока на некотором шаге $l+1$ получим матрицу $M_{l+1}(\mu)$ полного столбцового ранга. В этом случае

$$F_l(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu)\ \mathbb{O}] \equiv F(\lambda,\mu), W(\lambda,\mu), \tag{6.2.5}$$

где

$$W(\lambda,\mu) = \prod_{k=1}^{l+1} \bar{W}_{k-1}(\lambda,\mu)\theta_k(\lambda,\mu), \quad \bar{W}_0(\lambda,\mu) := I.$$

Представим матрицу $W(\lambda,\mu)$ в блочном виде

$$W(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu), W_0(\lambda,\mu)]$$

где матрица $W_0(\lambda,\mu)$ составлена из последних столбцов $W(\lambda,\mu)$, число которых равно числу столбцов нулевой матрицы $\mathbb{O}$ в разложении (6.2.5), матрица $W_1(\lambda,\mu)$ составлена из оставшихся столбцов $W(\lambda,\mu)$ число которых равно числу столбцов матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$.

Покажем, что разложение (6.2.5), полученное с помощью ΔW-2 алгоритма, обладает свойствами ΔW-2 факторизации. Сначала установим справедливость свойств матриц $W(\lambda,\mu)$ и $W_0(\lambda,\mu)$.

Лемма 6.2. *Конечный спектр матрицы $W(\lambda,\mu)$ не зависит от λ и совпадает с корнями алгебраических уравнений от одной переменной*

$$l_{ii}^{(k)}(\mu)=0,\quad i=1,\dots,n-r_k;\quad k=1,\dots,l \qquad (6.2.6)$$

Действительно, по построению

$$W(\lambda,\mu)=\prod_{k=1}^{l+1}\bar W_{k-1}(\lambda,\mu)\theta_k(\lambda,\mu),$$

где $\bar W_{k-1}(\lambda,\mu)$ левая треугольная матрица с диагональю вида

$$\{l_{11}^{(k)}(\mu),\dots,l_{n-r_k,n-r_k}^{(k)}(\mu),1,\dots,1\};$$

$\theta_k(\lambda,\mu)$–матрица перестановок. Отсюда конечный спектр $W(\lambda,\mu)$ есть объединение конечных спектров матриц $\bar W_k(\lambda,\mu)$, $k=1,\dots,l$, т.е. совпадает с корнями нетривиальных скалярных полиномов из (6.2.6), другими словами, состоит только из собственных прямых $\mu=\mu_*$.

Следствие 6.3. *Конечный спектр матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ содержится в спектре матрицы $W(\lambda,\mu)$.*

Справедливость следует из регулярности матрицы $W(\lambda,\mu)$, для которой $W_0(\lambda,\mu)$ является подматрицей, составленной из столбцов $W(\lambda,\mu)$.

Лемма 6.4. *Столбцы матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ образуют базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$.*

Действительно, принадлежность столбцов $W_0(\lambda,\mu)$ правому нуль-пространству из полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$ следует из равенства (6.2.5). Из (6.2.5) также следует, что число столбцов $W_0(\lambda,\mu)$ совпадает с размерностью рассматриваемого нуль-пространства $F(\lambda,\bar\mu)$. Учитывая, что $W_0(\lambda,\mu)$ составлена из столбцов регулярной матрицы $W(\lambda,\mu)$ заключаем, что ранг $W_0(\lambda,\mu)$ равен $n-\rho$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема 6.5. *Правый дискретный конечный спектр матрицы $F(\lambda, \mu)$ совпадает с конечным спектром $W_0(\lambda, \mu)$.*

Доказательство. Пусть точка (λ_i, μ_i) принадлежит правому дискретному спектру $F(\lambda, \mu)$. Тогда с учетом, что столбцы $W_0(\lambda, \mu)$ образуют полиномиальный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений $F(\lambda, \mu)$ по теореме 6.4 имеем

$$\operatorname{rank} W_0(\lambda_i, \mu_i) < n - \rho,$$

и следовательно, точка (λ_i, μ_i) принадлежит спектру $W_0(\lambda, \mu)$.

Обратно, пусть (λ_i, μ_i) принадлежит спектру $W_0(\lambda, \mu)$, так что $\operatorname{rank} W_0(\lambda_i, \mu_i) < n - \rho$, т.е. столбцы $W_0(\lambda_i, \mu_i)$ не образуют базис правого нуль-пространства постоянной матрицы $F(\lambda_i, \mu_i)$. Тогда существует ненулевой вектор x_i, не принадлежащий подпространству, натянутому на столбцы матрицы $W_0(\lambda_i, \mu_i)$, такой что

$$F(\lambda_i, \mu_i)x_i = 0$$

т.е. (λ_i, μ_i) является также точкой спектра $F(\lambda, \mu)$ и, следовательно, $\operatorname{rank} F(\lambda_i, \mu_i) < \rho$. Из справедливости неравенств $\operatorname{rank} W_0(\lambda_i, \mu_i) < n - \rho$ и $\operatorname{rank} F(\lambda_i, \mu_i) < \rho$ по теореме 6.4 следует, что (λ_i, μ_i) принадлежит дискретному спектру $F(\lambda, \mu)$

Теорема 6.6. *Непрерывный спектр матрицы $\Delta(\lambda, \mu)$ в равенстве (6.2.5) состоит из объединения конечного по λ непрерывного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$ и спектра матрицы $W(\lambda, \mu)$, точки которого не принадлежат спектру $W_0(\lambda, \mu)$.*

При доказательстве используем равенство

$$\Delta(\lambda, \mu) = F(\lambda, \mu) W_1(\lambda, \mu) \tag{6.2.7}$$

которое следует из (6.2.5).

Сначала установим справедливость включения

$$\sigma_r[\Delta] \subseteq \sigma_r[F] \cup \sigma[W] \tag{6.2.8}$$

Здесь и ниже обозначено $\sigma_r[A]$ – конечный непрерывный спектр матрицы $A(\lambda, \mu)$, $\sigma[A]$ – конечный спектр $A(\lambda, \mu)$.

Пусть $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma_r[\Delta]$, так что имеем

$$\Delta(\lambda_i, \mu_i) y_1 = 0, \quad y_1 \neq 0$$

С учетом (6.2.7) справедливо равенство

$$0 = \Delta(\lambda_i, \mu_i) y_1 = F(\lambda_i, \mu_i) W_1(\lambda_i, \mu_i) y_1,$$

которое выполняются в двух ситуациях

$$(i) \quad W_1(\lambda_i, \mu_i)y_1 = 0 \quad y_1 \neq 0$$
$$(i,i,) \quad F(\lambda_i, \mu_i)x = 0 \quad x := W_1(\lambda_i, \mu_i)y_1 \neq 0$$

В ситуации (i) точка $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma[w_1] \subseteq \sigma[w]$.

В ситуации (i,i) точка $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma[F]$. Надо доказать, что $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma_r[F]$. Допустим противное. Пусть (λ_i, μ_i) является дискретной точкой спектра $F(\lambda, \mu)$. Тогда по теореме 6.4 имеем $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma[W_0] \subseteq \sigma[W]$, что невозможно в рассматриваемой ситуации. Действительно, вектор x есть собственный вектор $F(\lambda, \mu)$, соответствующий точке спектра (λ_i, μ_i), так что проекция x на подпространство $W_0(\lambda_i, \mu_i)$, т.е. вектор $W_0(\lambda_i, \mu_i)y_0$, равна нулю. Покажем, что

$$y_0 = W_0(\lambda_i, \mu_i)[W_0^T(\lambda_i, \mu_i)W_0(\lambda_i, \mu_i)]^{-1}W_0^T(\lambda_i, \mu_i)x = 0,$$

Допустим противное, т.е. $x \neq \ker W_0^T(\lambda_i, \mu_i)$. Тогда $x \in \mathrm{im} W_0(\lambda_i, \mu_i)$, что невыполнимо в ситуации (i,i). Противоречие доказывает, что $y_0 = 0$, так что (λ_i, μ_i) не принадлежит спектру матрицы $W_0(\lambda, \mu)$, и следовательно в силу теоремы 6.5 не является точкой дискретного спектра $F(\lambda, \mu)$, что и доказывает, что $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma_r[F]$. Справедливость включения (6.2.8) установлена.

Докажем включение вида

$$\sigma_r[\Delta] \supseteq \sigma_r[F] \cup \widehat{\sigma}[W], \tag{6.2.9}$$

где через $\widehat{\sigma}[W]$ обозначены точки спектра $W(\lambda, \mu)$, не принадлежащие спектру матрицы $W_0(\lambda, \mu)$.

Пусть $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma_r[F]$. Имеем

$$F(\lambda_i, \mu_i)x = 0, \quad x = W_1(\lambda_i, \mu_i)y_1 + W_0(\lambda_i, \mu_i)y_0 \neq 0 \tag{6.2.10}$$

По теореме 6.4 $(\lambda_i, \mu_i) \notin \sigma[W_0]$. Отсюда с учетом (6.2.7) имеем

$$0 = F(\lambda_i, \mu_i)x = F(\lambda_i, \mu_i)W_1(\lambda_i, \mu_i)y_1 = \Delta(\lambda_i, \mu_i)y_1$$

и $y_1 \neq 0$, т.е. точки (λ_i, μ_i) принадлежит спектру $\Delta(\lambda, \mu)$ и так как $\Delta(\lambda, \mu)$ не имеет правых полиномиальных решений, а следовательно и правого дискретного спектра, то точка $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma_r[\Delta]$.

Далее пусть $(\lambda_i, \mu_i) \in \widehat{\sigma}[W]$, так что существует вектор $y = \binom{y_1}{y_0} \neq 0$ такой что

$$0 = W(\lambda_i, \mu_i)y = W_1(\lambda_i, \mu_i)y_1 + W_0(\lambda_i, \mu_i)y_0 \tag{6.2.11}$$

причем по условию $W_0(\lambda_i,\mu_i)y_0 \neq 0$ при $y_0 \neq 0$. Из (6.2.7) имеем

$$0 = F(\lambda_i,\mu_i)W(\lambda_i,\mu_i)y = F(\lambda_i,\mu_i)W_1(\lambda_i,\mu_i)y_1 = \Delta(\lambda_i,\mu_i)y_1$$

Докажем, что равенство $y_1 = 0$ невыполнимо в рассматриваемых условиях.

Действительно, при $y_1 = 0$ из (6.2.11) с учетом, что $y \neq 0$ имеем

$$W_0(\lambda_i,\mu_i)y_0 = 0 \quad \text{при} \quad y_0 \neq 0,$$

что невозможно по условию.

Противоречие доказывает справедливость включения (6.2.9). Из (6.2.8) и (6.2.9) следует справедливость теоремы.

Вернемся к доказательству свойств а)–г), т.е. свойств ΔW-2 факторизации, разложения (6.2.5), полученного с помощью ΔW-2 алгоритма. Справедливость свойства а) следует из равенства (6.2.5), сохраняющего все левые спектральные характеристики (левое нуль-пространство из полиномиальных решений и левый дискретный спектр) матрицы $F(\lambda,\mu)$.

Справедливость свойства б) следует из леммы 6.2 и следствия 6.3. Лемма 6.4 устанавливает справедливость свойства в). Справедливость свойства г) следует из теоремы 6.5.

Установим справедливость свойства д). Связь между спектральными характеристиками матриц $\Delta(\lambda,\mu)$, $W(\lambda,\mu)$ и $F(\lambda,\mu)$ устанавливает теорема 6.6. По построению все матрицы $F_k(\lambda,\mu)$ $k = 0,\dots,l$ имеют ранг ρ, $F_l(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),0]$. Следовательно ранг $\Delta(\lambda,\mu)$ равен ρ. Отсутствие бесконечных по λ собственных значений у $\Delta(\lambda,\mu)$ следует из совпадения столбцов матрицы $M_{l+1}(\bar{\mu})$ полного столбцового ранга, с коэффициентами при старших степенях λ в столбцах матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$.

Степень по ведущему параметру λ матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$, полученной ΔW-2 алгоритмом, не выше степени λ исходной матрицы, так как по построению все матрицы $\bar{W}_k(\lambda,\mu)$, $k = 0,\dots,l$ являются левыми треугольными с диагональными элементами не зависимыми от λ. При этом в клеточном разбиении матрицы $W(\lambda,\mu)$ степень параметра λ возрастает на единицу при переходе к ниже расположенной клетке (см. строение матриц $W^{(k)}(\lambda,\mu)$ в операции (5) алгоритма).

6.2.3. ∇V-2 алгоритм и его обоснование.

∇V-2 алгоритм реализует ∇V-2 факторизауию вида (6.2.2) двухпараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda,\mu)$ и основан на использовании ΔW-2 факторизации. Для его реализации требуется выполнить следующие операции

(1) Найти ΔW-2 факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=[\Delta(\lambda,\mu),0], \tag{6.2.12}$$

использовав алгоритм п. 6.2.2.

(2) Вычислить рациональную двухпараметрическую $\rho\times n$ матрицу ранга ρ вида

$$R(\lambda,\mu)=\frac{1}{\varphi(\mu)}B_\rho(\lambda,\mu), \tag{6.2.13}$$

образованную первыми ρ строками регулярной матрицы $W^{-1}(\lambda,\mu)$, обратной к матрице $W(\lambda,\mu)$ из (6.2.12). Эта операция может быть реализована с помощью метода Леверье-Фаддеева, предложенного для вычисления коэффициентов характеристического полинома постоянной матрицы, путем модификации его для двухпараметрической полиномиальной регулярной матрице. Метод вычисления $W^{-1}(\lambda,\mu)$ в виде

$$W^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{1}{\varphi(\mu)}B(\lambda,\mu), \tag{6.2.14}$$

где $\varphi(\mu):=\det W(\lambda,\mu)$, $B(\lambda,\mu)$ – союзная матрица для $W(\lambda,\mu)$, описан в гл. 8. Тогда из равенства (6.2.5) имеем

$$F(\lambda,\mu)=\Delta(\lambda,\mu)B_\rho(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}. \tag{6.2.15}$$

(3) Исчерпать из матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$ собственные значения вида $\mu=\mu_{i*}$, $i=1,\dots,q$, как паразитические, порожденные ΔW-2 алгоритмом, так и принадлежащие спектру матрицы $F(\lambda,\mu)$. Для простоты рассуждений будем предполагать, что $\mu=\mu_{i*}$ суть простые собственные значения, т.е., не имеют жордановых цепочек. С этой целью для $\mu=\mu_{k+}$ кратности $r_k\geqslant 1$, $k=1,\dots,q$, вычисляются матрица

$$\nabla(\lambda,\mu)=\Delta(\lambda,\mu)P^{-1}(\lambda,\mu), \tag{6.2.16}$$

где

$$P^{-1}(\lambda,\mu)=\prod_{k=1}^{q}W_k(\lambda)\operatorname{diag}\{I_{\rho-r_k},(\mu-\mu_{k+})^{-1}I_{r_k}\},$$

и матрица

$$D(\lambda,\mu)=P(\lambda,\mu)B_\rho(\lambda,\mu),$$

где

$$P(\lambda,\mu)=\prod_{k=q}^{1}\operatorname{diag}\{I_{\rho-r_k},I_{r_k}(\mu-\mu_{k+})\}W_k^{-1}(\lambda). \qquad (6.2.17)$$

Для построения $\nabla(\lambda,\mu)$ и $D(\lambda,\mu)$ строятся две конечные последовательности матриц

$$\{\nabla_k(\lambda,\mu)\} \quad \text{и} \quad \{D_k(\lambda,\mu)\}, \quad k=1,\dots,q.$$

Рассмотрим типичный (первый) шаг. Полагая $\mu_* := \mu_{1*}$, $\nabla_0(\lambda,\mu):=\Delta(\lambda,\mu)$, $D_0(\lambda,\mu):=B_\rho(\lambda,\mu)$ вычисляем матрицы $\nabla_1(\lambda,\mu)$ и $D_1(\lambda,\mu)$ по следующему предписанию

(i) Используя ΔW-1 алгоритм, вычисляем ΔW-1 факторизацию однопараметрической матрицы $\nabla_0(\lambda,\mu_*)$:

$$\nabla_0(\lambda,\mu_*)W_1(\lambda)=[\Delta_1(\lambda),0]$$

и находим унимодулярную матрицу $W_1^{-1}(\lambda)$, обратную к унимодулярной матрице $W_1(\lambda)$.

(ii) Вычисляем двухпараметрические полиномиальные матрицы

$$\overline{\nabla}_0(\lambda,\mu)=\nabla_0(\lambda,\mu)W_1(\lambda) \quad \text{и} \quad \overline{D}_0(\lambda,\mu)=W_1^{-1}(\lambda)D_0(\lambda,\mu).$$

(iii) Вычисляем матрицу

$$\nabla_1(\lambda,\mu)=\overline{\nabla}_0(\lambda,\mu)\operatorname{diag}\{I_{\rho-r_1},(\mu-\mu_*)^{-1}I_{r_1}\}$$

и

$$D_1(\lambda,\mu)=\operatorname{diag}\{I_{\rho-r_1},(\mu-\mu_*)I_{r_1}\}\bar{D}_0(\lambda,\mu).$$

При этом $\nabla_1(\lambda,\mu)$ получается из $\overline{\nabla}_0(\lambda,\mu)$ делением элементов последних столбцов $\overline{\nabla}_0(\lambda,\mu)$ на их общий делитель $(\mu-\mu_*)$, используя алгоритм деления полиномов от двух переменных на их общий делитель. Это деление также может быть реализовано по схеме Горнера, примененной к полиному от двух переменных. Матрица $D_1(\lambda,\mu)$ получается из $\overline{D}_0(\lambda,\mu)$ умножением элементов ее r_1 последних строк на множитель $(\mu-\mu_*)$. В результате будет вычислена матрица $\nabla_1(\lambda,\mu)$, конечный непрерывный спектр которой совпадает с конечным непрерывным спектром $\nabla_0(\lambda,\mu)$ за исключением одномерного собственного значения $\mu=\mu_{1+}$, которое отсутствует у $\nabla_1(\lambda,\mu)$.

Операции (i)–(iii) повторяются с матрицами $\nabla_1(\lambda,\mu)$, $D_1(\lambda,\mu)$ и $\mu_* = \mu_{2+}$. Процесс заканчивается за q шагов. В результате будут построены требуемые матрицы

$$\begin{aligned} &\nabla(\lambda,\mu) := \nabla_q(\lambda,\mu) \equiv \Delta(\lambda,\mu)P^{-1}(\lambda,\mu), \\ \text{и}\quad &D(\lambda,\mu) := D_q(\lambda,\mu) \equiv P(\lambda,\mu)B_\rho(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

По построению непрерывный спектр $\nabla(\lambda,\mu)$ совпадает с конечным непрерывным спектром исходной матрицы $F(\lambda,\mu)$, за исключением собственных значений $\mu = \mu_+$. Матрица $D(\lambda,\mu) = P(\lambda,\mu)B_\rho(\lambda,\mu)$ имеет полный строчный ранг, равный ρ.

В результате выполнения шагов (1)–(3) имеем

$$F(\lambda,\mu) = \nabla(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)} = \nabla(\lambda,\mu)R_1(\lambda,\mu), \tag{6.2.19}$$

где $R_1(\lambda,\mu) := \frac{1}{\varphi(\mu)}D(\lambda,\mu)$.

(4) Для рациональной матрицы $R_1(\lambda,\mu)$ вычисляется несократимая факторизация вида:

$$R_1(\lambda,\mu) = T_1^{-1}(\lambda,\mu)S_1(\lambda,\mu). \tag{6.2.20}$$

Здесь $T_1(\lambda,\mu)$ и $S_1(\lambda,\mu)$ суть $\rho\times\rho$ и $\rho\times n$ двухпараметрические полиномиальные матрицы ранга ρ; матрица $[-S_1(\lambda,\mu),T_1(\lambda,\mu)]^B$ не имеет конечного непрерывного спектра.

Алгоритм вычисления несократимой факторизации рациональной матрицы рассмотрен в главе 7. Здесь мы приводим его краткое описание. Переход от рациональной матрицы $R_1(\lambda,\mu)$ из (6.2.19) к ее факторизации вида (6.2.20) требует выполнения следующих операций

(i) Формируется вспомогательная $n\times(n+\rho)$ матрица

$$C(\lambda,\mu) := [K(\lambda,\mu), D^T(\lambda,\mu)],$$

где $K(\lambda,\mu) = \varphi(\mu)I$, $D^T(\lambda,\mu)$ – матрица, транспонированная к $D(\lambda,\mu)$ из (6.2.18).

(ii) Используя алгоритм ΔW-2, находится матрица $W_0(\lambda,\mu)$, столбцы которой образуют минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $C(\lambda,\mu)$.*

(iii) Матрица $W_0(\lambda,\mu)$ размеров $(n+\rho)\times\rho$ записывается в блочном виде

$$W_0(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu),\, W_2(\lambda,\mu)]^B$$

*Построение минимального базиса рассмотрено в п.6.3.1.

с блоками $W_1(\lambda,\mu)$ и $W_2(\lambda,\mu)$ размеров $n\times\rho$ и $\rho\times\rho$ соответственно.

Тогда искомые матрицы $S(\lambda,\mu)$ и $T(\lambda,\mu)$ разложения (6.2.20) будут

$$S_1(\lambda,\mu) := -W_1^T(\lambda,\mu), \quad T_1(\lambda,\mu) := W_2^T(\lambda,\mu). \tag{6.2.21}$$

Равенство (6.2.15) с учетом равенств (6.2.19)–(6.2.21) примет требуемый вид

$$F(\lambda,\mu) = \Delta(\lambda,\mu)B_\rho(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)} = \nabla(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu), \tag{6.2.22}$$

где $V(\lambda,\mu) := T_1^{-1}(\lambda,\mu)S_1(\lambda,\mu)$.

Покажем, что так построенное разложение (6.2.22) обладает мвойствами ∇V-2 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$.

С учетом свойств ΔW-2 факторизации обоснованию подлежит только утверждение, что $V(\lambda,\mu)$ есть полиномиальная матрица и ее непрерывный спектр состоит из прямых $\mu=\mu_+$, если последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$.

Сначала докажем, что $V(\lambda,\mu)$ есть полиномиальная матрица. Для этого проанализируем равенство (6.2.22). Левая часть (6.2.22) по условию есть двухпараметрическая полиномиальная матрица. Следовательно и правая часть (6.2.22) является таковой. Но отсутствие полюсов возможно только при выполнении одного из двух

- или регулярная матрица $T_1(\lambda,\mu)$ не содержит конечного непрерывного спектра, т.е. является унимодулярной;
- или конечный непрерывный спектр по крайней мере одной из матриц

$$[-S_1(\lambda,\mu), T_1(\lambda,\mu)], \quad [T_1(\lambda,\mu), \nabla(\lambda,\mu)]^B$$

содержит спектр матрицы $T_1(\lambda,\mu)$ Но второе утверждение невозможно, так как по построению конечный спектр $T_1(\lambda,\mu)$ состоит разве лишь из собственных значений вида $\mu=\mu_{i*}$. При этом по свойствам несократимой факторизации матрица $[-S_1(\lambda,\mu), T_1(\lambda,\mu)]$ не имеет конечного непрерывного спектра. По построению конечный спектр матрицы $\nabla(\lambda,\mu)$ не имеет $\mu=\mu_{i*}$ своими одномерными собственными значениями, так что и матрица $[T_1(\lambda,\mu), \nabla(\lambda,\mu)]^B$ не имеет конечного непрерывного спектра.

Из сказанного следует, что матрица $T_1(\lambda,\mu)$ является унимодулярной. Отсюда $V(\lambda,\mu) := T_1^{-1}(\lambda,\mu)S_1(\lambda,\mu)$ есть полиномиальная матрица.

Остается установить, что конечный непрерывный спектр $V(\lambda,\mu)$ может состоять только из собственных прямых $\mu=\mu_*$, если последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$.

Действительно, по построению

$$V(\lambda,\mu)=\frac{1}{\varphi(\mu)}(\mu)D(\lambda,\mu),\qquad D(\lambda,\mu)=P(\lambda,\mu)B_\rho(\lambda,\mu),$$

т.е. конечный непрерывный спектр $V(\lambda,\mu)$ содержится в спектре $D(\lambda,\mu)$ и, следовательно, может состоять разве лишь из собственных прямых $\mu=\mu_*$.

Из равенства

$$F(\lambda,\mu)=\nabla(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu),$$

установленного выше, и свойств входящих в него матриц следует, что конечный спектр $F(\lambda,\mu)$ состоит из объединения спектров матриц $\nabla(\lambda,\mu)$ и $V(\lambda,\mu)$. Отсюда с учетом, что $\nabla(\lambda,\mu)$ не имеет в своем спектре прямых $\mu=\mu_*$, следует, что спектр $V(\lambda,\mu)$ содержит прямые $\mu=\mu_*$, принадлежащие мпектру $F(\lambda,\mu)$.

Этим завершается обоснование алгоритма построения ∇V-2 факторизации.

6.2.4. UTV-алгоритм и его обоснование.

UTV-алгоритм реализует UTV факторизацию (минимальную факторизацию) вида (6.2.3) двухпараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda,\mu)$ и основан на ∇V-2 алгоритме.

Для построения минимальной факторизации требуется выполнить следующие операции

(1) Найти ∇V-2 факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$

$$F(\lambda,\mu)=\nabla(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu)$$

использовав алгоритм п. 6.2.3.

(2) Найти ∇V-2 факторизацию $\rho\times m$ матрицы $\nabla^T(\lambda,\mu)$, транспонированной к матрице $\nabla(\lambda,\mu)$. Имеем

$$\nabla^T(\lambda,\mu)=\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)\widetilde{V}(\lambda,\mu). \tag{6.2.23}$$

Здесь $\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная регулярная $\rho\times\rho$ матрица, непрерывный спектр которой совпадает с конечным непрерывным спекторм $\nabla(\lambda,\mu)$, а следовательно, и $F(\lambda,\mu)$, за исключением собственных прямых $\mu=\mu_*$, если последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$. Конечный непрерывный спектр матрицы $\widetilde{V}^T(\lambda,\mu)$ состоит из прямых $\mu=\mu_-$, входящих в спектр $F(\lambda,\mu)$. Конечный дискретный спектр $\widetilde{V}(\lambda,\mu)$ и ее нуль-пространство из левых полиномиальных решений совпадает с левым дискретным спектром $F(\lambda,\mu)$ и с нуль-пространством из левых полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$. Обозначим $T(\lambda,\mu) := \widetilde{\nabla}^T(\lambda,\mu)$, $U(\lambda,\mu) := \widetilde{V}^T(\lambda,\mu)$. Тогда с учетом (6.2.23), получим искомую минимальную факторизацию

$$F(\lambda,\mu)=U(\lambda,\mu)T(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu).$$

Замечание 1. Как правило, заранее неизвестно принадлежность одномерных собственных значений вида $\mu=\mu_+$ спектру $F(\lambda,\mu)$ и потому нужны дополнительные исследования. Следующие рассуждения могут быть полезными для установления принадлежности $\mu=\mu_*$ спектру $F(\lambda,\mu)$.

Известно, что непрерывный спектр $\Delta(\lambda,\mu)$ в ΔW-2 разложении $F(\lambda,\mu)$ состоит из объединения спектров матрицы $\widehat{W}(\lambda,\mu)$ и конечного спектра $F(\lambda,\mu)$ (см. разложение (6.2.1).

Увеличение r-кратности $\mu=\mu_*$ как собственного значения матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$ по сравнению с кратностью $\overline{r}$, как собственного значения $W(\lambda,\mu)$, свидетельствуют о принадлежности $\mu=\mu_*$ спектру матрицы $F(\lambda,\mu)$. Заметим, что число $\overline{r}$ определяется в процессе алгоритма ΔW-2 факторизации (6.2.1); число r определяется в процессе ΔW-1 разложения $\Delta(\lambda,\mu_*)$ при исчерпывании $\mu=\mu_*$ из матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$.

Все сказанное аналогично распространяется и на собственные значения вида $\mu=\mu_*\equiv\mu_-$.

Замечание 2. Понятие минимальной факторизации, введенное выше для двухпараметрической полиномиальной матрицы, можно по аналогии распространить на однопараметрические полиномиальные $m\times n$ матрицы $D(\lambda)$ и постоянные $m\times n$ матрицы A.

Минимальной факторизацией (UTV-факторизацией) полиномиальной $m\times n$ матрицы $D(\lambda)$ ранга $\rho\leqslant\min(m,n)$ назовем ее представление в виде

$$D(\lambda)=U(\lambda)T(\lambda)V(\lambda), \tag{6.2.24}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

(а) $T(\lambda)$ есть $\rho\times\rho$ регулярная полиномиальная матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$.

(б) $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ суть полиномиальные матрицы ранга ρ размеров $m\times\rho$ и $\rho\times n$ соответственно, не имеющие конечных спектров.

(в) Левые (правые) нуль-пространства из полиномиальных решений матриц $D(\lambda)$ и $U(\lambda)$ (матриц $D(\lambda)$ и $V(\lambda)$) совпадают.

Построение минимальной факторизации $D(\lambda)$ реализуется с помощью ΔW-1 алгоритма, наметим основные шаги.

Сначала ΔW-1 алгоритм применяется к матрице $D(\lambda)$. Имеем

$$D(\lambda)W_1(\lambda) = [\Delta_1(\lambda), 0] \tag{6.2.25}$$

или

$$D(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda). \tag{6.2.26}$$

Здесь $W_1(\lambda)$ – унимодулярная матрица, $V(\lambda)$ матрица $\rho \times n$, составленная из первых ρ-строк унимодулярной матрицы $W_1^{-1}(\lambda)$; $\nabla(\lambda) \equiv \Delta_1(\lambda)$ есть $m\times\rho$ полиномиальная матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром матрицы $D(\lambda)$.

Затем ΔW-1 алгоритм применяется к матрице $\nabla^T(\lambda)$. Имеем

$$\nabla^T(\lambda)W_2(\lambda) = [\nabla_2(\lambda), 0] \tag{6.2.27}$$

или

$$\nabla^T(\lambda) = \nabla_2(\lambda)V_2(\lambda), \tag{6.2.28}$$

где $\nabla_2(\lambda)$ есть $\rho \times \rho$ регулярная полиномиальная матрица; $V_2(\lambda)$ есть $\rho\times m$ матрица, составленная из первых ρ сторк унимодулярной матрицы $W_2^{-1}(\lambda)$. Обозначим $U(\lambda) := V_2^T(\lambda)$, $T(\lambda) := \nabla_2^T(\lambda)$. Тогда равенство (6.2.26) с учетом (6.2.28) примет вид искомой минимальной факторизации:

$$D(\lambda) = U(\lambda)T(\lambda)V(\lambda). \tag{6.2.29}$$

Отсутствие конечных спектров у матриц $V(\lambda)$ и $U(\lambda)$ следует из способа их построения, т.е. из унимодулярности матриц $W_1^{-1}(\lambda)$ и $W_2^{-1}(\lambda)$.

Справедливость свойства (в) следует из вида (6.2.29) полученной факторизации.

Под минимальной факторизацией постоянной $m \times n$ матрицы A ранга $\rho \leqslant \min(m,n)$ будем понимать ее представление в виде

$$A = UTV, \tag{6.2.30}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

(а) T есть $\rho\times\rho$ неособенная матрица, сингулярные числа которой совпадают с ненулевыми сингулярными числами матрицы A.

(б) Матрицы U и V, ранга ρ размеров $m \times \rho$ и $\rho \times n$ соответственно, составлены из ортонормированных столбцов и сторк, так что

$$U^T U = I_\rho, \quad V V^T = I_\rho.$$

Известно, что построение разложения (6.2.30) может быть осуществлено, например, с помощью алгоритма SVD, реализующего сингулярное разложение матрицы A, или с помощью нормализованного разложения (другими словами, QR-разложения с перестановками).

В случае применения SVD матрица T в (6.2.30) будет диагональной, так что ее ненулевые элементы совпадают с сингулярными числами A.

В случае применения нормализованного разложения, матрица T в (6.2.30) будет треугольной.

§6.3. Решение спетральных задач для двухпараметрической полиномиальной матрицы

Ниже рассматривается решение спектральных задач двухпараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda, \mu)$ ранга $\rho \leqslant \min(m, n)$. Предлагаются алгоритмы вычисления минимального базиса нуль-пространства из полиномиальных решений $F(\lambda, \mu)$, дискретного спектра $F(\lambda, \mu)$ и алгоритм выделения регулярного ядра из $F(\lambda, \mu)$

6.3.1. Построение минимального базиса.

Для определенности будем рассматривать построение минимального базиса нуль-пространства из правых полиномиальных решений $F(\lambda, \mu)$. Вычисление минимального базиса левого нуль-пространства проводится аналогично, если вместо $F(\lambda, \mu)$ взять матрицу $F^T(\lambda, \mu)$.

Полиномиальный базис назовем минимальным, если матрица, составленная из его столбцов, не имеет ни конечного ни бесконечного непрерывного спектра.

Для построения минимального базиса нуль-пространства из правыз полиномиальных решений двухпараметрической матрицы $F(\lambda, \mu)$ следует, используя ΔW-2 алгоритм, найти регулярную матрицу $W(\lambda, \mu)$, реализующую ΔW-2 факторизацию матрицы $F(\lambda, \mu)$. Имеем

$$F(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), 0].$$

Матрицу $W(\lambda,\mu)$ запишем в блочном виде $W(\lambda,\mu)=[W_1(\lambda,\mu), W_0(\lambda,\mu)]$, где столбцы $n\times(n-\rho)$ матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ образуют базис, который может отличаться от искомого минимального базиса правого нуль-пространства из полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$ разве лишь присутствием прямых $\mu=\mu_{i+}$, порождающих конечный дискретный спектр (λ_{i+},μ_{i+}) матрицы $F(\lambda,\mu)$ и собственных значений вида (∞,μ) и (λ,∞). Исключение прямых $\mu=\mu_{i+}$ из спектра $W_0(\lambda,\mu)$ осуществляется с помощью алгоритма относительной факторизации (см. гл. 8), примененного к матричному полиному

$$W_0^T(\lambda,\mu):=P_\sigma(\mu)\lambda^\sigma+\ldots+P_0(\mu)$$

и сводится к выполнению следующих шагов

(1) Для матричных полиномов $P_k(\mu)$, $k=0,\ldots,s$, вычисляется регулярная матрица $\nabla(\mu)$, т.е. их левый общий наибольший делитель и разложение вида

$$P_k(\mu)=\nabla(\mu)\,V_k(\mu),\quad k=0,1,\ldots,\sigma$$

где $\nabla(\mu)$ – матрица спектр которой состоит из исчерпываемых прямых $\mu=\mu_{i*}$ $V_k(\mu)$, $k=0,\ldots,s$, есть последовательность слева взаимно простых матричных полиномов, так что матрица $V(\mu):=[V_s(\mu),\ldots,V_0(\mu)]$ не имеет в своем спектре исчерпываемых прямых $\mu=\mu_{i+}$.

(2) Матрица $W_0(\lambda,\mu)$ записывается в виде

$$W_0(\lambda,\mu)=U_0(\lambda,\mu)T(\mu) \tag{6.3.1}$$

где

$$U_0(\lambda,\mu):=\sum_{k=0}^{\sigma}V_k^T(\mu)\lambda^k,\quad T(\mu)=\nabla^T(\mu).$$

Столбцы $U_0(\lambda,\mu)$ образуют базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$ и по построению не имеет в своем спектре прямых $\mu=\mu_{i+}$.

Исключение из спектра матрицы $U_0(\lambda,\mu)$ собственных значений вида (∞,μ) и (λ,∞) требует выполнения следующих шагов.

(3) К матрице $U_0(\lambda,\mu)$ записанной в виде матричного полинома

$$U_0(\lambda,\mu)=\sum_{k=0}^{\sigma}V_k^T(\mu)\lambda^k$$

применяется алгоритм ΔW-2 факторизации (λ – ведущий параметр). Имеем

$$U_0(\lambda,\mu)W^{(1)}(\lambda,\mu)=\Delta^{(1)}(\lambda,\mu).$$

Нулевой блок в правой части этого разложения будет отсутствовать, так как $U_0(\lambda,\mu)$ имеет полный столбцовый ранг. Матрицы $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ не будет иметь собственных значений вида (∞,μ), если даже они присутствуют в матрице $W_0(\lambda,\mu)$, так как по свойствам ΔW-2 факторизации матрица $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ может иметь только конечный по λ спектр. Таким образом столбцы матрицы $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ образуют базис, не содержащий ни конечных собственных значений $\mu=\mu_{i*}$, ни бесконечного собственного значения (∞,μ). При этом наличие бесконечного собственного значения (λ,∞) у матрицы $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ не исключается.

(4) Для удаления собственного значения (λ,∞) матрица $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ записывается по степеням параметра μ.

$$\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)=P_r^{(1)}(\lambda)\mu^r+\ldots+P_0^{(1)}(\lambda).$$

Принимая μ в качестве ведущего параметра, к $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ применяется ΔW-2 алгоритм. В результате будет построено разложение вида

$$\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)W^{(2)}(\lambda,\mu)=\Delta^{(2)}(\lambda,\mu).$$

При этом столбцы матрицы $\Delta^{(2)}(\lambda,\mu)$ образуют искомый минимальный базис правого нуль-пространства $F(\lambda,\mu)$, т.е. не содержащий ни конечного, ни бесконечного непрерывного спектра. Так что спектр $\Delta^{(2)}(\lambda,\mu)$ состоит только из нульмерных собственных значений матрицы $F(\lambda,\mu)$. В дальнейшем так построенный базис будем по-прежнему обозначать $W_0(\lambda,\mu)$.

Замечание. Приведенный выше алгоритм исчерпывания из базиса $W_0(\lambda,\mu)$, $(W_0(\lambda,\mu)=\Delta^{(2)}(\lambda,\mu))$ собственных значений (∞,μ) и (λ,∞) нуждается в доказательстве. Нам не удалось доказать, что выполнение шага (4) не приведет к появлению исключенного на шаге (3) собственного значения (∞,μ). Этот вопрос остается открытым.

Построенный выше базис $W_0(\lambda,\mu)$ естественней назвать относительно минимальным, так как мы гарантируем отсутствие в его спектре конечных непрерывных собственных значений и бесконечного собственного значения вида (∞,μ) или вида (λ,∞). Заметим, что в дальнейшем при вычислении конечного дискретного спектра двухпараметрической матрицы и при решении других задач алгебры, основанных на применении ΔW-2 алгоритма, достаточно иметь базис из полиномиальных решений двухпараметрических матриц, не имеющий только конечного непрерывного спектра, т.е. базис из столбцов матрицы $U_0(\lambda, \mu)$ построенный выполнением операций (1) и (2) выше описанного алгоритма.

6.3.2. Вычисление дискретного спектра.

Пусть $F(\lambda, \mu)$ есть $m \times n$ двухпараметрическая полиномиальная матрица, нульмерные собственные значения которой следует вычислить. Для определенности будем говорить о вычислении нульмерных собственных значений, порожденных правыми полиномиальными решениями $F(\lambda, \mu)$. Используя алгоритм построения минимального базиса из п. 6.3.1, находим матрицу $W_0(\lambda, \mu) \equiv U_0(\lambda, \mu)$ образованный ее столбцами, так что спектр $W_0(\lambda, \mu)$ состоит только из нульмерных собственных значений и задача состоит в их вычислении. Ниже предлагаются два способа вычисления правых нульмерных собственных значений (λ_{ji}, μ_{i+}) матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Первый способ предполагает, что прямые $\mu = \mu_{i+}$, порождающие дискретный спектр матрицы $W_0(\lambda, \mu)$, известны.

Для каждого фиксированного значения $\mu_* = \mu_{i+}$ вычисляется однопараметрическая полиномиальная матрица $W_0(\lambda, \mu_*) \equiv U_0(\lambda, \mu_*)$ полного столбцового ранга и находятся все ее собственные значения λ_{j*}. Тогда пары $(\lambda_{j*}\mu_*)$ дадут искомые конечные нульмерные собственные значения матрицы $W_0(\lambda, \mu)$, а в силу Теоремы 6.5 и матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Второй способ требует от уравнения

$$W_0(\lambda, \mu)x = 0 \tag{6.3.2}$$

перейти к решению эквивалентного ему уравнения

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda = 0 \tag{6.3.3}$$

Здесь $W_0(\lambda, \mu)i = C_\sigma(\mu)\lambda^\sigma + \ldots + C_0(\mu)$, $\mathfrak{A}(\mu) = [C_\sigma(\mu), \ldots, C_0(\mu)]$ есть однопараметрическая полиномиальная $n \times (n-\rho)(\sigma+1)$ матрица, $\Lambda := (\lambda^\sigma x, \ldots, x)^T$ вектор, записанный в блочном виде.

Из (6.3.3) следует, что вектор Λ принадлежит нуль-пространству (обозначим его $Q(\mu)$) матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. Очевидно, $Q(\mu)$ есть объединение минимального базиса из правых полиномиальных решений $\mathfrak{A}(\mu)$ и базисов инвариантных подпространств, соотсветствующих собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_t$ регулярной части

$\mathfrak{A}(\mu)$. Отсюда

$$Q(\mu) = \begin{cases} W(\mu) & \text{при} \quad \mu \neq \mu; \\ S_{\mu_i} \cup W(\mu_i) & \text{при} \quad \mu = \mu_i. \end{cases}$$

Здесь S_{μ_i} – подпространство из собственных векторов, соответствующих собственному значению μ_i матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$.

Запишем $Q(\mu)$ в блочном виде $Q(\mu) = [Q_1(\mu), \dots, Q_{\sigma+1}(\mu)]^B$, где каждый блок $Q_i(\mu)$ имеет $(n-\rho)$ строк. Рассмотрим уравнение

$$[Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)]y = 0, \tag{6.3.4}$$

где $Q_+(\mu) = [Q_1(\mu), \dots, Q_\sigma(\mu)]^B$, $Q_-(\mu) = [Q_2(\mu), \dots, Q_{\sigma+1}(\mu)]^B$. Пучок $D(\lambda, \mu) =: Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)$ обозначим

$$D(\lambda, \mu) := W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu) \quad \text{при} \quad \mu \neq \mu_i \quad W_+(\mu) := Q_1(\mu),$$
$$W_-(\mu) := Q_-(\mu) \quad D(\lambda, \mu) = Q^+ - \lambda Q_- \quad \text{при} \quad \mu = \mu_i$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 6.7. *Пучок $D(\lambda, \mu)$ имеет полный столбцовый ранг и не содержит непрерывного спектра.*

Доказательство проведем от противного. Пусть $u(\lambda, \mu)$ есть правое полиномиальное решение $D(\lambda, \mu)$ так что при любых λ и μ выполняется равенство

$$[Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)]u(\lambda, \mu) = 0.$$

Это равенство запишем в развернутом виде. Обозначив $Q_{\sigma+1}(\mu)\ u(\lambda, \mu) \equiv V(\lambda, \mu)$, имеем

$$Q_{\sigma+1}(\mu)u(\lambda, \mu) = V(\lambda, \mu)$$
$$Q_\sigma(\mu)u(\lambda, \mu) = \lambda Q_{\sigma+1}(\mu)u(\lambda, \mu) \equiv \lambda V(\lambda, \mu)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Q_1(\mu)u(\lambda, \mu) = \lambda Q_2(\mu)u(\lambda, \mu) = \dots = \lambda^\sigma V(\lambda, \mu).$$

Отсюда следует справедливость равенства

$$\mathfrak{A}(\mu)[\lambda^\sigma V(\lambda, \mu), \dots, V(\lambda, \mu)]^T = 0$$

или, что то же,

$$W_0(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu) = 0,$$

что невозможно, так как $W_0(\lambda, \mu)$ имеет полный столбцовый ранг.

Доказательство отсутствия нерпрерывного спектра у пучка $D(\lambda, \mu)$ проводится по тому же плану, как и доказательство отсутствия правых полиномиальных решений с учетом, что матрица $W_0(\lambda, \mu)$ не имеет конечного непрерывного спектра.

Теорема 6.8. *Между решениями уравнений* (6.3.3) *и* (6.3.4) *существует взаимооднозначное соответствие.*

Пусть (λ_*, μ_*, x_*) есть решение (6.3.2), т.е.

$$\mathfrak{A}(\mu_*)\Lambda_* = 0.$$

Отсюда столбцы $Q(\mu_*)$ образуют не тревиальное множество, т.е. существует y_* такое, что

$$Q(\mu_*)y_* = \Lambda_*. \tag{6.3.5}$$

Учитывая строение правой части равенства (6.3.4), имеем

$$[Q_+(\mu_*) - \lambda_* Q_-(\mu_*)]y_* = 0,$$

т.е. набор (λ_*, μ_*, y_*) удовлетворяет (6.3.4). Обозначим $x_* := Q_{\sigma+1}y_*$. Учитывая строение $Q_+(\mu_*)$ и $Q_-(\mu_*)$ из (6.3.4), имеем цепочку равенств при $\mu = \mu_*$:

$$\begin{aligned}
&Q_{\sigma+1}(\mu_*)y_* = x_* \\
&Q_\sigma(\mu_*)y_* = \lambda_* Q_{\sigma+1}(\mu_*)y_* = \lambda_* x_* \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&Q_1(\mu_*)y_* = \lambda_* Q_2(\mu_*)y_* = \ldots = \lambda^{\sigma+1}x_*.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что вектор $\lambda_* = (\lambda_*^\sigma x_*, \ldots, x_*)^T$ принадлежит $Q(\mu_*)$, а следовательно,

$$\mathfrak{A}(\mu_*)\Lambda_* = 0$$

или, что то же, $W_0(\lambda_*, \mu_*)x_* = 0$.

Следствие 6.9. *Нульмерные собственные значения матрицы* $W_0(\lambda, \mu)$ *и пучка* $Q_+(\mu) - \lambda Q_-(\mu)$ *совпадают.*

Обозначим $\mathfrak{A}_1(\mu) = [-W_-(\mu), W_+(\mu)]$. Тогда $Q^{(1)}(\mu) = [Q_+^{(1)}(\mu), Q_-^{(1)}(\mu)]^B$ есть матрица, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}_1(\mu)$, так что

$$Q^{(1)}(\mu) = \begin{cases} W^{(1)}(\mu) & \text{при} \quad \mu \neq \mu_i; \\ S_{\mu_i}^{(1)} \cup W(\mu_i) & \text{при} \quad \mu = \mu_i. \end{cases}$$

μ_i – собственное значение $\mathfrak{A}_1(\mu)$; $W^{(1)}(\mu) \equiv [W_+^{(1)}(\mu), W_-^{(1)}(\mu)]^B$ – матрица с блоками $W_+^{(1)}(\mu)$, $W_-^{(1)}(\mu)$ равных размеров, столбцы которой образуют минимальный базис из правых полиномиальных решений $\mathfrak{A}(\mu)$; $S_{\mu_i}^{(1)}$ – подпространства из собственных векторов, соответствующих собственному значению μ_i матрицы $\mathfrak{A}_1(\mu)$

$$Q^{(1)} \equiv Q(\mu_i) = [Q_+^{(1)}, Q_-^{(1)}]^B = \ker \mathfrak{A}(\mu_i).$$

Введем в рассмотрение уравнения

$$\mathfrak{A}_1(\mu)\Lambda_1 = 0 \quad \Lambda_1 = (\lambda x, x)^T \tag{6.3.6}$$

$$[Q_+^{(1)}(\mu) - \lambda Q_-^{(1)}(\mu)]y_1 = 0 \tag{6.3.7}$$

Справедливы утверждения.

Теорема 6.10. *Между решениями уравнений* (6.3.6) *и* (6.3.7) *существует взаимнооднозначное соответствие.*

Доказательство проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 6.8.

Следствие 6.11. *Спектр пучка* $Q_+^{(1)}(\mu) - \lambda Q_-^{(1)}(\mu)$ *содержится в спектре матрицы* $W_0(\lambda, \mu)$.

Справедливость следует из теоремы 6.10 и следствия 6.9.

Теорема 6.12. 1^0 *Для того, чтобы пара чисел* (λ_*, μ_*) *была нульмерным собственным значением матрицы* $W_0(\lambda, \mu)$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

а) *число* μ_* *является собственным значением полиномиальной матрицы* $\mathfrak{A}(\mu) = [C_\sigma, \dots, C_0]$, *число* λ_* *есть собственное значение пучка* $Q_+ - \lambda Q_-$;

б) *пара чисел* (λ_*, μ_*) *является нульмерным собственным значением пучка* $W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$.

2^0 *Для того, чтобы пара чисел* (λ_*, μ_*) *была нульмерным решением пучка* $W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

в) *число* μ_* *есть собственное значение полиномиальной матрицы* $\mathfrak{A}_1(\mu) = [-W_-(\mu), W_+(\mu)]$; *число* λ_* *есть собственное значение пучка* $Q_+^{(1)} - \lambda Q_-^{(1)}$, *где* $Q_+^{(1)}$ *и* $Q_-^{(1)}$ – *блоки матрицы* $Q^{(1)} = [Q_+^{(1)}, Q_-^{(1)}]^B = \ker \mathfrak{A}_1(\mu_*)$, *составленные из первых* m_1 *и последних* m_1 *строк матрицы* $Q^{(1)}(m_1 = n_0)$;

г) *пара чисел* (λ_*, μ_*) *является нульмерным собственным значением пучка* $W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu)$, *где* $W_+^{(1)}(\mu)$ *и* $W_-^{(1)}(\mu)$ – *блоки равных размеров матрицы* $W^{(1)}(\mu) = [W_+^{(1)}(\mu), W_-^{(1)}(\mu)]^B$, *столбцы которой* *образуют минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы* $\mathfrak{A}_1(\mu)$.

Справедливость утверждений следует из теоремы 6.8 и 6.10, следствий 6.9 и 6.11.

Перейдем к описанию алгоритма вычисления всех конечных нульмерных собственных значений матрицы $F(\lambda,\mu)$ (или что то же, матрицы $W_0(\lambda,\mu)$. Для этого уравнение

$$W_0(\lambda,\mu)x = 0, \quad W_0(\lambda,\mu) = C_\sigma(\mu)\lambda^\sigma + \ldots + C_0$$

запишем в эквивалентном виде

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda = 0, \tag{6.3.8}$$

где $\mathfrak{A}(\mu) = [C_\sigma(\mu),\ldots,C_0(\mu)]$, $\Lambda = (\lambda^\sigma x,\ldots,x)^T$.

Алгоритм решения уравнения (6.3.8) требует выполнения следующих операций.

(1). Находится регулярная часть матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$ и вычисляются все ее собственные значения $\mu_1,\ldots,\mu_r$.

(2). Для каждого фиксированного $\mu_i = \mu_*$ вычисляется матрица $\mathfrak{A}(\mu_*)$ и ортогональный базис Q ее правого нуль-пространства.

(3). Формируется пучок $Q_+ - \lambda Q_-$, где Q_+ и Q_- – матрицы, составленные из $n_0 = \sigma(n-\rho)$ первых строк и n_0 последних строк матрицы $Q^{(0)}$ соответственно.

(4). Вычисляются все собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ пучка $Q_+ - \lambda Q_-$. Пары (λ_{ij},μ_i) $(i=1,\ldots,r,\, j=1,\ldots,p)$ так составленных чисел являются нульмерными собственными значениями матрицы $W_0(\lambda,\mu)$.

(5). Находится минимальный базис $W(\mu)$ матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. Формируется $m_1\times 2n_1$ $(n_1 = \dim W(\mu),\, m_1 = n_0)$ матрица

$$\mathfrak{A}_1(\mu) = [-W_+(\mu), W_-(\mu)].$$

Здесь $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$ – блоки, составленные из первых n_0 и последних n_0 строк матрицы $W(\mu)$ соответственно.

(6). Находится регулярная часть матрицы $\mathfrak{A}_1(\mu)$ и вычисляются все ее собственные значения $\mu_1,\ldots,\mu_{r1}$.

(7). Для каждого фиксированного $\mu_i = \mu_*$ вычисляется постоянная матрица $\mathfrak{A}_1(\mu_*)$ и ее правое нуль-пространство $Q^{(1)}$.

(8). Формируется пучок

$$Q_+^{(1)} - \lambda Q_-^{(1)}$$

и находятся все его собственные значения λ_{*j} $(j = 1, \dots, p_*)$. Пары чисел (λ_{ij}, μ_i) $(i = 1, \dots, r_1,\ j = 1, \dots, p_1)$ являются нульмерными собственными значениями матрицы $W_0(\lambda, \mu)$.

(9). Находится минимальный базис

$$W^{(1)}(\mu) = [W_+^{(1)}(\mu), W_-^{(1)}(\mu)]$$

правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}_1(\mu)$ и формируется новая матрица

$$\mathfrak{A}_2(\mu) = [-W_-^{(1)}(\mu), W_+^{(1)}(\mu)].$$

Здесь $W_+^{(1)}(\mu)$ и $W_-^{(1)}(\mu)$ – блоки размеров $m_2 \times n_2$ $(m_2 = m_1, n_2 = \dim W^{(1)}(\mu))$, составленная из первых m_2 и последних m_2 строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

Шаги (6)–(9) повторяются с матрицей $\mathfrak{A}_2(\mu)$.

Построение матриц $\mathfrak{A}_{k+1}(\mu) = [-W_-^{(k)}(\mu), W_+^{(k)}(\mu)]$ $(k = 0, 1, ..., l)$ и шаги (6)–(9) продолжаются до тех пор, пока на некотором шаге l будет выполняться $n_l = m_{l+1} = 0$.

Объединение так вычисленных пар чисел (λ_{ij}, μ_{ji}) даст весь конечный дискретный спектр матрицы $W_0(\lambda, \mu)$, а следовательно, и исходной матрицы $F(\lambda, \mu)$.

6.3.3. Выделение регулярного ядра.

Регулярным ядром двухпараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda, \mu)$ ранга ρ назовем регулярную $\rho \times \rho$ матрицу, спектр которой совпадает с конечным непрерывным спектром $F(\lambda, \mu)$.

Для вычисления регулярного ядра $F(\lambda, \mu)$ предлагаются следующие алгоритмы.

Первый алгоритм требует выполнения следующих операций.

(1) К матрице $F(\lambda, \mu)$ применяется ΔW-2 алгоритм для построения матрицы $\Delta(\lambda, \mu)$, спектр которой содержит конечный по λ спектр исходной матрицы. Имеем

$$F(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), 0] \tag{6.3.9}$$

(2) Из матрицы $\Delta(\lambda, \mu)$ исчерпываются посторонние, порожденные правыми полиномиальными решениями $F(\lambda, \mu)$, собственные значения, т.е. собственные прямые вида $\mu = \mu_+$, входящие в спектр $\widehat{\sigma}[W]$ матрицы $W(\lambda, \mu)$. Заметим, что эти собственные прямые определяются при выполнении разложения (6.3.9) и

не требуют вычисления матрицы $W(\lambda,\mu)$. Здесь через $\widehat{\sigma}[W]$ обозначен спектр $W(\lambda,\mu)$, не принадлежащий спектру $W_0(\lambda,\mu)$.

Для исчерпывания требуется выполнить следующие шаги.

(2i) Для фиксированного $\mu_* = \mu$ вычисляется $\Delta(\lambda,\mu_*)$ и ее ΔW-1 разложение

$$\Delta(\lambda,\mu_*)U_1(\lambda) = [\nabla_1(\lambda), \mathbb{O}],$$

где $U_1(\lambda)$ – унимодулярная матрица, $\mathbb{O}$ – нулевая $\rho\times(\rho-\rho_1)$ матрица, $\rho_1 = \operatorname{rank}\Delta(\lambda,\mu_*)$.

(2ii) Вычисляется матрица $\Delta(\lambda,\mu_*)U_1(\lambda)$.

(2iii) Последние $\rho-\rho_1$ столбцы вычисленной матрицы делятся на общий делитель $(\mu-\mu_*)$. В результате будет построена двухпараметрическая полиномиальная матрица

$$\Delta_1(\lambda,\mu) = \Delta(\lambda,\mu)U_1(\lambda)d_1^{-1}, \quad d_1 = \operatorname{diag}\{I_{\rho_1}(\mu-\mu_*)I_{\rho-\rho_1}\},$$

не содержащая собственного значения (λ,μ_*). Все прочие собственные значения $\Delta(\lambda,\mu)$ и $\Delta_1(\lambda,\mu)$ совпадают; $\rho_1 = \operatorname{rank}\Delta(\lambda,\mu_*)$.

(3) Процесс исчерпывания следующего собственного значения $\mu=\mu_2$ аналогично проводится для матрицы $\Delta_1(\lambda,\mu)$.

В результате q исчерпывания (шаги 2i–2iii) будет построена матрица $\Delta_q(\lambda)$ размеров $n\times\rho$ ранга ρ, спектр которой и левые полиномиальные решения совпадают с таковыми матрицы $F(\lambda,\mu)$, за исключением* собственных прямых $\mu=\mu_*$, если они присутствуют в спектре матрицы $F(\lambda,\mu)$.

(4) Находится ΔW-2 разложение матрицы $\Delta_q^T(\lambda,\mu)\equiv\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu)$

$$\widetilde{\Delta}(\lambda,\mu)\widetilde{W}(\lambda,\mu) = [\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu), \mathbb{O}],$$

где $\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)$ есть $\rho\times\rho$ матрица, отличающаяся от искомого регулярного блока матрицы $F(\lambda,\mu)$ разве лишь присутствием посторонних собственных прямых вида $\mu=\mu_-$ исчерпывание которых осуществляется аналогичного шагу (2), если в качестве исходной взять матрицу $\widetilde{\nabla}(\lambda,\mu)$.

В результате исчерпывания всех посторонних собственных значений будет получена регулярная матрица, спектр которой совпадает с непрерывным конечным спектром исходной матрицы $F(\lambda,\mu)$ за исключением прямых вида $\mu=\mu_+$ и $\mu=\mu_-$, если последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$ При выделении собственных

*В процессе исчерпывания из $\Delta(\lambda,\mu)$ посторонних собственных значений происходит исчерпывание всех прямых вида $\mu=\mu_*$ в том числе принадлежащих спектру $F(\lambda,\mu)$.

прямых вида $\mu = \mu_*$ в первом алгоритме предложен способ последовательного исчерпывания.

Второй алгоритм выделения регулярного ядра матрицы $F(\lambda, \mu)$ не требует предварительного вычисления исчерпываемых собственных прямых и позволяет регулярное ядро получать в факторизованном виде. Для этого требуется выполнить следующие операции.

(1) К матрице $F(\lambda, \mu)$ применяется алгоритм ΔW-2 факторизации для построения матрицы $\Delta(\lambda, \mu)$.

(2) К матрице $\Delta^T(\lambda, \mu)$ применяется алгоритм относительной факторизации (см. гл. 8), позволяющий получить разложение вида

$$\Delta^T(\lambda, \mu) = F_1(\mu) F_2(\lambda) F_{12}(\lambda, \mu).$$

Здесь $F_i(v)$ – однопараметрическая полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица, $F_{12}(\lambda, \mu)$ – двухпараметрическая $\rho \times m$ матрица ранга ρ, не имеющая в своем спектре прямых вида $\mu = \mu_*$, $\lambda = \lambda_*$.

(3) К матрице $F_{12}(\lambda, \mu)$ полного строчного ранга применяется алгоритм ∇V-2 факторизации для построения разложений вида

$$F_{12}(\lambda, \mu) = \nabla(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu)$$

где $\nabla(\lambda, \mu)$ регулярная $\rho \times \rho$ двухпараметрическая полиномиальная матрица, конечный спектр которой совпадает со спектром $F_{12}(\lambda, \mu)$; $V(\lambda, \mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $\rho \times m$ матрица, не имеющая конечного непрерывного спектра: спектр $V(\lambda, \mu)$ совпадает с левым дискретным спектром $F(\lambda, \mu)$.

В результате выполнения операций (1)–(3) будет построено разложение вида

$$\Delta(\lambda, \mu) = U(\lambda, \mu) T(\lambda, \mu)$$

где

$$U(\lambda, \mu) := V^T(\lambda, \mu);$$

$T(\lambda, \mu) := \nabla^T(\lambda, \mu) F_2^T(\lambda) F_1^T(\mu)$ есть регулярное ядро $F(\lambda, \mu)$, представленное в факторизованном виде, так что конечный непрерывный спектр $F(\lambda, \mu)$ совпадает с корнями уравнений

$$\det F_1(\mu) = 0; \quad \det F_2(\lambda) = 0; \quad \det \nabla(\lambda, \mu) = 0.$$

Третий алгоритм построения регулярного ядра матрицы $F(\lambda, \mu)$ состоит в применении к $F(\lambda, \mu)$ описанного в п.6.2.4 алгоритма UTV-2 факторизации, позволяющего получить разложение вида

$$F(\lambda, \mu) = U(\lambda, \mu) T(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu)$$

где $T(\lambda,\mu)$ есть $\rho \times \rho$ регулярная двухпараметрическая матрица конечный спектр которой совпадает с конечным непрерывным спектром $F(\lambda,\mu)$, за сиключением быть может прямых $\mu = \mu_+$ и $\mu = \mu_-$, если последние входят в спектр $F(\lambda,\mu)$.

Глава 7. Решение спектральных задач для одно- и двухпараметрических рациональных матриц

Пусть $R(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda)\}$ и $R(\lambda,\mu) = \{r_{ij}(\lambda,\mu)\}$ суть одно- и двухпараметрические рациональные $m \times n$ матрицы, т.е. матрицы элементы которых являются дробно-рациональные функции:

$$r_{ij}(\lambda) = \frac{f_{ij}(\lambda)}{g_{ij}(\lambda)}, \quad r_{ij}(\lambda,\mu) = \frac{f_{ij}(\lambda,\mu)}{g_{i,j}(\lambda,\mu)} \quad i = 1,\dots m, \quad j = 1\dots n$$

$f_{ij}(\lambda)$, $g_{ij}(\lambda)$ и $f_{ij}(\lambda,\mu)$, $g_{ij}(\lambda,\mu)$ – скалярные полиномы от одной и двух переменных соответственно. Обозначим через ρ ранг матрицы* $R : \rho \leqslant \min(m,n)$. Если $m = n$ и $\det R$ не равен тождественно нулю, то матрица R называется регулярной, в противном случае матрица R называется сингулярной.

Ниже рассматриваются различные виды факторизаций матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ и их применение к решению спектральных задач для рациональных матриц.

Глава состоит из шести параграфов. В §7.1 дается классификация различных факторизаций рациональных матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ общего вида. Вводятся в рассмотрение вспомогательные (базовые) факторизации и способы построения их. Дана классификация различных, так называемых, несократимых факторизаций. Доказаны инвариантные спектральные свойства сомножителей несократимых факторизаций, построенных различными способами для одной и той же рациональной матрицы. Алгоритмы построения несократимых факторизаций, состоящие из двух сомножителей, для матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ приведены в §7.2.

В §§7.3, 7.4 рассматриваются для $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$, так называемые, минимальные несократимые факторизации. Являясь несократимыми, эти факторизации имеют своими сомножителями матрицы минимальных размеров и степеней.

В §7.5 формулируются спектральные задачи для рациональных матриц. Устанавливается, что при использовании несокра-

---

*При записи одно- и двухпараметрических матриц для сокращения иногда будем опускать параметры, если рассуждения верны для обоих случаев.

тимых и минимальных факторизаций они могут быть сведены к решению спектральных задач для полиномиальных матриц.

В §7.6 для однопараметрической рациональной матрицы $R(\lambda)$ устанавливается связь рассматриваемых несократимых факторизаций с так называемыми неприводимыми реализациями в теории систем. Результаты обобщаются на случай двухпараметрических рациональных матриц.

§7.1. Классификация некоторых факторизаций рациональных матриц и их свойства [46]

7.1.1. Базовые факторизации. Рассмотрим факторизации R следующих видов

$$R(\lambda) = K^{-1}(\lambda)D(\lambda), \tag{7.1.1}$$

$$R(\lambda,\mu) = K^{-1}(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu); \tag{7.1.2}$$

и

$$R(\lambda) = D(\lambda)K^{-1}(\lambda), \tag{7.1.3}$$

$$R(\lambda,\mu) = D(\lambda,\mu)K^{-1}(\lambda,\mu), \tag{7.1.4}$$

удовлетворяющие свойствам

(а) K и D суть полиномиальные матрицы соответствующих размеров;

(б) K есть регулярная матрица.

К факторизациям (7.1.1)–(7.1.4) будем ссылаться как к базовым. В дальнейшем изложении они будут использованы как вспомогательные и служить основой для построения других факторизаций рациональных матриц.

Если исходная рациональная матрица R не задана в одном из видов (7.1.1) или (7.1.3) и (7.1.2) или (7.1.4), то в качестве базовой можно взять факторизацию R, например, выбрав регулярную матрицу K в следующем виде:

$$K = kI_m \quad \text{или} \quad K = \operatorname{diag}\{k_1,\dots,k_m\}$$

для (7.1.1) и (7.1.2);

$$K = kI_n \quad \text{или} \quad K = \operatorname{diag}\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_n\}$$

для (7.1.3) и (7.1.4). Здесь k – скалярный полином, являющийся наименьшим общим кратным (НОК) знаменателей всех элементов матрицы R; k_i, $i = 1,\dots,m$ ($\overline{k}_i$, $i = 1,\dots,n$) суть НОК знаменателей элементов i-ой строки (i-го столбца) матрицы R.

7.1.2. Несократимые факторизации.

Несократимой факторизацией рациональной $m \times n$ матрицы R ранга ρ назовем следующие факторизации.

1. Факторизация

$$R = ST^{-1}, \tag{7.1.5}$$

удовлетворяющая свойствам

(а) S, T суть полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы;

(б) T – регулярная матрица;

(в) $M := [S, T]^B$ – полиномиальная $(m+n) \times n$ матрица не имеющая

конечного спектра в случае $R := R(\lambda)$;

конечного непрерывного спектра в случае $R := R(\lambda, \mu)$.

2. Факторизация

$$R = T^{-1}S, \tag{7.1.6}$$

удовлетворяющая свойствам

(а) T и S суть $m \times m$ и $m \times n$ полиномиальные матрицы;

(б) T – регулярная матрица;

(в) $M := [S, T]$ есть полиномиальная $m \times (n+m)$ матрица, не имеющая

конечного спектра в случае $R := R(\lambda)$;

конечного непрерывного спектра в случае $R := R(\lambda, \mu)$.

3. Факторизация

$$R = ST^{-1}V, \tag{7.1.7}$$

удовлетворяющая свойствам

(а) S, T, V суть полиномиальные матрицы размера $m \times q$, $q \times q$, $q \times n$ $(q \geqslant \rho)$;

(б) T – регулярная матрица;

(в) полиномиальные матрицы $[S, T]^B$ и $[T, V]$ соответственно размеров $(m+q) \times q$ и $q \times (q+n)$ не имеют

конечных спектров в случае $R := R(\lambda)$;

конечных непрерывных спектров в случае $R := R(\lambda, \mu)$.

Замечание 1. Рассмотренные выше базовые факторизации (7.1.1)–(7.1.4), как правило, не являются несократимыми факторизациями.

Несократимая факторизация рациональной $m \times n$ матрицы R, ранга ρ, называется минимальной по размерам входящих в нее матриц-сомножителей, если все они имеют полный ранг ρ.

Несократимая факторизация рациональной $m \times n$ матрицы R называется минимальной по степени, если степень полиномиальной матрицы $M = [S, T]^B$, характеризующей ее, являются минимальными.

Несократимая факторизация рациональной $m \times n$ матрицы R, ранга ρ, называется минимальной, если она минимальна как по размерам, так и по степеням ее сомножителей.

Несократимые факторизации для одной и той же матрицы R могут отличаться выбором матриц сомножителей. В частности могут отличаться размерами и степенями матриц-сомножителей. Имеет место следующее утверждение

Теорема 7.1. *Конечный спектр матрицы T и объединение конечных спектров матриц S и V в несократимых факторизациях вида* (7.1.7) *являются инвариантами для одной и той же рациональной матрицы R.*

Доказательство. Заметим, вначале, что несократимые факторизации вида (7.1.5) и (7.1.6) являются частными случаями несократимой факторизации (7.1.7):

$$R = ST^{-1} = ST^{-1}I, \quad R = T^{-1}S = IT^{-1}S,$$

где I – единичная матрица. Так, что объединение спектров матриц S и V для факторизаций вида (7.1.5) и (7.1.6) состоит только из спектра матрицы S. Начнем с рассмотрения этих наиболее простых случаев.

Доказательство теоремы для несократимой факторизации вида (7.1.5)

$$R = ST^{-1}$$

проведем раздельно для $R := R(\lambda)$ и $R := R(\lambda, \mu)$.

Рассмотрим случай $R := R(\lambda)$ и пусть

$$R(\lambda) = S_i(\lambda)\, T_i^{-1}(\lambda), \quad i = 1, 2, \tag{7.1.8}$$

две несократимые факторизации $R(\lambda)$ вида (7.1.5). Введем в рассмотрение несократимую факторизацию $R(\lambda)$ вида (7.1.6)

$$R(\lambda) = T_3^{-1}(\lambda)\, S_3(\lambda).$$

В силу свойств несократимой факторизации матрицы $M_i(\lambda) := [S_3(\lambda), T_i(\lambda)]^B$ и $M_3(\lambda) := [S_3(\lambda)\, T_3(\lambda)]$ не имеют конечных спектров. Докажем совпадение конечных спектров матриц $T_i(\lambda)$ и

$T_3(\lambda)$, а так же $S_i(\lambda)$ и $S_3(\lambda)$. Доказательство в обоих случаях проводится по одному плану. Для определенности приводим доказательство для матриц $T_i(\lambda)$ и $T_3(\lambda)$. Из сказанного следует, что

$$R(\lambda) = S_i(\lambda)\,T_i^{-1}(\lambda) = T_3^{-1}(\lambda)\,S_3(\lambda). \tag{7.1.9}$$

Пусть $\lambda = \overline{\lambda}$ принадлежит спектру $T_i(\lambda)$, так что

$$T_i(\overline{\lambda})\overline{x}_i = 0 \quad \text{и} \quad \overline{x}_i \neq 0.$$

По свойству (в) несократимой факторизации вида (7.1.5) $\overline{y}_i := S_i(\overline{\lambda})\,\overline{x}_i \neq 0$.

Из равенства (7.1.9) имеем

$$T_3\,(\overline{\lambda})\,S_i(\overline{\lambda})\,\overline{x}_i = \,S_3\,(\overline{\lambda})\,T_i\,(\overline{\lambda})\,\overline{x}_i = 0,$$

или

$$T_3(\overline{\lambda})\,\overline{y}_i = 0,$$

так что $\lambda = \overline{\lambda}$ есть точка спектра матрицы $T_3(\lambda)$.

Докажем обратное утверждение: Пусть $\lambda = \overline{\lambda}$ есть точка спектра $T_3(\lambda)$, так что $\overline{z}^T\,T_3\,(\overline{\lambda}) = 0$, $\overline{z} \neq 0$. При этом по свойству (в) несократимой факторизации вида (7.1.6) вектор $\overline{v}^T := \overline{z}^T S_3(\overline{\lambda}) \neq 0$. Из равенства (7.1.9) имеем

$$\overline{z}^T\,S_3(\overline{\lambda})\,T_i(\overline{\lambda}) = \overline{z}^T\,T_3(\overline{\lambda})\,S_i(\overline{\lambda}) = 0,$$

или

$$\overline{v}^T\,T_i\,(\overline{\lambda}) = 0,$$

так что $\lambda = \overline{\lambda}$ принадлежит спектру $T_i(\lambda)$. Таким образом установлено, что конечные спектры матриц $T_i(\lambda)$ и $T_3(\lambda)$ совпадают. Итак, совпадение конечных спектров у матриц T различных несократимых факторизаций вида (7.1.5) одной и той же рациональной матрицы $R(\lambda)$ установлено.

Рассмотрим случай двухпараметрической полиномиальной матрицы $R := R(\lambda,\mu)$. Пусть

$$R(\lambda,\mu) = S_i(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu), \quad i = 1, 2, \tag{7.1.10}$$

суть две несократимые факторизации матрицы $R(\lambda,\mu)$. Доказательство совпадения конечных спектров у матриц $S_i(\lambda,\mu)$, а также у матриц $T_i(\lambda,\mu)$, проводятся аналогично. Для определенности докажем совпадение конечных спектров матриц $T_1(\lambda,\mu)$ и

$T_2(\lambda,\mu)$. С этой целью введем в рассмотрение несократимую факторизацию матрицы $R(\lambda,\mu)$ вида (7.1.6)

$$R(\lambda,\mu) = T_3^{-1}(\lambda,\mu)S_3(\lambda,\mu).$$

С учетом этого равенства, можно записать

$$R(\lambda,\mu) = S_i(\lambda,\mu)T_i^{-1}(\lambda,\mu) = T_3^{-1}(\lambda,\mu)S_3(\lambda,\mu) \qquad (7.1.11)$$

или

$$\left[T_3(\lambda,\mu),\ -S_3(\lambda,\mu)\right]\begin{bmatrix} S_i(\lambda,\mu) \\ T_i(\lambda,\mu) \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда, с учетом свойств несократимой факторизации, следует, что столбцы матрицы $M_i(\lambda,\mu) := \left[S_i(\lambda,\mu),\ T_i(\lambda,\mu)\right]^B$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $M_3(\lambda,\mu) := \left[T_3(\lambda,\mu),\right.$ $\left.-S_3(\lambda,\mu)\right]$, тогда как строки $M_3(\lambda,\mu)$ образуют базис левого нуль-пространства матрицы $M_i(\lambda,\mu)$. Отсюда конечные дискретные спектры матриц $M_i(\lambda,\mu)$ и $M_3(\lambda,\mu)$ совпадают. Пусть (λ_*,μ_*) есть точка конечного дискретного спектра этих матриц. Тогда в силу регулярности блоков $T_i(\lambda,\mu)$ и $T_3(\lambda,\mu)$ матриц $M_i(\lambda,\mu)$ и $M_3(\lambda,\mu)$ соответственно, эта точка является так же точкой принадлежащей конечным непрерывным спектрам матриц $T_i(\lambda,\mu)$ и $T_3(\lambda,\mu)$.

Далее рассмотрим случай, когда точка $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$, являясь точкой спектра $T_i(\lambda,\mu)$, не принадлежит дискретному спектру матрицы $M_i(\lambda,\mu)$, а значит и $M_3(\lambda,\mu)$, и пусть $\overline{x}_i$ есть правый собственный вектор. так что

$$T_i(\overline{\lambda},\overline{\mu})\overline{x}_i = 0 \quad \text{и} \quad \overline{x}_i \neq 0.$$

С учетом свойства (в) несократимой факторизации вида (7.1.5) и того, что $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ не принадлежит дискретному спектру $M_i(\lambda,\mu)$, имеем $\overline{y}_i := S_i(\overline{\lambda},\overline{\mu})\overline{x}_i \neq 0$. Тогда из равенства (1.11) получим: $T_3(\overline{\lambda},\overline{\mu})\overline{y}_i = 0$, т.е. точка $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ принадлежит спектру матрицы $T_3(\lambda,\mu)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть точка $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$, являясь точкой спектра $T_3(\lambda,\mu)$, не принадлежит дискретному спектру матрицы $M_3(\lambda,\mu)$, а значит и $M_i(\lambda,\mu)$.

Имеем

$$\overline{z}^T T_3(\overline{\lambda},\overline{\mu}) = 0, \quad \overline{z} \neq 0;$$

при этом вектор $\overline{v}^T = \overline{z}^T S_3(\overline{\lambda},\overline{\mu}) \neq 0$, так как по условию $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ не принадлежит дискретному спектру $M_3(\lambda,\mu)$, и $M_3(\lambda,\mu)$ не имеет конечного непрерывного спектра. Тогда из равенства (7.1.11) имеем

$$\overline{v}^T T_i(\overline{\lambda},\overline{\mu}) = 0,$$

т.е. точка $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ принадлежит спектру матрицы $T_i(\lambda, \mu)$.

Таким образом установлено совпадение конечных спектров матриц $T_i(\lambda, \mu)$ и $T_3(\lambda, \mu)$. Доказательство инвариантности конечных спектров матриц $T_i(\lambda, \mu)$ различных несократимых факторизаций вида (7.1.5) закончено. Таким же способом устанавливается совпадение конечных спектров матриц $S_i(\lambda, \mu)$ несократимых факторизаций вида (7.1.5). Этим завершается доказательство теоремы для несократимой факторизации (7.1.5). Доказательство теоремы для факторизации (7.1.6) проводится аналогично.

Рассмотрим теперь несократимую факторизацию виды (7.1.7) для случая двухпараметричной* матрицы $R := R(\lambda, \mu)$

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu). \tag{7.1.12}$$

Построим для рациональной матрицы $\widetilde{R}(\lambda, \mu)$ заданной в виде несократимой факторизации

$$\widetilde{R}(\lambda, \mu) = T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu) \tag{7.1.13}$$

несократимую факторизацию вида

$$\widetilde{R}(\lambda, \mu) = \widetilde{S}(\lambda, \mu)\widetilde{T}^{-1}(\lambda, \mu), \tag{7.1.14}$$

так что

$$T(\lambda, \mu)\widetilde{S}(\lambda, \mu) = V(\lambda, \mu)\widetilde{T}(\lambda, \mu). \tag{7.1.15}$$

Выполняя соответствующую замену в (7.1.12), получим следующее представление матрицы $R(\lambda, \mu)$:

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)\widetilde{S}(\lambda, \mu)\widetilde{T}^{-1}(\lambda, \mu) \equiv \widehat{S}(\lambda, \mu)\widetilde{T}^{-1}(\lambda, \mu). \tag{7.1.16}$$

Докажем, что (1.16) является несократимой факторизацией. Доказательство проведем от противного.

Пусть матрица $\left[\widehat{S}(\lambda, \mu)\ \widetilde{T}(\lambda, \mu)\right]^B$ имеет конечный непрерывный спектр, $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ – точка этого спектра, а $\overline{x}$ – соответствующий правый собственный вектор:

$$\widetilde{T}(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\overline{x} = 0, \tag{7.1.17}$$

$$\widehat{S}(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\overline{x} = 0. \tag{7.1.18}$$

Равенство (7.1.18) означает, что либо $\widetilde{S}(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\overline{x} = 0$, либо при $\overline{y} =:$ $\widetilde{S}(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\ \overline{x} \neq 0$, $S(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\overline{y} = 0$. Выполнение первого равенства и равенства (7.1.17) противоречит предположению и несократимости

*В случае $R := R(\lambda)$ доказательство проводится аналогично.

факторизации (7.1.14). Выполнение второго равенства и получаемого с учетом (7.1.15), (7.1.17) равенства

$$T(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\overline{y} = T\,(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\widetilde{S}\,(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\overline{x} = V\,(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\widetilde{T}(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\,\overline{x} = 0$$

противоречит предположению о несократимости факторизации (7.1.12). Таким образом доказано, что факторизация (7.1.16) является несократимой.

В отношении несократимых факторизаций такого вида инвариантность конечных спектров матриц $\widetilde{T}$ и $\widehat{S}$ уже доказана. Для завершения доказательства осталось заметить, что конечный спектр матрицы $\widehat{S}$ является объединением конечных спектров матриц $S(\lambda,\mu)$ и $\widetilde{S}(\lambda,\mu)$, а также, что совпадают конечные спектры матриц $T(\lambda,\mu)$ и $\widetilde{T}(\lambda,\mu)$ и конечные спектры матриц $V(\lambda,\mu)$ и $\widetilde{S}(\lambda,\mu)$.

§7.2. Существование несократимых факторизаций и алгоритмы их построения [6, 46]

Пусть $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ суть рациональные $m\times n$ матрицы, ранга ρ. В этом параграфе рассматриваются несократимые факторизации вида (7.1.5) и (7.1.6), устанавливается их существование и приводятся способы построения.

7.2.1. Сначала рассмотрим факторизацию вида (7.1.5) раздельно для $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$.

Пусть

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda) \tag{7.2.1}$$

несократимая факторизация $R(\lambda)$, удовлетворяющая свойствам:

(а) $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ суть полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы соответвенно;

(б) T – регулярная матрица;

(в) $M(\lambda) := \left[S(\lambda), T(\lambda)\right]^B$ не имеет конечного спектра.

Аналогично, пусть

$$R(\lambda,\mu) = S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu) \tag{7.2.2}$$

несократимая факторизация, удовлетворяющая свойствам:

(а) $S(\lambda,\mu)$ и $T(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы соответственно;

(б) $T(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица;

(в) двухпараметрическая $(m+n) \times n$ матрица

$$M(\lambda,\mu) := \left[S(\lambda,\mu), T(\lambda,\mu)\right]^B$$

не имеет конечного непрерывного спектра.

Справедливы следующие утверждения

Теорема 7.2. 1^0 *Любая рациональная* $m \times n$ *матрица* $R(\lambda)$ *ранга* ρ *может быть представлена в виде несократимой факторизации* (7.2.1.)

2^0 *Любая рациональная двухпараметрическая* $m \times n$ *матрица* $R(\lambda, \mu)$ *ранга* ρ *может быть представлена в виде несократимой факторизации* (7.2.2.)

Доказательство теоремы проводим конструктивно, описывая алгоритмы построения несократимых факторизаций (7.2.1) и (7.2.2). Эти алгоритмы имеют одну и ту же схему реализации и требуют выполнения следующих операций.

(1) Матрицы $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ записываются в виде базовых факторизаций (7.1.1) и (7.1.2)

$$R(\lambda) = K^{-1}(\lambda)D(\lambda) \quad \text{и} \quad R(\lambda, \mu) = K^{-1}(\lambda, \mu)D(\lambda, \mu). \qquad (7.2.3)$$

(2) Формируются вспомогательные матрицы

$$C(\lambda) = [K(\lambda), D(\lambda)] \quad \text{для} \quad R(\lambda),$$

и

$$C(\lambda, \mu) = [K(\lambda, \mu), D(\lambda, \mu)] \quad \text{для} \quad R(\lambda, \mu).$$

(3) Используя алгоритм ΔW-1 для $C(\lambda)$ и алгоритм ΔW-2 для $C(\lambda, \mu)$ находим разложения вида

$$C(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}], \quad C(\lambda, \mu)W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), \mathbb{O}]. \qquad (7.2.4)$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$ матрица; $W(\lambda)$ – унимодулярная $(m+n) \times (m+n)$ матрица; $W(\lambda, \mu)$ – порядка $(m+n)$ регулярная матрица, унимодулярная по λ. Из (7.2.4) следует, что последние n столбцы матриц $W(\lambda)$ и $W(\lambda, \mu)$ образуют базисы нуль-пространств из полиномиальных решений соответственно матриц $C(\lambda)$ и $C(\lambda, \mu)$. Обозначим эти базисы $W_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda, \mu)$; при этом заметим, что $W_0(\lambda)$ не имеет конечного спектра, так как состоит из столбцов унимодулярной матрицы $W(\lambda)$. Будем предполагать, что $W_0(\lambda, \mu)$ также не имеет конечного непрерывного спектра. Последнее ограничение не умаляет общности, так как всегда может быть достигнуто алгоритмом исчерпывания.

(4) Запишем матрицы $W_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda, \mu)$ в следующем блочном виде

$$W_0(\lambda) = [W_1(\lambda, W_2(\lambda)]^B; \quad W_0(\lambda, \mu) = [W_1(\lambda, \mu), W_2(\lambda, \mu)]^B$$

с блоками W_1 и W_2 размеров $m \times n$ и $n \times n$ соответственно.

Тогда в качестве матриц S и T для несократимой факторизации (7.2.1) и (7.2.2) берутся матрицы

$$S(\lambda) := -W_1(\lambda), \qquad T(\lambda) := W_2(\lambda); \tag{7.2.5}$$

$$S(\lambda,\mu) := -W_1(\lambda,\mu), \qquad T(\lambda,\mu) := W_2(\lambda,\mu). \tag{7.2.6}$$

Для доказательства теоремы следует установить, что при выборе T и S из (7.2.5) и (7.2.6) справедливы представления $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ в виде факторизаций (7.2.1) и (7.2.2) соответственно, и для каждого из них выполняются свойства (а)–(в).

Обоснование рассмотренных алгоритмов, а, следовательно, и доказательство теоремы 7.2 для одно- и двухпараметрических рациональных матриц проводится по одному и тому же плану. Для определенности приводим доказательство для $R(\lambda,\mu)$.

Учитывая, что столбцы матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ образуют базис правого нуль-пространства $C(\lambda,\mu)$, имеем

$$C(\lambda,\mu)W_0(\lambda,\mu) = \mathbb{O}$$

или в развернутом виде

$$K(\lambda,\mu)W_1(\lambda,\mu) + D(\lambda,\mu)W_2(\lambda,\mu) = \mathbb{O}, \tag{7.2.7}$$

где по условию $K(\lambda,\mu)$ – регулярная полиномиальня матрица, $D(\lambda,\mu)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица.

Сначала установим справедливость свойства (б), т.е. регулярность матрицы $W_2(\lambda,\mu)$.

Допустим противное и пусть столбцы матрицы $Y(\lambda,\mu)$ образуют базис нетривиального правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $W_2(\lambda,\mu)$, так что

$$W_2(\lambda,\mu)Y(\lambda,\mu) = \mathbb{O}, \qquad Y(\lambda,\mu) \not\equiv \mathbb{O}.$$

Тогда из (7.2.7) имеем

$$K(\lambda,\mu)\,W_1(\lambda,\mu)\,Y(\lambda,\mu) = \mathbb{O}.$$

Далее, так как матрица $W_0(\lambda,\mu)$ имеет полный столбцовый ранг, то с учетом сказанного имеем

$$W_0(\lambda,\mu)\,Y(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} W_1(\lambda,\mu)\,Y(\lambda,\mu) \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}.$$

Следовательно матрица

$$Z(\lambda,\mu) := W_1(\lambda,\mu)Y(\lambda,\mu) \not\equiv \mathbb{O}$$

удовлетворяет равенству

$$K(\lambda,\mu)\,Z(\lambda,\mu) = \mathbb{O},$$

что противоречит регулярности матрицы $K(\lambda,\mu)$. Противоречие доказывает регулярность матрицы $T(\lambda,\mu) := W_2(\lambda,\mu)$. Далее, учитывая регулярность матриц $K(\lambda,\mu)$ и $W_2(\lambda,\mu)$ из (7.2.7) находим

$$-W_1(\lambda,\mu)W_2^{-1}(\lambda,\mu) = K^{-1}(\lambda,\mu)\,D(\lambda,\mu) = R(\lambda,\mu),$$

что доказывает справедливость равенства (7.2.2) при выборе $T(\lambda,\mu)$ и $S(\lambda,\mu)$ в виде (7.2.6). Справедливость свойств (а) и (б) установлена. Справедливость свойства (в) следует из того, что матрица $[-S(\lambda,\mu),\, T(\lambda,\mu)]^B$ в силу равенств (7.2.6) совпадает с матрицей $W_0(\lambda,\mu)$, которая по построению не имеет конечного непрерывного спектра. Этим завершается доказательство утверждения 2^0 теоремы 7.2. Доказательство утверждения 1^0 проводится по той же схеме.

Замечание. Если в рассматриваемом выше алгоритме в качестве матриц $W_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda,\mu)$ (см. операцию (3)) выбрать минимальные базисы нуль-пространств из правых полиномиальных решений соответственно матриц $C(\lambda)$ и $C(\lambda,\mu)$, то матрицы $M(\lambda)$ и $M(\lambda,\mu)$ из свойств (в) факторизаций (7.2.1) и (7.2.2) будут иметь минимальные степени, так что (7.2.1) и (7.2.2) будут несократимыми факторизациями, минимальными по степеням входящих в них сомножителей.

7.2.2. Рассмотрим несократимые факторизации $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ вида (7.1.6).

Пусть

$$R(\lambda) = T^{-1}(\lambda)\,S(\lambda) \tag{7.2.9}$$

несократимая факторизация, удовлетворяющая свойствам:
(а) $T(\lambda)$ и $S(\lambda)$ суть полиномиальные $m\times m$ и $m\times n$ матрицы;
(б) $T(\lambda)$ – регулярная матрица;
(в) полиномиальная $m\times(n+m)$ матрица

$$M(\lambda) := [S(\lambda), T(\lambda)]$$

не имеет конечного спектра.

Аналогично пусть

$$R(\lambda,\mu)=T^{-1}(\lambda,\mu)\,S(\lambda,\mu) \qquad (7.2.10)$$

несократимая факторизация, удовлетворяющая свойствам:

(а) $T(\lambda,\mu)$ и $S(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные $m\times m$ и $m\times n$ матрицы;

(б) $T(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица;

(в) двухпараметрическая полиномиальная $m\times(n+m)$ матрица

$$M(\lambda,\mu):=[S(\lambda,\mu,\,T(\lambda,\mu)]$$

не имеет конечного непрерывного спектра.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7.3. 1.^{0} *Любая рациональная $m\times n$ матрица $R(\lambda)$ ранга ρ может быть представлена в виде несократимой факторизации* (7.2.9).

2.^{0} *Любая рациональная $m\times n$ матрица $R(\lambda,\mu)$ ранга ρ может быть представлена в виде несократимой факторизации* (7.2.10).

Доказательство теоремы проводится конструктивно по тому же плану, что и теоремы 7.2. Разница состоит только в выборе базовых факторизаций. Здесь в качестве базовых следует взять факторизации (7.1.3) и (7.1.4), именно

$$R(\lambda):=D(\lambda)\,K^{-1}(\lambda) \quad \text{и} \quad R(\lambda,\mu):=D(\lambda,\mu)\,K^{-1}(\lambda,\mu) \qquad (7.2.11)$$

Далее следует применить алгоритм п. 7.2.1 к матрице

$$R_1(\lambda):=R^T(\lambda) \quad \text{и} \quad R_1(\lambda,\mu):=R^T(\lambda,\mu)$$

взяв в качестве

$$K_1(\lambda):=K^T(\lambda) \quad \text{и} \quad K_1(\lambda,\mu):=K^T(\lambda,\mu),$$

а матрицы $K(\lambda)$ и $K(\lambda,\mu)$ из (7.2.11).

Применив шаги (2)–(4) упомянутого алгоритма п.7.2.1 придем к разложениям

$$R_1(\lambda)=-W_1(\lambda)W_2^{-1}(\lambda) \quad \text{и} \quad R_1(\lambda,\mu)=-W_1(\lambda,\mu)W_2^{-1}(\lambda,\mu)$$

Так что искомые разложения (7.2.9) и (7.2.10) будут

$$R(\lambda)=T^{-1}(\lambda)\,S(\lambda), \quad \text{где} \quad T(\lambda):=W_2^T(\lambda), \quad S(\lambda):=-W_1^T(\lambda);$$

$$R(\lambda,\mu)=T^{-1}(\lambda,\mu)\,S(\lambda,\mu), \quad \text{где} \quad T(\lambda,\mu):=W_2^T(\lambda,\mu),$$
$$S(\lambda,\mu)=-W_1^T(\lambda,\mu).$$

§7.3. Минимальная несократимая факторизация рациональных матриц полного ранга и алгоритм ее построения [6, 46]

Пусть $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ рациональные $m \times n$ матрицы полного столбцового ранга n. Рассмотрим факторизацию $R(\lambda)$

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda), \qquad (7.3.1)$$

удовлетворяющую свойствам:

(а) $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ – полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы;

(б) $T(\lambda)$ – регулярная матрица;

(в) полиномиальная $(m+n) \times n$ матрица

$$[S(\lambda),\, T(\lambda)]^B$$

не имеет спектра (как конечного так и бесконечного).

Аналогично рассмотрим факторизацию $R(\lambda,\mu)$ вида

$$R(\lambda,\mu) = S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu), \qquad (7.3.2)$$

удовлетворяющую свойствам:

(а) $S(\lambda,\mu)$ и $T(\lambda,\mu)$ – двухпараметрические полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы;

(б) $T(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица;

(в) двухпараметрическая полиномиальная $(m+n)\times n$ матрица $[S(\lambda,\mu),\, T(\lambda,\mu)]^B$ не имеет непрерывного спектра.

К факторизациям (7.3.1) и (7.3.2) будем ссылаться как минимальным несократимым факторизациям соответственно матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7.4. $1.^0$ *Любая $m\times n$ рациональная матрица $R(\lambda)$ полного столбцового ранга может быть представлена в виде минимальной несократимой факторизации* (7.3.1).

$2.^0$ *Любая $m \times n$ двухпараметрическая рациональная матрица $R(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга может быть представлена в виде минимальной несократимой факторизации* (7.3.2).

Доказательство теоремы проведем конструктивно, описывая алгоритмы реализующие минимальную факторизацию матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$.

Прежде всего заметим, что минимальные факторизации (7.3.1) и (7.3.2) отличаются от несократимой факторизации (7.2.1) и (7.2.2) соответственно для $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ только свойством (в).

Выполнение свойства (в) для минимальной факторизации влечет выполнение свойства (в) для несократимой факторизации как для $R(\lambda)$, так и для $R(\lambda, \mu)$. Это замечание позволяет для построения минимальных факторизаций матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга частично использовать алгоритм построения несократимой факторизации для $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ произвольного ранга.

Алгоритмы вычисления минимальной факторизации для $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ требуют выполнения следующих операций.

(1) Матрицы $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ записываются в виде базовой факторизации

$$R(\lambda) = K^{-1}(\lambda)D(\lambda), \quad R(\lambda, \mu) = K^{-1}(\lambda, \mu)D(\lambda, \mu).$$

(2) Формируются вспомогательные матрицы

$$C(\lambda) := [K(\lambda),\, D(\lambda)] \quad \text{для} \quad R(\lambda)$$

и

$$C(\lambda, \mu) := [K(\lambda, \mu),\, D(\lambda, \mu)] \quad \text{для} \quad R(\lambda, \mu).$$

(3) Находятся матрицы $W(\lambda)$ и $W(\lambda, \mu)$, реализующие ΔW-1 и ΔW-2 факторизации матриц $C(\lambda)$ и $C(\lambda, \mu)$ соответственно:

$$C(\lambda)\, W(\lambda) = [\Delta(\lambda),\, \mathbb{O}];$$

$$C(\lambda, \mu)\, W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu),\, \mathbb{O}].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$-матрица, $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица, $W(\lambda, \mu)$ – регулярная матрица, унимодулярная по λ.

(4) Базисы нуль-пространств из полиномиальных решений матриц $C(\lambda)$ и $C(\lambda, \mu)$, образованные из последних n столбцов матриц $W(\lambda)$ и $W(\lambda, \mu)$, перестраиваются в минимальный базис в случае $C(\lambda)$ и в базис, не содержащий конечного непрерывного спектра в случае $C(\lambda, \mu)$ (обозначим их по-прежнему $W_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda, \mu)$) нуль-пространств из правых полиномиальных решений соответственно матриц $C(\lambda)$ и $C(\lambda, \mu)$.

Заметим, что алгоритм построения минимальных факторизаций отличается от алгоритма построения несократимых факторизаций матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ только шагом (4), именно: построенные матрицы $W_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda, \mu)$, как матрицы, составленных из столбцов минимальных базисов, не имеют как конечных, так и бесконечных собственных значений.

(5) Матрицы $W_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda, \mu)$ записываются в блочном виде

$$W_0(\lambda) = \left[W_1(\lambda),\, W_2(\lambda)\right]^B \quad \text{и} \quad W_0(\lambda, \mu) = \left[W_1(\lambda, \mu,\, W_2(\lambda, \mu)\right]^B$$

с блоками W_1 и W_2 размеров $m\times n$ и $n\times n$ соответственно. Тогда в качестве матриц S и T минимальных факторизаций $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ берутся матрицы

$$S(\lambda) := -W_1(\lambda), \quad T(\lambda) = W_2(\lambda); \tag{7.3.3}$$

$$S(\lambda,\mu) := -W_1(\lambda,\mu), \quad T(\lambda,\mu) = W_2(\lambda,\mu). \tag{7.3.4}$$

Обоснование алгоритма построения минимальной факторизации, а, следовательно, и доказательство теоремы 7.3.1 проводится по тому же плану, что и обоснование алгоритмов несократимой факторизации из §7.2.

Аналогично в §7.2 проводится доказательство существования и алгоритм построения минимальной факторизации матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ полного строчного ранга.

§7.4. Минимальная несократимая факторизация рациональных матриц произвольного ранга и алгоритм ее построения

7.4.1 Определение минимальной несократимой факторизации [46].

Пусть $R(\lambda)$ рациональная $m\times n$ матрица ранга $\rho\leqslant \min(m,n)$. Рассмотрим факторизацию $R(\lambda)$ вида

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}V(\lambda), \tag{7.4.1}$$

удовлетворяющую следующим свойствам:

(а) $S(\lambda)$, $T(\lambda)$, $V(\lambda)$ суть полиномиальные матрицы соответственно размеров $m\times\rho$, $\rho\times\rho$, $\rho\times n$, имеющие ранг ρ, совпадающий с рангом $R(\lambda)$;

(б) $T(\lambda)$ – регулярная матрица;

(в) Полиномиальная $(m+\rho)\times\rho$ матрица $[S(\lambda),T(\lambda)]^B$ не имеет спектра (или что то же, не имеет конечных и бесконечных собственных значений).

(г) Полиномиальная $\rho\times(n+\rho)$ матрица $[T(\lambda),V(\lambda)]$ не имеет конечного спектра.

Введем в рассмотрение аналогичную факторизацию для двухпараметрической полиномиальной $m\times n$ матрице $R(\lambda,\mu)$ ранга $\rho\leqslant\min(m,n)$:

$$R(\lambda,\mu) = S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu), \tag{7.4.2}$$

удовлетворяющую слудующим свойствам:

(а) $S(\lambda,\mu)$, $T(\lambda,\mu)$ и $V(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные матрицы соответственно размеров $m\times\rho$, $\rho\times\rho$ и $\rho\times n$, имеющие ранг ρ, совпадающий с рангом рациональной матрицы $R(\lambda,\mu)$;
(б) $T(\lambda,\mu)$ - регулярная матрица;
(в) Полиномиальная двухпараметрическая $(m+\rho)\times\rho$ матрица $[S(\lambda,\mu),T(\lambda,\mu)]$ не имеет непрерывного спектра (другими словами, не имеет конечных и бесконечных одномерных собственных значений);
(г) Полиномиальная двухпараметрическая $\rho\times(\rho+n)$ матрица $[T(\lambda,\mu),V(\lambda,\mu)]$ не имеет конечного непрерывного спектра.

К факторизациям (7.4.1) и (7.4.2), удовлетворяющим свойствам (а)–(г), будем ссылаться как к минимальным факторизациям матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ соответственно.

Справедливы следующие утверждения

Теорема 7.5. 1^0. *Любая $m\times n$ рациональная матрица $R(\lambda)$ ранга $\rho\leqslant\min(m,n)$ может быть представлена в виде минимальной несократимой факторизации* (7.4.1).

2^0. *Любая $m\times n$ двухпараметрическая рациональная матрица $R(\lambda,\mu)$ ранга $\rho\leqslant\min(m,n)$ может быть представлена в виде минимальной несократимой факторизации* (7.4.2).

7.4.2. Алгоритмы построения минимальной несократимой факторизации. Доказательство существования минимальной факторизации для матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ проведем конструктивно, описывая алгоритмы их реализующие.

7.4.2.1. Сначала рассмотрим алгоритм, реализующий минимальную факторизацию (7.4.1) для матрицы $R(\lambda)$. Он требует выполнения следующих операций

(1) Матрицу $R(\lambda)$ записать в виде базовой факторизации

$$R(\lambda)=K^{-1}(\lambda)D(\lambda) \tag{7.4.3}$$

где $K(\lambda)$ – регулярная $m\times m$ полиномиальная матрица, $D(\lambda)$ – полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ.

(2) Используя алгоритм ΔW-1, вычислить ранговую факторизацию матрицы $D(\lambda)$ вида

$$D(\lambda)W(\lambda)=[\Delta(\lambda),\mathbb{O}]. \tag{7.4.4}$$

Здесь $\mathbb{O}$–нулевая $m\times(n-\rho)$ матрица, $W(\lambda)$ – унимодулярная $n\times n$ матрица, $\Delta(\lambda)$ – полного столбцового ранга матрица размеров

$m \times \rho$, спектр которой совпадает с конечным спектром матрицы $D(\lambda)$.

(3) Вычислить $\rho \times n$ матрицу $V(\lambda)$, образованную первыми ρ строками унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$.

(4) Разложение (7.4.3) с учетом (7.4.4) записать в виде

$$R(\lambda) = R_1(\lambda)V(\lambda) \tag{7.4.5}$$

где $R_1(\lambda) := K^{-1}(\lambda)\Delta(\lambda)$ – рациональная $m \times \rho$ матрица полного ранга ρ.

(5) К матрице $R_1(\lambda)$ применить алгоритм минимальной несократимой факторизации описанный в §7.3:

$$R_1(\lambda) = -W_1^{(1)}(\lambda)[W_2^{(1)}(\lambda)]^{-1}, \tag{7.4.6}$$

где $[W_1^{(1)}(\lambda), W_2^{(1)}]^B \equiv W_0^{(1)}(\lambda)$ есть матрица, столбцы которой образуют минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $C_1(\lambda) \equiv [K(\lambda), \Delta(\lambda)]$. Тогда с учетом (7.4.6) равенство (7.4.5) будет

$$R(\lambda) = -W_1^{(1)}(\lambda)[W_2^{(1)}(\lambda)]^{-1}V(\lambda). \tag{7.4.7}$$

Здесь по построению $W_2^{(1)}(\lambda)$ – регулярная $\rho \times \rho$ полиномиальная матрица; $W_1(\lambda)$ и $V(\lambda)$ матрицы $m \times \rho$ и $\rho \times n$ полного ранга, при этом $V(\lambda)$ не имеет конечного спектра как матрица составленная из строк унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$.

Обозначив

$$S(\lambda) := -W_1^{(1)}(\lambda), \quad T(\lambda) := W_2^{(1)}(\lambda), \quad V(\lambda) := V(\lambda),$$

разложение (7.4.7) запишем в виде

$$R(\lambda) = S(\lambda)\ T^{-1}(\lambda)\ V(\lambda). \tag{7.4.8}$$

Для доказательства минимальной несократимой факторизации $R(\lambda)$ в форме (7.4.8) достаточно установить справедливость свойства (г), так как справедливость свойств (а)–(в) следует из свойств минимальной факторизации рациональной матрицы

$$R_1(\lambda) := S(\lambda)T^{-1}(\lambda)$$

полного столбцового ранга.

Отсутствие конечного спектра у матрицы $[T(\lambda), V(\lambda)]$, полного строчного ранга ρ следует из свойств матрицы $V(\lambda)$, составленной из строк унимодулярной матрицы и, следовательно, не имеющей конечного спектра.

Этим завершается обоснование алгоритма построения минимальной факторизации (7.4.1) для рациональной матрицы $R(\lambda)$.

7.4.2.2. Перейдем к доказательству утверждения 2^0. Для этого сначала опишем алгоритм построения минимальной факторизации (7.4.2) для $R(\lambda,\mu)$. Он требует выполнения следующих операций.

(1) Матрица $R(\lambda,\mu)$ записывается в виде базовой факторизации (7.1.2):

$$R(\lambda,\mu) = K^{-1}(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu), \tag{7.4.9}$$

где $K(\lambda,\mu)$ – регулярная $m\times m$ двухпараметрическая полиномиальная матрица, $D(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ.

(2) Применяя ΔW-2 алгоритм, находится факторизация $D(\lambda,\mu)$

$$D(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),\mathbb{O}]. \tag{7.4.10}$$

Здесь $\mathbb{O}$-нулевая $m\times(n-\rho)$ матрица, $W(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица, унимодулярная по λ, так что полином

$$\det W(\lambda,\mu) = \varphi(\mu)$$

имеет корни* $\mu_1,\dots,\mu_q$, которые определяются в процессе реализации разложения (7.4.10); $\Delta(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m\times\rho$ матрица ранга ρ , непрерывный спектр которой состоит из объединения конечного непрерывного спектра матрицы $D(\lambda,\mu)$ и спектра матрицы $W(\lambda,\mu)$.

(3) На базе ΔW-2 разложения (7.4.10) двухпараметрической матрицы $D(\lambda,\mu)$ строится ∇V-2 разложение вида

$$D(\lambda,\mu) = \nabla(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu), \tag{7.4.11}$$

где $\nabla(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m\times\rho$ матрица, полного столбцового ранга, непрерывный спектр которой совпадает с конечным непрерывным спектром матрицы $D(\lambda,\mu)$. Так что в отличие от матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$ разложения (7.4.10) матрица $\nabla(\lambda,\mu)$ не имеет $\mu=\mu_i$, $i=1\dots q$, своими одномерными собственными значениями. Двухпараметрическая полиномиальная $\rho\times n$ матрица $V(\lambda,\mu)$ ранга ρ не имеет конечного непрерывного спектра. Алгоритм разложения (7.4.11) описан в §6.2.

---

*В дальнейшем для простоты рассуждений считаем $\mu_1,\dots,\mu_q$ не кратными корнями $\varphi(\mu)$.

Здесь мы приводим основные этапы его реализации.

(3.1) Используя алгоритм Леверье–Фаддеева (см. гл.8) вычисляется рациональная регулярная матрица $W^{-1}(\lambda,\mu)$ в виде

$$W^{-1}(\lambda,\mu) = \frac{1}{\varphi(\mu)}\, B(\lambda,\mu), \tag{7.4.12}$$

где $B(\lambda,\mu)$ есть регулярная $n\times n$ матрица, союзная для регулярной матрицы $W(\lambda,\mu)$ разложения (7.4.10). Равенство (7.4.10) с учетом (7.4.12) примет вид

$$D(\lambda,\mu) = \Delta(\lambda,\mu)B_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}, \tag{7.4.13}$$

где $B_{\rho n}(\lambda,\mu)$ есть $\rho\times n$ матрица, составленная из первых ρ строк матрицы $B(\lambda,\mu)$.

(3.2) Вычисляются двухпараметрические полиномиальные $m\times \rho$ матрица $\nabla(\lambda,\mu)$ из (7.4.11) и $\rho\times n$ вспомогательная матрица $C_{\rho n}(\lambda,\mu)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda,\mu) &= \Delta(\lambda,\mu)P^{-1}(\lambda,\mu) \\ C_{\rho n}(\lambda,\mu) &= P(\lambda,\mu)B_{\rho n}(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{7.4.14}$$

Здесь $P^{-1}(\lambda,\mu) = \prod\limits_{k=1}^{q} W_k(\lambda)T_k^{-1}(\mu)$, $P(\lambda,\mu) = \prod\limits_{k=q}^{1} T_k(\mu)W_k^{-1}(\lambda)$; $T_k(\mu) = \mathrm{diag}\{I_{\rho-1},(\mu-\mu_k)\}$. Матрицы $W_k(\lambda)$ и $W_k^{-1}(\lambda)$ – унимодулярные размеров $\rho\times\rho$. Вычисление матриц $\nabla(\lambda,\mu)$ и $C_{\rho n}(\lambda,\mu)$ проводится параллельно за q-шагов, где q – число собственных значений $\mu=\mu_i$ $(i=1\ldots q)$, подлежащих исчерпыванию. Рассмотрим выполнение типичного (первого) шага.

(i) Полагая $\nabla_0(\lambda,\mu) := \Delta(\lambda,\mu)$, для фиксированного $\mu=\mu_1$ вычисляется матрица $D_1(\lambda) := \nabla_0(\lambda,\mu_1)$, и находится унимодулярная матрица $W_1(\lambda)$, реализующая ΔW-1 разложение однопараметрической полиномиальной матрицы $D_1(\lambda)$.

(ii) Вычисляется унимодулярная матрица $W_1^{-1}(\lambda)$, обратная к матрице $W_1(\lambda)$. Операции (i), (ii) выполняются, используя ΔW-1 алгоритм.

(iii) Вычисляются двухпараметрические полиномиальные матрицы

$$\Delta_1(\lambda,\mu) = \nabla_0(\lambda,\mu)W_1(\lambda);$$

$$B^{(1)}(\lambda,\mu) := W_1^{-1}(\lambda)B^{(0)}(\lambda,\mu), \quad B^{(0)}(\lambda) := B_{\rho n}(\lambda,\mu)$$

и полиномиальные двухпараметрические матрицы $\nabla_1(\lambda,\mu)$ и $C^{(1)}(\lambda,\mu)$:

$$\nabla_1(\lambda,\mu)=\Delta_1(\lambda,\mu)d_1^{-1}(\mu)=\Delta_1(\lambda,\mu)\mathrm{diag}\{I_{\rho-1},(\mu-\mu_1)^{-1}\};$$

$$C^{(1)}(\lambda,\mu)=d_1(\mu)B^{(1)}(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}(\mu-\mu_1)B^{(1)}_{\rho-1}(\lambda,\mu)\\ b^{(1)}_\rho(\lambda,\mu)\end{bmatrix}.$$

Здесь через $B^{(1)}_{\rho-1}(\lambda,\mu)$ и $b^{(1)}_\rho(\lambda,\mu)$ обозначены блоки матрицы $B^{(1)}(\lambda,\mu)$, составленные соответственно из первых $(\rho-1)$ строк и последней строки ее. Операции (i)–(iii) повторяются для $\mu=\mu_2$ с матрицами $\nabla_1(\lambda,\mu)$ и $C^{(1)}(\lambda,\mu)$. Процесс заканчивается на шаге q, когда будут вычислены матрицы вида (7.4.14):

$$\nabla_q(\lambda,\mu)\equiv\nabla(\lambda,\mu)\quad\text{и}\quad C^{(q)}(\lambda,\mu)\equiv C_{\rho n}(\lambda,\mu).$$

(3.3) Равенство (7.4.13) записывается в виде

$$\begin{aligned}D(\lambda,\mu)&=\nabla(\lambda,\mu)P(\lambda,\mu)B_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}=\\&=\nabla(\lambda,\mu)C_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}=\nabla(\lambda,\mu)R_1(\lambda,\mu),\end{aligned}\tag{7.4.15}$$

где $R_1(\lambda,\mu)=C_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}$ – рациональная матрица полного строчного ранга ρ.

(3.4) Используя алгоритм §7.3, находится минимальная факторизация матрицы $R_1^T(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга

$$R_1^T(\lambda,\mu)=\frac{1}{\varphi(\mu)}C^T_{\rho n}(\lambda,\mu)=S_1(\lambda,\mu)T_1^{-1}(\lambda,\mu),\tag{7.4.16}$$

так что

$$D(\lambda,\mu)=\nabla(\lambda,\mu)T_1^{-T}(\lambda,\mu)S_1^T(\lambda,\mu),\tag{7.4.17}$$

Полагая $V(\lambda,\mu):=T_1^{-T}(\lambda,\mu)S_1^T(\lambda,\mu)$, получим разложение вида (7.4.11) для матрицы $D(\lambda,\mu)$.

(4) К рациональной $m\times\rho$ матрице

$$R_{m\rho}(\lambda,\mu):=K^{-1}(\lambda,\mu)\nabla(\lambda,\mu)$$

полного столбцового ранга ρ, применим алгоритм минимальной факторизации из §7.3. Имеем

$$R_{m\rho}(\lambda,\mu)=S(\lambda,\mu)T^{-1}_{\rho\rho}(\lambda,\mu),\tag{7.4.18}$$

где $S(\lambda, \mu)$ и $T(\lambda, \mu)$ имеют размеры $m \times \rho$ и $\rho \times \rho$, и матрица $T(\lambda, \mu)$ есть регулярная. Тогда с учетом равенств (7.4.9), (7.4.11) и (7.4.18) матрица $R(\lambda, \mu)$ будет

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu). \tag{7.4.19}$$

Докажем, что (7.4.19) есть минимальная факторизация. Действительно, справедливость свойств (а)–(в) вытекает из аналогичных свойств минимальной факторизации (7.4.18) матрицы $R_{m\rho}(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга. Полнота ранга матрицы $V(\lambda, \mu)$ следует из построения последней. Справедливость свойства (г), т.е. отсутствие конечного непрерывного спектра у матрицы

$$[T(\lambda, \mu), V(\lambda, \mu)]$$

вытекает из свойств матрицы $V(\lambda, \mu)$, которая по построению (см. алгоритм ∇V-2 в §6.2) не имеет конечного непрерывного спектра. Этим завершается обоснование алгоритма построения минимальной факторизации и доказательство теоремы 7.4.1.

Замечания. 1. Минимальная факторизация (7.3.1) и (7.3.2) для рациональных матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга является частным случаем минимальной факторизации (7.4.1) и (7.4.2) для $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ произвольного ранга ρ и получается при $V(\lambda) = I$ и $V(\lambda, \mu) = I$ соответственно. (I – единичная $n \times n$ матрица. Выполнение свойства (г), т.е. отсутствие конечного спектра у матрицы $[T, V] \equiv [T, I]$, в этом случае очевидно.

2. Минимальные факторизации (7.3.1) и (7.3.2) матриц $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга являются частным случаем несократимой факторизации (7.2.1) и (7.2.2) для $R(\lambda)$ и $R(\lambda, \mu)$ произвольного ранга. Они отличаются свойством (в), выполнение которого для минимальной факторизации влечет выполнение свойства (в) для несократимой факторизации.

§7.5. Решение спектральных задач для рациональных матриц

7.5.1. Определение особых точек. Определение конечных особых точек типа нуль и типа полюс для однопараметрической матрицы $R(\lambda)$ обычно дается, используя каноническую форму Смита–МакМилана для $R(\lambda)$ (см. гл. 1). По-видимому, аналогичной канонической формы для двухпараметрической рациональной матрицы не существует.

Ниже приводится определение особой точки рациональной матрицы, не зависящей от числа ее параметров.

Пусть $\left\{\frac{g_k}{p_k}\right\}$, $k=1,\dots,t$, суть совокупность несократимых дробей; Ψ есть общее кратное всех знаменателей $p_1,\dots,p_t$; $\Psi = p_k v_k$, $\varepsilon_k = g_k v_k$, так что

$$\frac{g_k}{p_k} = \frac{\varepsilon_k}{\Psi}, \quad k=1,\dots,t.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.6. *Для того, чтобы Ψ было НОК всех полиномов $p_1,\dots,p_k$, необходимо и достаточно, чтобы полиномы $\Psi, p_1,\dots,p_k$ не имели общего делителя. Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы система*

$$\begin{cases} \varepsilon_k = 0, \quad k=1,\dots,t, \\ \Psi = 0 \end{cases}$$

- *не имела конечных корней в случае полиномов от одной переменной;*
- *не имела конечных одномерных корней в случае полиномов от двух переменных.*

Пусть R есть $m\times n$ рациональная матрица ранга ρ. Введем в рассмотрение следующую совокупность дробно-рациональных функций

$$R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} \equiv \frac{\eta^{(k)}_{\bar i\bar j}}{\theta^{(k)}_{\bar i\bar j}}, \tag{7.5.1}$$

$1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m, \quad 1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n$, $k=1,\dots,\rho$.

Здесь $R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ – минор порядка k, составленный из элементов матрицы R, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1,\dots,i_k$ и столбцов с номерами $j_1,\dots,j_k$, через $\bar i$ и $\bar j$ обозначены соответственно мультииндексы: $\bar i = (i_1,\dots,i_k)$, $\bar j = (j_1,\dots,j_k)$; $\eta^{(k)}_{\bar i\bar j}$ и $\theta^{(k)}_{\bar i\bar j}$ – попарно взаимно-простые полиномы от одной переменной для $R := R(\lambda)$ и от двух переменных для $R := R(\lambda,\mu)$. Обозначим через Ψ – НОК всех знаменателей дробно-рациональных функций совокупности (7.5.1). По определению НОК скалярных полиномов

$$\Psi = \theta^{(k)}_{\bar i\bar j}\omega^{(k)}_{\bar i\bar j},$$

где $\omega^{(k)}_{\bar i\bar j}$ являются взаимно простыми полиномами для всех $\bar i = (i_1\dots i_k)$, $\bar j = (j_1,\dots,j_k)$, $k=1,\dots,\rho$. Запишем (7.5.1) в эквивалентном виде

$$\frac{\varepsilon_{\bar{i}\bar{j}}^{(k)}}{\Psi} = R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}, \tag{7.5.2}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \ldots \rho,$$

где $\varepsilon_{\bar{i}\bar{j}}^{(k)} = \eta_{\bar{i}\bar{j}}^{(k)} \omega_{\bar{i}\bar{j}}^{(k)}$.

Тогда в силу теоремы 7.5.1 система нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}}^{(k)} = 0, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m; 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n, \\ \Psi = 0, \quad k = 1, \ldots, \rho \end{cases} \tag{7.5.3}$$

не имеет

- конечных решений в случае $R = R(\lambda)$;
- конечных одномерных решений в случае $R = R(\lambda, \mu)$.

Геометрическое место точек, являющихся корнями алгебраического уравнения

$$\Psi = 0, \tag{7.5.4}$$

назовем конечными полюсами рациональной матрицы R. Геометрическое место точек, являющихся корнями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}}^{(\rho)} = 0 \\ \bar{i} = (i_1 \ldots i_\rho), \bar{j} = (j_1 \ldots j_\rho), \\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < j_\rho \leqslant m, 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n. \end{gathered} \tag{7.5.5}$$

назовем конечными нулями рациональной матрицы R ранга ρ.

Заметим, что при $R := R(\lambda)$ уравнение (7.5.4) является алгебраическим уравнением от одной переменной; система (7.5.5) есть система алгебраических уравнений от одной переменной. При $R := R(\lambda, \mu)$ корни уравнения (7.5.4) являются одномерными, как корни уравнения от двух переменных. Система (7.5.5) есть система нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных и может иметь как нульмерные, так и одномерные корни. Отсюда, конечные полюсы рациональной функции $R(\lambda, \mu)$ являются все одномерными, как корни уравнения (7.5.4); нули $R(\lambda, \mu)$ могут быть дискретными, совпадающими с нульмерными решениями (7.5.5), и непрерывными, совпадающими с одномерными решениями (7.5.5).

Как уже отмечали, система уравнений (7.5.3) не имеет конечных решений в одномерном случае и конечных одномерных решений в двумерном случае. Однако, в двумерном случае эта система может иметь нульмерные решения. В дальнейшем последние будем называть точками неопределенности матрицы $R(\lambda, \mu)$.

Введенные спектральные характеристики инвариантны к унимодулярным преобразованиям рациональной матрицы. Справедливость следует из следствия 7.6.8.

Определение полюсов и нулей рациональной матрицы, данное выше, в случае $R := R(\lambda)$, согласуется с определением полюсов и нулей, обычно даваемым с использованием канонической формы Смита–МакМиллана.

Справедлива теорема [236].

Теорема 7.7. *Любая $m \times n$ рациональная матрица $R(\lambda)$ ранга ρ эквивалентна канонической форме Смита–МакМиллана вида*

$$\Sigma(\lambda) = block\, diag, \left\{ \frac{\varphi_1(\lambda)}{\psi_i(\lambda)}, \dots, \frac{\varphi_\rho(\lambda)}{\psi_\rho(\lambda)}, \mathbb{O} \right\}.$$

Здесь $\varphi_i(\lambda)$, $\psi_i(\lambda)$ для каждого $i = 1, \dots, \rho$ суть взаимно простые полиномы с единичным коэффициентом при старших степенях λ. При этом каждый полином $\varphi_{i+1}(\lambda)$ является делителем предыдущего полинома $\varphi_i(\lambda)$; каждый полином $\psi_i(\lambda)$ является делителем последующего полинома $\psi_{i+1}(\lambda)$. Через $\mathbb{O}$ обозначена нулевая $(m - \rho) \times (n - \rho)$ матрица.

Корни полиномов $\varphi_i(\lambda)\,(i = 1 \dots \rho)$ называются конечными нулями, корни полиномов $\psi_i(\lambda)\,(i = 1 \dots \rho)$ называются конечными полюсами матрицы $R(\lambda)$.

В общем случае одна и та же точка α может быть и нулем, и полюсом матрицы $R(\lambda)$. Кратности σ_i точки α как корня $\varphi_i(\lambda)$, взятые со знаком "+", и как корня $\psi_i(\lambda)$, взятые со знаком "-", называются структурными индексами матрицы $R(\lambda)$ в точке α и обозначаются

$$S[R, \alpha] = \{\sigma_1, \dots, \sigma_\rho\}, \quad \sigma_1 \leqslant \dots \leqslant \sigma_\rho.$$

Суммарные кратности точки α, как нуля и полюса матрицы $R(\lambda)$ определяются соответственно формулами

$$\delta_z(R, \alpha) = \sum_{\sigma_i > 0} \sigma_i,$$

$$\delta_p(R, \alpha) = -\sum_{\sigma_i < 0} \sigma_i.$$

Заметим, что характеристики бесконечной точки ($\lambda = \infty$), определяются как соответствующие характеристики точки $\mu = 0$ рациональной матрицы $R(\mu^{-1})$:

$$S[R, \infty] = \{\sigma_i, \dots, \sigma_\rho\} \quad \sigma_1 \leqslant \dots \leqslant \sigma_\rho.$$

Связь двух введенных определений нуля и полюса рациональной матрицы $R(\lambda)$, а также согласованность двух введенных выше определений нулей и полюсов рациональной матрицы $R(\lambda)$ установлена в работе [46].

7.5.2. Нуль-пространства из полиномиальных решений. При $n > \rho$ сингулярная рациональная матрица R имеет нетривиальное правое нуль-пространство. Нас будут интересовать нуль-пространства из полиномиальных решений R.

Полиномиальный вектор*

$$x = \lambda^t x_t + \dots + x_0, \tag{7.5.6}$$

где $x_k \in C^n$ для $R := R(\lambda)$, $x_k \in C^n[\mu]$ для $R := R(\lambda, \mu)$, называется правым полиномиальным решением матрицы R, если уравнение

$$Rx = 0$$

удовлетворяется при любых значениях параметров λ и λ, μ:

$$R(\lambda)x(\lambda) = 0 \quad \text{для} \quad R := R(\lambda);$$

$$R(\lambda, \mu)x(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{для} \quad R := R(\lambda, \mu).$$

Столбцы полиномиальной матрицы $X := [x_1, \dots, x_{n-\rho}]$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы R, если матрица X не имеет

- конечного спектра в случае $R := R(\lambda)$,
- конечного непрерывного спектра в случае $R := R(\lambda, \mu)$.

При этом базис называется минимальным, если являются линейно независимыми.

- векторные коэффициенты при старших степенях λ в случае $R := R(\lambda)$
- полиномиальные векторные коэффициенты при старших степенях λ и полиномиальные векторные коэффициенты при старших степенях μ в случае $R := R(\lambda, \mu)$.

*Через $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n[\mu]$ обозначены пространство n-мерных векторов с компонентами соответственно из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ и кольца скалярных полиномов от μ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$.

При $m > \rho$ аналогично дается определение левого нуль-пространства рациональной матрицы R и его минимального базиса.

7.5.3. Спектральные задачи для рациональной матрицы и алгоритмы их решения. Спектральными задачами для рациональной матрицы $R(\lambda)$ являются:

– разделение конечных особых точек типа нуль и полюс с последующим вычислением соответствующих им структурных индексов;

– определение полюсно-нулевой структуры на бесконечности;

– построение минимальных базисов нуль-пространств из полиномиальных решений $R(\lambda)$.

Спектральными задачами для рациональной матрицы $R(\lambda, \mu)$ являются:

– разделение конечных особых точек типа нуль и полюс;

– разделение непрерывных и дискретных точек типа нуль;

– вычисление конечных дискретных точек типа нуль;

– вычисление конечных особых точек неопределенности;

– вычисление алгебраических многочленов, соответственно оп-ределяющих совокупности конечных непрерывных нулей и непрерывных полюсов;

– построение не содержащих конечного непрерывного спектра базисов нуль-пространств из полиномиальных решений матрицы $R(\lambda, \mu)$.

Рассмотрим применение алгоритмов несократимой и минимальной факторизаций рациональных матриц к разделению ее нулей и полюсов. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7.8. 1^0. *Пусть рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda)$ ранга ρ представлена в виде несократимой факторизации* (7.2.1)

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda)$$

где $S(\lambda)$, $T(\lambda)$ суть полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы, $T(\lambda)$ – регулярная, матрица $[S(\lambda), T(\lambda)]^B$ не имеет конечного спектра. Тогда конечные особые точки типа нуль матрицы $R(\lambda)$ совпадают с корнями системы нелинейных алгебраических уравнений от одной переменной вида

$$S\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, i_\rho & \\ j_1, & \ldots, & j_\rho \end{pmatrix} = 0, \tag{7.5.7}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\rho \leqslant m,\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n.$$

Конечные особые точки типа полюс матрицы $R(\lambda)$ совпадают с корнями алгебраического полинома

$$\det T(\lambda) = 0. \tag{7.5.8}$$

2^0. *Пусть рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ представлена в виде несократимой факторизации* (7.2.2)

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu) T^{-1}(\lambda, \mu)$$

где $S(\lambda, \mu)$ и $T(\lambda, \mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы, $T(\lambda, \mu)$ – регулярная, матрица $[S(\lambda, \mu), T(\lambda, \mu)]^B$ не имеет конечного непрерывного спектра.

Тогда конечные особые точки типа нуль матрицы $R(\lambda, \mu)$ совпадают с корнями системы нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных вида

$$S\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\rho \\ j_1 & \dots & j_\rho \end{pmatrix} = 0, \tag{7.5.9}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\rho \leqslant m,\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n.$$

Конечные особые точки типа полюс матрицы $R(\lambda, \mu)$ совпадают с корнями нелинейного алгебраического уравнения от двух переменных

$$\det T(\lambda, \mu) = 0. \tag{7.5.10}$$

Следствие 7.9. 1^0. *При несократимой факторизации* (7.2.1) *рациональной матрицы $R(\lambda)$ все конечные особые точки типа полюс и типа нуль ее совпадают с конечными собственными значениями матриц $T(\lambda)$ и $S(\lambda)$ соответственно и ими исчерпываются.*

2^0. *При несократимой факторизации* (7.2.2) *рациональной матрицы $R(\lambda, \mu)$ все конечные особые точки типа полюс и типа нуль ее совпадают с конечными одномерными собственными значениями регулярной матрицы $T(\lambda, \mu)$ и конечными одномерными и нульмерными собственными значениями матрицы $S(\lambda, \mu)$ соответственно и ими исчерпываются.*

Теорема 7.10. 1^0. *Пусть рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda)$ ранга ρ представлена в виде минимальной факторизации* (7.4.1)

$$R(\lambda) := S(\lambda) T^{-1}(\lambda) V(\lambda),$$

где S, T и V суть полиномиальные матрицы размеров $m \times \rho$, $\rho \times \rho$ и $\rho \times n$ соответственно; T – регулярная; матрица $[S, T]^B$ не имеет спектра; матрица $[T, V]$ не имеет конечного спектра.

Тогда конечные особые точки типа полюс матрицы $R(\lambda)$ совпадают с корнями уравнения

$$\det T(\lambda) = 0; \tag{7.5.11}$$

конечные особые точки типа нуль совпадают с корнями системы нелинейных алгебраических уравнений от одной переменной

$$S\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\rho \\ 1 & \dots & \rho \end{pmatrix} = 0, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\rho \leqslant m. \tag{7.5.12}$$

2^0. *Пусть рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ представлена в виде минимальной факторизации* (7.4.2)

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu) T^{-1}(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu),$$

где S, T и V суть двухпараметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times \rho$, $\rho \times \rho$ и $\rho \times n$ соответственно; T – регулярная; матрицы $[S, T]^B$ и $[T, V]$ не имеют непрерывного и конечного непрерывного спектров соответственно.

Тогда конечные особые точки типа полюс матрицы $R(\lambda, \mu)$ совпадают с корнями уравнения

$$\det T(\lambda, \mu) = 0; \tag{7.5.13}$$

конечные особые точки типа нуль совпадают с объединением корней двух систем нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных:

– системы

$$S\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\rho \\ 1 & \dots & \rho \end{pmatrix} = 0, \tag{7.5.14}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\rho \leqslant m;$$

и

– системы

$$\begin{gathered} V\begin{pmatrix} 1 & \dots & \rho \\ j_1 & \dots & j_\rho \end{pmatrix} = 0, \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n. \end{gathered} \tag{7.5.15}$$

Следствие 7.11. 1^0. *При минимальной факторизации* (7.4.1) *рациональной матрицы $R(\lambda)$ все конечные особые точки типа полюс и типа нуль ее совпадают с конечными собственными значениями матриц $T(\lambda)$ и $S(\lambda)$ соответственно и ими исчерпываются.*

2^0. *При минимальной факторизации* (7.4.2) *рациональной матрицы* $R(\lambda, \mu)$ *все конечные особые точки типа полюс и типа нуль ее соответственно совпадают с конечными одномерными собственными значениями матрицы* $T(\lambda, \mu)$ *и объединением конечных одномерных и нульмерных собственными значениями матриц* $S(\lambda, \mu)$ *и* $V(\lambda, \mu)$.

Доказательство теорем 7.8, 7.10 и следствий 7.9, 7.11 к ним приводится в §7.6 (следствия 7.6.2 и 7.17 для $R := R(\lambda)$ и следствия 7.17 и 7.18 для $R := R(\lambda, \mu)$).

Замечание. Учитывая инвариантность спектральных свойств сомножителей из несократимых факторизаций (теорема 7.1.1) и следствия 7.9, 7.11, можно дать следующее определение типов особых точек рациональной матрицы R.

Конечными полюсами рациональной матрицы R, представленной в виде несократимой факторизации*

$$R = ST^{-1}V,$$

называются собственные значения матрицы T, а конечными нулями матрицы R называются собственные значения матриц S и V.

Рассмотрим решение спектральных задач для рациональных матриц.

Вычисление нулей и полюсов матрицы $R(\lambda, \mu)$ требует представления ее в одном из видов несократимой факторизации (7.2.1), (7.3.1), (7.4.1) с последующими вычислениями собственных значений матриц S и T соответственно. Эта задача может быть решена известными методами решения проблемы собственных значений полиномиальной матрицы. Обзор этих методов можно, например, найти в [40, 208].

Вычисление конечных нулей и полюсов матрицы $R(\lambda, \mu)$ требует представления $R(\lambda, \mu)$ в одном из видов несократимой факторизации (7.2.2), (7.3.2) или (7.4.2) с последующим вычислением одномерных и нульмерных собственных значений двухпараметрических полиномиальных матриц. Применение несократимых факторизаций матрицы $R(\lambda, \mu)$ позволяет разделить нули и полюсы ее и решать задачи определения нулей и полюсов раздельно. Конечные нули матрицы $R(\lambda, \mu)$ могут быть как дискретные, так и непрерывные. Прежде всего следует разделить их. Вычисление

*Несократимые факторизации (7.2.1), (7.2.2) и (7.2.9), (7.2.10) являются частными случаями факторизации (7.4.1), (7.4.2) соответственно.

дискретных нулей, после их отделения от одномерных нулей, может быть реализовано с помощью алгоритма, описанного в §6.3. Этот же алгоритм, примененный к соответствующим блочным матрицам, позволяет определять особые точки неопределенности матрицы $R(\lambda, \mu)$.

К сожалению мы не умеем вычислять одномерных собственных значений двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида, а следовательно, не умеем вычислять как одномерных нулей, так и полюсов матрицы $R(\lambda, \mu)$.

Здесь мы приводим некоторые рекомендации по вычислению полюсов как $R(\lambda)$, так и $R(\lambda, \mu)$. Предлагаемый ниже алгоритм позволяет вычисление корней полинома $p(\lambda) := \det\, T(\lambda)$ для $R(\lambda)$ и полинома $p(\lambda, \mu) := \det\, T(\lambda, \mu)$ для $R(\lambda, \mu)$ сводить к разложению $p(\lambda)$ и $p(\lambda, \mu)$ на множители:

$$p(\lambda) = \delta_1(\lambda) \dots \delta_m(\lambda),\; p(\lambda, \mu) = \delta_1(\lambda, \mu) \dots \delta_m(\lambda, \mu)$$

с последующим вычислением корней сомножителей:

$$\delta_i(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad \delta_i(\lambda, \mu) = 0,\; i = 1, \dots, m.$$

Здесь $\delta_i(\lambda)$ и $\delta_i(\lambda, \mu)$ – скалярные полиномы от одной и двух переменных соответственно.

Алгоритм для матриц $T(\lambda)$ и $T(\lambda, \mu)$ имеет одну и ту же схему реализации и сводится к выполнению следующих операций.

(1) Вычисляются полиномы k_i, являющиеся НОК знаменателей элементов i-ой строки $i = 1, \dots, m$ (или столбцов $j = 1, \dots, n$) матрицы R.

(2) Находится регулярная матрица T, собственные значения которой суть искомые полюса R. Эта операция выполняется с использованием одного из алгоритмов несократимой факторизации R, рассмотренных выше.

(3) Определитель T записывается в виде скалярного полинома $p := \det\, T$. Построение p можно реализовать методом Леверье–Фаддеева, предложенного для построения коэффициентов характеристического полинома постоянной матрицы, применив его к раскрытию функционального определителя.

(4) Вычисляются искомые полиномы $\delta_i, \quad i = 1, \dots, m$. Вычисление полиномов $\delta, \quad i = 1, \dots, m$, осуществляется за конечное число m шагов. Опишем типичный (первый) шаг.

Для двух полиномов $p_1 := p$ и k_1 находятся наибольший общий делитель δ_1 и факторизация вида

$$p_1 = \delta_1 p_2.$$

Эта операция повторяется с парой полиномов p_2 и k_2 и т.д. Процесс заканчивается на шаге $m+1$, когда $\delta_{m+1} = \mathrm{const}$. В результате будет построено разложение $\det T$ на множители и задача вычисления полюсов R сведена к вычислению корней уравнений

$$\delta_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Замечание. Без учета кратностей полюса рациональной матрицы R определяются нулями знаменателей всех элементов матрицы R (при условии, что представляющие их дроби являются несократимыми). Так что нули этих значений также можно использовать для вычисления полюсов R.

Из свойств несократимых факторизаций (7.2.1), (7.3.1), (7.4.1) для $R(\lambda)$ и (7.2.2), (7.3.2), (7.4.2) для $R(\lambda, \mu)$ следует, что левое нуль-пространство рациональной матрицы R совпадает с левым нуль-пространством полиномиальной матрицы S. Из несократимой факторизации (7.4.1) и (7.4.2) следует, что правое нуль-пространство R совпадает с правым нуль-пространством полиномиальной матрицы V. Таким образом для определения минимального базиса левого (правого) нуль-пространства рациональной матрицы R достаточно определить минимальный базис полиномиальной матрицы S (матрицы V), входящей в упомянутые выше несократимые факторизации. Напомним, что построение минимального базиса однопараметрической матрицы состоит из двух этапов:

(i) построение некоторого базиса, образованного столбцами унимодулярной матрицы;

(ii) перестройка этого базиса в минимальный.

Для построения базисов можно использовать матрицы из факторизаций, которые не являются несократимыми. В частности, учитывая совпадение правых нуль-пространств матрицы $R(\lambda)$ и полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ из ее базовой факторизации: $R(\lambda) = K^{-1}(\lambda)D(\lambda)$, можно использовать матрицу $D(\lambda)$ для построения правого минимального базиса. При этом (i) автоматически реализуется в процессе построения несократимой факторизации при осуществлении ΔW-1 разложения матрицы $D(\lambda)$: базис ее правого нуль-пространства образует последние $(n-\rho)$ столбцов унимодулярной матрицы $W(\lambda)$ из этого ΔW-1 разложения.

Построение базиса не содержащего непрерывного спектра для двухпараметрической полиномиальной матрицы также состоит из двух этапов:

(i) построение базиса из полиномиальных решений матрицы $S(\lambda,\mu)$ (матрицы $V(\lambda,\mu)$); входящих в несократимую факторизацию $R(\lambda,\mu)$;

(ii) перестройка этого базиса в искомый базис.

Оба этапа реализуются с помощью ΔW-2 алгоритма и подробно описаны в гл. 6.

Точки неопределенности рациональной матрицы $R(\lambda,\mu)$ образуются объединением дискретных собственных значений двух матриц $[S(\lambda,\mu),\, T(\lambda,\mu)]^B$ и $[T(\lambda,\mu),\, V(\lambda,\mu)]$.

Алгоритмы вычисления дискретных собственных значений двухпараметрических полиномиальных матриц описаны в §6.3.

§7.6. Связь несократимых факторизаций с неприводимой реализацией рациональной матрицы

7.6.1. Неприводимая реализация рациональной матрицы.

В теории систем (см., например, [208, 255]) для рациональной $m \times n$-матрица $R(\lambda)$, называемой матрицей передаточной функции, рассматриваются представления вида

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda)V(\lambda) + W(\lambda), \qquad (7.6.1)$$

где

(а) $S(\lambda), T(\lambda)V(\lambda), W(\lambda)$ суть полиномиальные матрицы размеров $m \times q$, $q \times q$, $q \times n$ и $m \times n$ соответственно,

(б) $T(\lambda)$ – регулярная матрица;

(в) матрицы $[T(\lambda), -S(\lambda)]^B$ и $[T(\lambda), V(\lambda)]$ не имеют конечных спектров.

Такое представление матрицы $R(\lambda)$ называется ее неприводимой реализацией (irreducible realization)

Представлению (7.6.1) соотносят полиномиальную $(q+m) \times (q+n)$ матрицу вида

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} T(\lambda) & V(\lambda) \\ -S(\lambda) & W(\lambda) \end{bmatrix}, \qquad (7.6.2)$$

называемую системной матрицей. В большинстве случаев предполагается, что рациональная составляющая в представлении (7.6.1), т.е. рациональная матрица

$$R_1(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda)V(\lambda), \qquad (7.6.3)$$

является чисто рациональной матрицей, так что при $\lambda \to \infty$ матрица $R_1(\lambda)$ стремится к нулевой матрице.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.12. *Конечная полюсно-нулевая структура рациональной матрицы $R(\lambda)$ полностью определяется конечными спектральными характеристиками соответственно матриц $T(\lambda)$ и $P(\lambda)$, связанных с неприводимой реализацией матрицы $R(\lambda)$.*

В основе доказательства теоремы лежит сравнение канонической формы Смита–МакМиллана рациональной матрицы $R(\lambda)$ с каноническими формами Смита полиномиальных матриц $T(\lambda)$ и $P(\lambda)$.

7.6.2. Связь между неприводимой реализацией с несократимыми факторизациями. Установим связь неприводимой реализации рациональной матрицы с несократимыми факторизациями, рассматриваемыми выше.

Очевидно, что для построения неприводимой реализации вида (7.6.1) с чисто рациональной матрицей (7.6.3) достаточно выделить предварительно полиномиальную составляющую из $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) + W(\lambda)$$

и применить к рациональной матрице $R_1(\lambda)$ алгоритм минимальной факторизации из §7.4

$$R_1(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda)V(\lambda),$$

где $T(\lambda)$ – регулярная матрица порядка ρ_1, $\rho_1 := \operatorname{rank} R_1(\lambda)$. В результате будет получена неприводимая реализация вида (7.6.1) с $q = \rho_1$.

Если алгоритм минимальной факторизации применить непосредственно к рациональной матрице $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda)V(\lambda), \tag{7.6.4}$$

где $T(\lambda)$ – регулярная матрица порядка ρ, $\rho = \operatorname{rank} R(\lambda)$, то соответствующая матрица $P(\lambda)$ из (7.6.2) будет иметь следующее представление

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} T(\lambda) & V(\lambda) \\ -S(\lambda) & \mathbb{O} \end{bmatrix}. \tag{7.6.5}$$

Матрица вида (7.6.5) эквивалентна матрице, имеющей обобщенную форму Шура:

$$\theta\, P(\lambda) = \begin{bmatrix} -S(\lambda) & \mathbb{O} \\ T(\lambda) & V(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь θ – матрица перестановки, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$ матрица.

Учитывая свойства таких матриц, а также то, что матрица $V(\lambda)$ при минимальной факторизации вида (7.6.4) не имеет конечного спектра приходим к следующему следствию из Теоремы 7.12.

Следствие 7.13. *При минимальной факторизации вида* (7.6.4) *рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda)$, ранга, ρ ее конечная полюсная структура полностью определяется конечной спектральной структурой $\rho \times \rho$ матрицы $T(\lambda)$, а конечная нулевая структура $R(\lambda)$ полностью определяется конечной спектральной структурой $m \times \rho$-матрицы $S(\lambda)$.*

Аналогичным образом, рассматривая несократимые факторизации рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda)$

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda), \tag{7.6.6}$$

$$R(\lambda) = T^{-1}(\lambda)S(\lambda) \tag{7.6.7}$$

($S(\lambda)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица, а $T(\lambda)$ – регулярная полиномиальная матрица соответствующего порядка), как частные формы представления неприводимой реализации вида (7.6.4), получаем следующее утверждение.

Следствие 7.14. *При несократимых факторизациях видов* (7.6.6) *и* (7.6.7) *конечная полюсная структура матрицы $R(\lambda)$ полностью определяется конечной спектральной структурой матрицы $T(\lambda)$, а конечная нулевая структура матрицы $R(\lambda)$ полностью определяется конечной спектральной структурой матрицы $S(\lambda)$.*

Обобщим на случай двухпараметрических рациональных матриц $R(\lambda, \mu)$ результаты из пункта 7.6.1.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.6.4. *Пусть рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda, \mu)$ представима в виде*

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu) + W(\lambda, \mu), \tag{7.6.8}$$

где

(а) *$S(\lambda, \mu), T(\lambda, \mu), V(\lambda, \mu), W(\lambda, \mu)$ суть полиномиальные матрицы размеров $m \times q$, $q \times q$, $q \times n$ и $m \times n$ соответственно;*

(б) *$T(\lambda, \mu)$ – регулярная матрица;*

(в) *матрицы $[T(\lambda, \mu) - S(\lambda, \mu)]^B$ и $[T(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu)]$ не имеют конечного непрерывного спектра.*

Пусть

$$P(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} T(\lambda,\mu) & V(\lambda,\mu)\\ -S(\lambda,\mu) & W(\lambda,\mu)\end{bmatrix} \tag{7.6.9}$$

полиномиальная $(q+m)\times(q+n)$ *матрица, образованная из входящих в представление* (7.6.8) *матриц.*

Тогда конечные полюсы матрицы $R(\lambda,\mu)$ *с учетом их кратностей совпадают с конечными собственными значениями регулярной матрицы* $T(\lambda,\mu)$*; конечные нули матрицы* $R(\lambda,\mu)$ *с учетом их кратностей совпадают с конечными собственными значениями матрицы* $P(\lambda,\mu)$ *вида* (7.6.9)*; конечные точки неопределенности матрицы* $R(\lambda,\mu)$ *совпадают с объединением конечных дискретных спектров матриц* $[T(\lambda,\mu),-S(\lambda,\mu)]^B$ *и* $[T(\lambda,\mu),V(\lambda,\mu)]$.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 7.16. *Для того, чтобы в точках решения уравнения*

$$\det T=0 \tag{7.6.10}$$

все $(q+1)\times(q+1)$ *миноры матрицы* P *из* (7.6.9) *вида*

$$\det\begin{bmatrix} T & v_j\\ -s_i & w_{ij}\end{bmatrix},\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n, \tag{7.6.11}$$

получаемые окаймлением ее $q\times q$ *блока* T*, обращались в нуль, необходимо и достаточно, чтобы в этих точках выполнялось хотя бы одно из условий:* $\operatorname{rank}[T,-S]^B<q$*, или* $\operatorname{rank}[T,\,V]<q$.

Достаточность утверждения леммы очевидно, так как благодаря линейной зависимости первых q столбцов или первых q строк матрицы P аналогичная зависимость будет иметь место у всех миноров вида (7.6.11), что влечет за собой равенство их нулю.

Докажем необходимость. Покажем, что если не выполняется одно из условий, например, $\operatorname{rank}[T,-S]^B=q$, то обязательно будет выполняться другое условие $\operatorname{rank}[T,\,V]<q$. Пусть все миноры вида (7.6.11) равны нулю. Следовательно, строки (как и столбцы) каждого из таких миноров являются линейно зависимыми. Значит для каждого номера i существует нетривиальный набор чисел $\alpha_{1i},\dots,\alpha_{qi},\beta_i$ таких, что соответствующая линейная комбинация строк минора (7.6.11) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{q}\alpha_{ki}[t_k,\,v_{kj}]+\beta_i[-s_i,\,w_{ij}]=0, \tag{7.6.12}$$

или

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_{kl} t_k - \beta_i s_i = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_{ki} v_{kj} + \beta_i w_{ij} = 0. \tag{7.6.13}$$

Из предположения о том, что $\operatorname{rank}[T, -S]^B = q$ следует, что найдется хотя бы одна строка s_i с таким номером i, что $\operatorname{rank}[T, -s_i]^B = q$. Очевидно, что для этого номера i равенство (7.6.13) может выполняться только для $\beta_i = 0$ (в силу выполнения (7.6.10) это возможно). В этом случае (7.6.12) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_{ki}[t_k,\, v_{kj}] = 0$$

Так как это равенство будет выполняться при любом j, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_{ki}[t_k,\, v_k] = 0,$$

означающее линейную зависимость строк матрицы $[T,\, V]$, т.е. выполнение неравенства $\operatorname{rank}[T,\, V] < q$.

Аналогичным образом доказывается, что предположение о том, что $\operatorname{rank}[T,\, V] = q$ приводит к выполнению неравенства $\operatorname{rank}[T,\, -S] < q$.

Перейдем к доказательству Теоремы 7.15 Приведем вначале известный факт (см., например, [251]) о связи любого $k \times k$ минора рациональной матрицы R, представленной в виде (7.6.8) с $(q+k) \times (q+k)$ минором матрицы P вида (7.6.9):

$$R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\det T}\, P\begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+i_1 & \dots & q+i_k \\ 1 & \dots & q & q+j_1 & \dots & q+j_k \end{pmatrix}, \tag{7.6.14}$$
$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \qquad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant m, \qquad k = 1, \ldots, \rho.$$

Установим, вначале, что $\det T$ является НОК знаменателей всех миноров всех порядков матрицы R. Из (7.6.14) следует, что $\det T$ является общим кратных знаменателей этих миноров. Для доказательства того, что он является наименьшим достаточно показать, что система нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \det T = 0, \\ P\begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+i_1 & \dots & q+i_k \\ 1 & \dots & q & q+j_1 & \dots & q+j_k \end{pmatrix} = 0, \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \dots, s \end{cases}$$

не имеет конечных одномерных решений. В силу Леммы 7.16 для этого необходимо и достаточно, чтобы не имели конечных одномерных собственных значений матрицы $[T, -S]^B$ и $[T, V]$. Но последнее имеет место по условию теоремы.

Так как $\det T$ является НОК знаменателей всех миноров всех порядков матрицы R, то одномерные корни уравнения

$$\det T = 0,$$

т.е. конечные одномерные собственные значения регулярной матрицы T, определяют все конечные полюса матрицы R.

При $k = \rho$ выражения (7.6.14) принимают вид

$$R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\rho \\ j_1 & \dots & j_\rho \end{pmatrix} = \frac{1}{\det T} P\begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+i_1 & \dots & q+i_\rho \\ 1 & \dots & q & q+j_1 & \dots & q+j_\rho \end{pmatrix},$$

$$1 \leqslant i_1 < \dots < i_\rho \leqslant m, \qquad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho < n$$

Следовательно, по определению, конечные нули матрицы R полностью определяются решениями (нульмерными и одномерными) системы нелинейных алгебраических уравнений

$$P\begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+i_1 & \dots & q+i_\rho \\ 1 & \dots & q & q+j_1 & \dots & q+j_\rho \end{pmatrix} = 0,$$

$$1 \leqslant i_1 < \dots < i_\rho \leqslant m, \qquad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant n,$$

т.е. конечными нульмерными и одномерными собственными значениями матрицы P.

Система (7.5.3), нульмерные решения которой характеризуют точки неопределенности матрицы $R(\lambda, \mu)$, принимает вид

$$\begin{cases} \det T = 0, \\ P\begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+i_1 & \dots & q+i_k \\ 1 & \dots & q & q+j_1 & \dots & q+j_k \end{pmatrix} = 0, \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m, \qquad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant n, \qquad k = 1, \dots, \rho. \end{cases}$$

С учетом Леммы 7.6.5 эти решения должны быть нульмерными собственными значениями матрицы $[T,\, -S]^B$, или матрицы $[T,\, V]$, так что объединение спектров этих матриц совпадают с конечными точками неопределенности матрицы $R(\lambda,\mu)$. Теорема доказана.

Рассмотрим связь неприводимой реализации двухпараметрической матрицы с ее несократимыми факторизациями.

Выделение полиномиальной части из $R(\lambda,\mu)$:

$$R(\lambda,\mu) = R_1(\lambda,\mu) + W(\lambda,\mu)$$

и применение к $R_1(\lambda,\mu)$ алгоритма минимальной факторизации, описанного в §7.4, приведет к представлению

$$R(\lambda,\mu) = S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu) + W(\lambda,\mu)$$

где $\rho_1 = \operatorname{rank} R_1(\lambda,\mu)$.

Применение алгоритма минимальной факторизации непосредственно к матрице $R(\lambda,\mu)$

$$R(\lambda) = S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu) \tag{7.6.15}$$

дает частную форму неприводимой реализации рациональной матрицы с $W(\lambda,\mu) = \mathbb{O}$. В этом случае матрица $P(\lambda,\mu)$ из теоремы 7.15 имеет вид

$$P(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} T(\lambda,\mu) & V(\lambda,\mu) \\ -S(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

т.е. эквивалентна обобщенной форме Шура. Тогда из Теоремы 7.12 вытекает следующее утверждение.

Следствие 7.17. *При минимальной факторизации* (7.6.15) *рациональной $m\times n$ матрицы $R(\lambda,\mu)$ ранга ρ конечные полюса матрицы $R(\lambda,\mu)$ и их кратности совпадают с конечными одномерными собственными значениями матрицы $T(\lambda,\mu)$, а конечные нули матрицы $R(\lambda,\mu)$ и их кратности совпадают с совокупностью конечных нульмерных и одномерных собственных значений матриц $S(\lambda,\mu)$ и $V(\lambda,\mu)$.*

Несократимые факторизации вида

$$R = S(\lambda,\mu)\,T^{-1}(\lambda,\mu) \tag{7.6.16}$$

$$R(\lambda,\mu) = T^{-1}(\lambda,\mu)\,S(\lambda,\mu) \tag{7.6.17}$$

могут рассматриваться как частные виды представления (7.6.8). Из теоремы 7.15 получаем следующее утверждение

Следствие 7.18. *При несократимых факторизациях* (7.6.16) *или* (7.6.17) *рациональной матрицы* $R(\lambda,\mu)$ *конечные полюса матрицы* $R(\lambda,\mu)$ *и их кратности совпадают с конечными одномерными собственными значениями матрицы* $T(\lambda,\mu)$, *а конечные нули матрицы* $R(\lambda,\mu)$ *и их кратности совпадают с конечными нульмерными собственными значениями матрицы* $S(\lambda,\mu)$.

Замечание Теорема 7.15 и следствия к ней являются обобщениями теорем 7.8, 7.10 и следствий к ним.

Следствие 7.19. *Особые точки рациональных матриц инвариантны по отношению к унимодулярным преобразованиям.*

Действительно, пусть рациональные матрицы R и R_1 связаны преобразованием

$$R_1 = QRU,$$

где Q и U – унимодулярные матрицы. Если матрица R представлена в виде несократимой факторизации

$$R = ST^{-1}V,$$

то для матрицы R_1 имеем представление

$$R_1 = S_1T_1^{-1}V_1 \tag{7.6.18}$$

где

$$S_1 = QS, \quad T_1 = T, \quad V_1 = VU. \tag{7.6.19}$$

Поскольку преобразования

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ -S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ -S \end{bmatrix}, \quad [T_1V_1] = [T\ V]\begin{bmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & U \end{bmatrix} \tag{7.6.20}$$

являются унимодулярными, факторизация (7.6.18) матрицы R_1 также является несократимой.

Следствие об инвариантности особых точек рациональных матриц R и R_1 вытекают теперь из утверждений теоремы 7.15 и унимодулярности преобразований (7.6.19) и (7.6.20).

Глава 8. Применение методов решения спектральных задач к решению параметрических задач алгебры

Рассматривается применение методов решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц к решению некоторых параметрических задач алгебры. Глава состоит из шести параграфов.

В §§8.1 предлагаются алгоритмы выполнения некоторых операций над скалярными полиномами от одной и двух переменных, как то: вычисление общего наибольшего делителя (ОНД) и наименьшего общего кратного (НОК) последоваетльности скалярных полиномов, деление полиномов на их общий делитель, некоторые виды факторизации полиномов. В §§8.2 рассмотрены алгоритмы некоторых операций над матричными полиномами, как то: ОНД и НОК последовательности матричных полиномов и некоторые виды их факторизаций.

В §8.3 предлагаются методы построения обратной и псевдообратной матрицы и решения систем с матрицами, элементы которых полиномиально или рационально зависят от одного и двух параметров.

В §8.4 рассматриваются два метода решения систем нелинейных алгебраических уравнений от одной переменной (СНАУ-1). Первый сводит решение СНАУ-1 к вычислению собственных значений регулярного пучка матриц. Второй метод решение СНАУ-1 сводит к вычислению корней ОНД скалярных полиномов от одной переменной.

В §8.5 рассматриваются методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных (СНАУ-2). Первый метод сводит решение СНАУ-2 к решению проблемы собственных значений полиномиальной матрицы. Второй метод основан на применении ΔW-2 разложения некоторой вспомогательной матрицы, составленной по коэффициентам системы. Находится общий наибольший делитель (ОНД) полиномов, содержащий все конечные одномерные решения СНАУ-2. Вычисление нульмерных решений (λ_{j*}, μ_{i*}) сводится к вычислению корней μ_{i*} алгебраических полиномов с последующим вычислением λ_{j*} как корней некоторых СНАУ-1. Третий метод рассматривает решение СНАУ-2 как задачу на определение одномерных и нульмерных собственных значений пучка однопараметрических полиномиальных матриц.

В §8.6 предлагается некоторый подход к оценке неустранимой погрешности (погрешности исходных данных) на решение систем линейноалгебраических уравнений с постоянными матрицами.

§8.1 Операции над скалярными полиномами от одной и двух переменных [48, 51]

Ниже рассматривается применение ΔW-q $q = 1, 2$ алгоритмов к выполнению некоторых операций над скалярными полиномами от одной и двух переменных, как то: вычисление общего наибольшего делителя и наименьшего общего кратного для последовательности скалярных полиномов, деление полиномов на их общих делитель, разложение полинома от двух переменных на неприводимые множители.

8.1.1. Вычисление общего наибольшего делителя (ОНД) полиномов от одной переменной.

Пусть $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ – заданные скалярные полиномы. Требуется найти разложение вида:

$$p_k(\lambda) = \delta(\lambda)\omega_{1k}(\lambda) \quad k = 1, \dots, n, \tag{8.1.1}$$

где $\delta(\lambda)$ есть ОНД полиномов $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$; $\omega_{11}(\lambda), \dots, \omega_{1n}(\lambda)$ – взаимно простые полиномы. С этой целью выполняются следующие операции.

(1). Формируется полиномиальная матрица-строка

$$\mathfrak{A}(\lambda) = [p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)]$$

и находится ее ΔW-1 разложение

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\delta(\lambda), \mathbb{O}],$$

где $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица, $\delta(\lambda)$ – скалярный полином, который является искомым ОНД.

(2). Находится первая строка унимодулярной матрицы, обратной к матрице $W(\lambda)$:

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(\lambda) & \dots & \omega_{1n}(\lambda) \\ * & \dots & * \end{bmatrix},$$

(3). Из равенства

$$\mathfrak{A}(\lambda) = [\delta(\lambda), \mathbb{O}]W^{-1}(\lambda)$$

находятся искомые (8.1.1) разложения, так как $\omega_{11}(\lambda), \dots, \omega_{1n}(\lambda)$ суть взаимно простые полиномы как элементы строки унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$.

8.1.2. Деление полиномов от от одной переменной на общий делитель.

Пусть скалярные полиномы $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ таковы, что $p(\lambda)$ делится на $q(\lambda)$ без остатка. Чтобы получить частное $p(\lambda)/q(\lambda)$ выполняются следующие операции.

(1). Формируется полиномиальная матрица $\mathfrak{A}(\lambda) = [p(\lambda), q(\lambda)]$ и находится ее ΔW-1 разложение

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\delta(\lambda), \mathbb{O}],$$

где $\delta(\lambda)$ есть общий наибольший делитель $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$, так что $\delta(\lambda)$ отличается от $q(\lambda)$ разве лишь постоянными множителем.

(2). Вычисляется первая строка обратной матрицы

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(\lambda) & \omega_{12} \\ * & * \end{bmatrix},$$

где $\omega_{12} = \mathrm{const} \neq 0$.

(3). Искомое частное находится по формуле $p(\lambda)/q(\lambda) = = \omega_{11}(\lambda)/\omega_{12}$. Алгоритм деления без остатка можно обобщить на деление нескольких скалярных полиномов. Пусть требуется найти частные от деления полиномов $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ на $q(\lambda)$, причем известно, что каждый из $p_k(\lambda)$ делится на $q(\lambda)$ без остатка. Вычисление искомых частных осуществляется выполнением следующих операций.

(1). Формируется матрица $\mathfrak{A}(\lambda) = [p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda), q(\lambda)]$ и находится ее ΔW-1 разложение:

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\delta(\lambda), \mathbb{O}].$$

(2). Вычисляется первая строка матрицы

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(\lambda) & \dots & \omega_{1n}(\lambda) & \omega_{1,n+1} \\ * & \dots & * & * \end{bmatrix}.$$

Здесь $\omega_{1,n+1}$ есть ненулевая константа.

(3). Искомые частные находятся по формуле

$$r_k(\lambda) = \omega_{1k}(\lambda)/\omega_{1,n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{8.1.2}$$

8.1.3. Вычисление наименьшего общего кратного (НОК) полиномов от одной переменной.

Пусть требуется найти наименьшее общее кратное для заданных скалярных полиномов $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$, т.е. требуется найти скалярный полином $k(\lambda)$ и взаимно простые скалярные полиномы $\omega_1(\lambda), \dots, \omega_n(\lambda)$, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} k(\lambda) = p_1(\lambda)\omega_1(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k(\lambda) = p_n(\lambda)\omega_n(\lambda). \end{cases} \tag{8.1.3}$$

С этой целью выполняются следующие операции.

(1). Используя алгоритм п.8.1.1, находятся разложения вида

$$p_k(\lambda) = \delta(\lambda)\omega_{1k}(\lambda) \quad k = 1, \dots, n, \tag{8.1.4}$$

где $\delta(\lambda)$ есть ОНД полиномов $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$; $\omega_{11}(\lambda), \dots, \omega_{1n}(\lambda)$ – взаимно простые полиномы.

(2). Вычисляются скалярные полиномы

$$\widehat{p}_k(\lambda) = \Omega(\lambda)/\omega_{1k}(\lambda),$$

где $\Omega(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n} \omega_{1i}(\lambda)$ $(k = 1, \dots, n)$, например, используя алгоритм п.8.1.2.

(3). Для каждого полинома последовательности $\widehat{p}_1(\lambda), ..., \widehat{p}_n(\lambda)$, используя алгоритм п.8.1.1, находятся разложения вида

$$\widehat{p}_k(\lambda) = \widehat{\delta}(\lambda)\widehat{\omega}_{1k}(\lambda) \quad k = 1, \dots, n, \tag{8.1.5}$$

где $\widehat{\delta}(\lambda)$ есть ОНД полиномов $\widehat{p}_1(\lambda), \dots, \widehat{p}_n(\lambda)$; $\widehat{\omega}_{1k}(\lambda)$ $(k = 1, \dots, n)$ – взаимно простые полиномы.

(4). Искомые многочлены $k(\lambda)$ и $\omega_1(\lambda_1), \dots, \omega_n(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} k(\lambda) = p_1(\lambda)\widehat{\omega}_{11}(\lambda) \\ \omega_k(\lambda) = \widehat{\omega}_{1k}(\lambda) \quad k = 1, \dots, n \end{gathered} \tag{8.1.6}$$

Для обоснования алгоритма достаточно установить для полиномов (8.1.6) справедливость равенств (8.1.3).

Рассмотрим отдельно правую и левую части (8.1.3), предварительно умножив каждую на полином $\widehat{\delta}(\lambda)$. В предположении, что имеют место (8.1.4) и (8.1.5), имеем

$$k(\lambda)\widehat{\Delta}(\lambda) = p_1(\lambda)\widehat{\omega}_{11}(\lambda)\widehat{\delta}(\lambda) = p_1(\lambda)\widehat{p}_1(\lambda) = p_1(\lambda)\frac{\Omega(\lambda)}{\omega_{11}(\lambda)} = \delta(\lambda)\Omega(\lambda)$$

$$p_k(\lambda)\widehat{\omega}_{1k}(\lambda)\delta(\lambda) = p_k(\lambda)\widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(\lambda) = p_k(\lambda)\frac{\Omega(\lambda)}{\omega_{1k}(\lambda)} = \delta(\lambda)\Omega(\lambda).$$

Отсюда следует справедливость (8.1.3), если учесть, что $\omega_k(\lambda) \equiv \widehat{\omega}_{1k}(\lambda)$ $(k = 1, \dots, n)$ суть взаимно простые полиномы как элементы строки унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$.

8.1.4. Относительная факторизация полиномов от двух переменных.

1) Пусть $f(\lambda,\mu)=d_s(\mu)\lambda^s+\ldots+d_0(\mu)$ – скалярный полином от двух переменных. Здесь $d_k(\mu)$ $(k=s,s-1,\ldots,0)$ суть скалярные полиномы от μ.

Требуется получить разложение вида

$$f(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{f}(\lambda,\mu), \tag{8.1.7}$$

где $\delta(\mu)$ и $\widehat{\delta}(\lambda)$ – скалярные полиномы, $\widehat{f}(\lambda,\mu)$ – скалярный полином от двух переменных, не имеющий своими делителями полиномов от одной переменной. Для этого нужно выполнить следующие операции.

(1). Найти ОНД $\delta(\mu)$ полиномов $d_s(\mu),\ldots,d_0(\mu)$ и разложения вида

$$d_k(\mu)=\delta(\mu)\omega_{1k}(\mu)\quad k=s,s-1,\ldots,0. \tag{8.1.8}$$

используя алгоритм п.8.1.1 вычисления ОНД.

(2). Принимая во внимание (8.1.7), записать $f(\lambda,\mu)$ по степеням μ

$$f(\lambda,\mu)=\delta(\mu)[\omega_{1s}(\mu)\lambda^s+\ldots+\omega_{10}(\mu)]=\widehat{d}_t(\lambda)\mu^t+\ldots+\widehat{d}_0(\lambda).$$

(3). Найти $\widehat{\delta}(\lambda)$ – ОНД полиномов $\widehat{d}_t(\lambda),\ldots,\widehat{d}_0(\lambda)$ и разложения вида

$$\widehat{d}_k(\lambda)=\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{\omega}_{1k}(\lambda),\qquad k=0,\ldots,t. \tag{8.1.9}$$

(4). Учитывая равенства (8.1.9) и (8.1.8), записать $f(\lambda,\mu)$ в искомом виде (8.1.7)

$$f(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{f}(\lambda,\mu),$$

где $\widehat{f}(\lambda,\mu)=\widehat{\omega}_{1t}(\lambda)\mu^t+\cdots+\widehat{\omega}_{10}(\mu)$.

2) Пусть $f_1(\lambda,\mu),\ldots,f_n(\lambda,\mu)$ – последовательность скалярных полиномов. Требуется каждый из полиномов $f_k(\lambda,\mu)$ $(k=1,\ldots,n)$ представить в виде*

$$f_k(\lambda,\mu)=\Delta(\mu)\widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{f}_k(\lambda,\mu)\qquad k=1,\ldots,n. \tag{8.1.10}$$

Здесь $\Delta(\mu)$ и $\widehat{\Delta}(\lambda)$ – скалярные полиномы от одной переменной, являющиеся общими делителями полиномов $f_k(\lambda,\mu)$, $(k=$

*К разложениям вида (8.1.8), (8.1.10) будем ссылаться как к относительной факторизации полинома от двух переменных.

$1, \dots, n$), а последовательность полиномов $\widehat{f}_1(\lambda, \mu), \dots, \widehat{f}_n(\lambda, \mu)$ не имеет своими общими делителями полиномов от одной переменной.

Для вычисления разложений (8.1.10) надо выполнить следующие операции.

(1). Каждый из полиномов $f_k(\lambda, \mu)$ разложить на неприводимые множители

$$f_k(\lambda, \mu) = \widehat{\delta}_k(\lambda)\delta_k(\mu)\widetilde{f}_k(\lambda, \mu).$$

(2). Используя алгоритм вычисления ОНД найти разложения

$$\widehat{\delta}_k(\lambda) = \widehat{\Delta}(\lambda)\omega_{1k}(\lambda), \quad \text{где} \quad \widehat{\Delta}(\lambda) \ - \ \text{ОНД}\big\{\widehat{\delta}_1(\lambda), \dots, \widehat{\delta}_n(\lambda)\big\};$$
$$\widehat{\omega}_{11}(\lambda), \dots, \widehat{\omega}_{1n}(\lambda) \ - \ \text{взаимно простые полиномы;}$$
$$\delta_k(\mu) = \Delta(\mu)\omega_{1k}(\mu), \quad \text{где} \quad \Delta(\mu) \ - \ \text{ОНД}\big\{\delta_1(\mu), \dots, \delta_n(\mu)\big\},$$
$$\omega_{11}(\mu), \dots, \omega_{1n}(\mu) \ - \ \text{взаимно простые полиномы.}$$

Тогда в результате выполнения операций (1) и (2) каждый полином $f_k(\lambda, \mu)$ может быть представлен в искомом (8.1.10) виде.

8.1.5. Вычисление ОНД полиномов от двух переменных.

Пусть

$$f_1(\lambda, \mu), f_2(\lambda, \mu), \dots, f_q(\lambda, \mu) \tag{8.1.11}$$

суть заданная последовательность скалярных полиномов, для которых следует найти $h(\lambda, \mu)$, т.е. ОНД, и разложения вида

$$f_k(\lambda, \mu) = h(\lambda, \mu)\omega_k(\lambda, \mu), \quad k = 1, \dots, q, \tag{8.1.12}$$

где $\omega_k(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, q$, взаимно простые полиномы от двух переменных.

Для вычисления (8.1.12) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя алгоритм из 8.1.4, каждый полином $f_k(\lambda, \mu)$ из (8.1.11) представить в виде

$$f_k(\lambda, \mu) = \Delta_k(\mu)\widehat{\Delta}_k(\lambda)\widehat{f}_k(\lambda, \mu), \quad k = 1, \dots, q. \tag{8.1.13}$$

(2) Используя алгоритм п. (8.1.1), найти $\delta(\mu)$ и $\widehat{\delta}(\lambda)$, т.е. общие наибольшие делители последовательностей полиномов от одной переменной $\Delta_1(\mu), \dots, \Delta_q(\mu)$ и $\widehat{\Delta}_1(\lambda), \dots, \widehat{\Delta}_q(\lambda)$ соответственно, и разложения видов

$$\begin{aligned} \Delta_k(\mu) &= \delta(\mu)u_k(\mu); \\ \widehat{\Delta}_k(\lambda) &= \widehat{\delta}(\lambda)\widehat{u}_k(\lambda), \quad k = 1, \dots, q, \end{aligned} \tag{8.1.14}$$

где $u_1(\mu), \ldots, u_q(\mu)$ и $\widehat{u}_1(\lambda), \ldots, \widehat{u}_q(\lambda)$ суть последовательности взаимно простых полиномов.

(3) Каждый полином $f_k(\lambda, \mu)$ из (8.1.11) с учетом (8.1.13) и (8.1.14) записать в виде

$$f_k(\lambda, \mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda) g_k(\lambda, \mu), \tag{8.1.15}$$

где $g_k(\lambda, \mu) = u_k(\mu)\widehat{u}_k(\lambda)\widehat{f}_k(\lambda, \mu)$, $k = 1, \ldots, q$.

(4) Сформировать двухпараметрическую полиномиальную матрицу

$$G(\lambda, \mu) = [g_1(\lambda, \mu), \ldots, g_q(\lambda, \mu)]$$

и, используя ΔW-2 алгоритм, найти ее ΔW-2 факторизацию вида

$$G(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [g(\lambda, \mu), 0, \ldots, 0], \tag{8.1.16}$$

где полином $g(\lambda, \mu)$ отличается от искомого ОНД $h(\lambda, \mu)$ множителями $(\mu - \mu_i^*)$; $\mu = \mu_i^*$ суть корни $\det W(\lambda, \mu)$, которые, как следует из ΔW-2 алгоритма, определяются в процессе реализации разложения (8.1.16).

(6) Используя алгоритм п. 8.1.4, разложить полином $g(\lambda, \mu)$ на множители

$$g(\lambda, \mu) = \nabla(\mu)\widehat{h}(\lambda, \mu). \tag{8.1.17}$$

Здесь $\widehat{h}(\lambda, \mu)$ – полином, не имеющий делителями полиномов от переменной μ и от переменной λ.

Заметим, что по построению в (8.1.17) полином $\widehat{\Delta}(\lambda)$ от переменной λ будет отсутствовать, так что для вычисления (8.1.17) достаточно реализовать (1) и (2) шаги относительного разложения полинома от двух переменных.

Тогда искомый ОНД полиномов (8.1.11) будет

$$h(\lambda, \mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{h}(\lambda, \mu). \tag{8.1.18}$$

(7) Для построения разложения вида (8.1.12) следует найти первую строку матрицы $W^{-1}(\lambda, \mu)$, входящую в разложение (8.1.16). Для этого, используя, например,, метод Леверье–Фаддеева, надо получить $W^{-1}(\lambda, \mu)$ в виде

$$W^{-1}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\det W(\lambda, \mu)} B_{n-1}(\lambda, \mu),$$

где $B_{n-1}(\lambda, \mu)$ есть союзная для $W(\lambda, \mu)$ матрица.

Запишем первую строку $W^{-1}(\lambda,\mu)$ в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{\det W(\lambda,\mu)}[b_1(\lambda,\mu),\dots,b_q(\lambda,\mu)] = \\ \frac{1}{\nabla(\mu)}\big[\omega_1(\lambda,\mu),\dots,\omega_q(\lambda,\mu)\big].\end{gathered} \tag{8.1.19}$$

Для этого выполняются следующие операции

(i) Используя алгоритм п. 8.1.4 находятся разложения вида

$$b_k(\lambda,\mu) = \beta_k(\mu)\hat{b}_k(\lambda,\mu), \ \ k = 1,\dots,q,$$

где $\hat{b}_k(\lambda,\mu)$ не имеют общим делителем полиномов от μ.

(ii) Находится $\widehat{\nabla}(\mu)$, т.е. ОНД последовательности полиномов $\beta_k(\mu)$, $k = 1,\dots,q$, и разложения вида

$$\beta_k(\mu) = \widehat{\nabla}(\mu)\widetilde{\omega}_k(\mu),$$

где $\omega_k(\mu)$, $k = 1,\dots,q$, взаимно простые полиномы.

Имеем $b_k(\lambda,\mu) = \widehat{\nabla}(\mu)\omega_k(\lambda,\mu)$, $\omega_k(\lambda,\mu) := \widehat{\omega}_k(\mu)\widehat{b}_k(\lambda,\mu)$. Отсюда, учитывая, что $\det W(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\widehat{\nabla}(\mu)$, получим (8.1.19).

С учетом (8.1.16)–(8.1.19) получим

$$\begin{aligned}\big[f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu)\big] &= \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\big[g_1(\lambda,\mu),\dots,g_q(\lambda,\mu)\big] = \\ &= \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)h(\lambda,\mu)\big[\omega_1(\lambda,\mu),\dots,\omega_q(\lambda,\mu)\big],\end{aligned}$$

так что

$$f_k(\lambda,\mu) = h(\lambda,\mu)\omega_k(\lambda,\mu), \quad k = 1,\dots,q. \tag{8.1.20}$$

Выражения (8.1.18) и (8.1.20) дают соответственно требуемый ОНД последовательности полиномов (8.1.11) и разложения вида (8.1.12).

8.1.6. Деление полиномов от двух переменных на общий делитель.

Пусть полином $\varphi(\lambda,\mu)$ есть общий делитель последовательности полиномов $f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu)$.

Требуется вычислить частные

$$f_k(\lambda,\mu)/\varphi(\lambda,\mu), \quad k = 1,\dots,q.$$

С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Используя операции (1)–(3) алгоритма п.8.1.2.2 для вычисления ОНД последовательности полиномов $f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu)$, $f_{q+1}(\lambda,\mu)$, где $f_{q+1}(\lambda,\mu)\equiv\varphi(\lambda,\mu)$, получить разложения вида

$$f_k(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)g_k(\lambda,\mu),\quad k=1,\dots,q+1. \tag{8.1.21}$$

(2) Сформировать $1\times(q+1)$ матрицу

$$G(\lambda,\mu)=\big[g_1(\lambda,\mu),\dots,g_{q+1}(\lambda,\mu)\big]$$

и, используя ΔW-2 алгоритм, найти разложение вида

$$G(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=\big[g(\lambda,\mu),0,\dots,0\big]. \tag{8.1.22}$$

(3) Полином $g(\lambda,\mu)$ разложить на относительно неразложимые множители по переменной μ, т.е. представить его в виде (8.1.7):

$$g(\lambda,\mu)=\nabla(\mu)\widehat{h}(\lambda,\mu). \tag{8.1.23}$$

Тогда (8.1.22) примет вид

$$\big[g_1(\lambda,\mu),\dots,g_{q+1}(\lambda,\mu)\big]=\big[\nabla(\mu)\widehat{h}(\lambda,\mu),0,\dots,0\big]W^{-1}(\lambda,\mu). \tag{8.1.24}$$

(4) Найти первую строку матрицы $W^{-1}(\lambda,\mu)$:

$$\frac{1}{\nabla(\mu)}\big[\omega_1(\lambda,\mu),\dots,\omega_{q+1}(\lambda,\mu)\big].$$

Тогда с учетом (8.1.21)–(8.1.24) будем иметь равенства

$$f_k(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{h}(\lambda,\mu)\omega_k(\lambda,\mu)\equiv h(\lambda,\mu)\omega_k(\lambda,\mu),\quad k=1,\dots,q+1.$$

Очевидно, $f_{k+1}(\lambda,\mu)\equiv\varphi(\lambda,\mu)$ отличается от ОНД $h(\lambda,\mu)$ полиномов $f_1(\lambda,\mu),\dots,f_{q+1}(\lambda,\mu)$ разве лишь множителем (обозначим его ω_{q+1}), который есть константа $\omega_{q+1}(\lambda,\mu)\equiv\omega_{q+1}$, не зависящая от λ и μ: Тогда искомые частные будут

$$\frac{f_k(\lambda,\mu)}{\varphi(\lambda,\mu)}=\frac{\omega_k(\lambda,\mu)}{\omega_{q+1}},\quad k=1,\dots,q.$$

8.1.7. Вычисление НОК полиномов от двух переменных.

Пусть требуется найти НОК для последовательности полиномов

$$f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu). \tag{8.1.25}$$

Другими словами, требуется найти скалярный полином $k(\lambda,\mu)$ такой, что (с точностью до постоянных множителей) выполняются равенства:

$$k(\lambda,\mu)=f_1(\lambda,\mu)\widetilde{\omega}_1(\lambda,\mu)=\ldots=f_q(\lambda,\mu)\widetilde{\omega}_q(\lambda,\mu), \tag{8.1.26}$$

где $\widetilde{\omega}_1(\lambda,\mu),\ldots,\widetilde{\omega}_q(\lambda,\mu)$ суть взаимно простые полиномы над кольцом скалярных полиномов.

Для вычисления $k(\lambda,\mu)$ требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя алгоритм п.8.1.5, найти $h(\lambda,\mu)$, т.е. ОНД скалярных полиномов (8.1.25) в виде

$$h(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{h}(\lambda,\mu).$$

(2) Используя алгоритм п.8.1.6, найти $\omega_k(\lambda,\mu)$, $k=1,\ldots,q$ – частные от деления исходных полиномов на их ОНД.

(3) Для скалярных полиномов $\omega_k(\lambda,\mu)$, $k=1,\ldots,q$, выполнить следующие шаги. Пусть $\Omega_1(\lambda,\mu)=\omega_1(\lambda,\mu)$.

(3.1) Используя алгоритмы п.8.1.2 и 8.1.3 для полиномов $\Omega_1(\lambda,\mu)$ и $\omega_2(\lambda,\mu)$ найти ОНД и частные от деления этих двух полиномов на их ОНД. Пусть $\gamma_1(\lambda,\mu)$ – ОНД$(\Omega_1(\lambda,\mu),\omega_2(\lambda,\mu))$, обозначим $\beta_1(\lambda,\mu)=v_1(\lambda,\mu)\cdot v_2(\lambda,\mu)$, где $v_i(\lambda,\mu)$ – частные от деления полиномов $\Omega_1(\lambda,\mu)$ и $\omega_2(\lambda,\mu)$ на их ОНД.

(3.2) Построить полином $\Omega_2(\lambda,\mu)=\beta_1(\lambda,\mu)\cdot\gamma_1(\lambda,\mu)$.

(3.3) Для $i=3,\ldots,q$ выполнить шаги (3.1) и (3.2), т.е. найти полином $\Omega_{q-1}(\lambda,\mu)$, который будет являтся НОК полиномов $\omega_1(\lambda,\mu),\ldots,\omega_q(\lambda,\mu)$.

(3.4) НОК исходных полиномов $f_1(\lambda,\mu),\ldots,f_q(\lambda,\mu)$ вычислить по формуле

$$k(\lambda,\mu)=h(\lambda,\mu)\cdot\Omega_{q-1}(\lambda,\mu).$$

§8.2. Операции над матричными полиномами ([42])

8.2.1. Вычисление ОНД матричных полиномов.

Пусть $D_1(\lambda),\ldots,D_r(\lambda)$ – заданные размеров $m\times n$ матричные полиномы (полиномиальные матрицы). Задача состоит в построении разложений вида

$$D_k(\lambda)=\Delta(\lambda)W_{1k}(\lambda),\quad k=1,\ldots,r, \tag{8.2.1}$$

где $W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)$ – слева взаимно простые* $\rho \times n$ ранга ρ матричные полиномы; $\Delta(\lambda)$ – $m \times \rho$ матричный полином, полного столбцового ранга, называемый левым ОНД матричных полиномов $D_1(\lambda), \ldots, D_r(\lambda)$.

Для вычисления разложений (8.2.1) выполняются следующие операции.

(1). Формируется матрица $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv [D_1(\lambda), \ldots, D_r(\lambda)]$ и находится ее ΔW-1 разложение:

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}],$$

где $\Delta(\lambda)$ – $m \times \rho$ полиномиальная матрица полного столбцового ранга $\rho(\rho = \operatorname{rank}\mathfrak{A}(\lambda))$, спектр которой совпадает с конечным спектром $\mathfrak{A}(\lambda) : \mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n - \rho)$ матрица; $W(\lambda)$ – унимодулярная $n \times n$ матрица.

(2). Вычисляется первая $\rho \times nr$ блочная строка матрицы

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} W_{11}(\lambda) & \ldots & W_{1r}(\lambda) \\ * & \ldots & * \end{bmatrix},$$

где $W_{1k}(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, r)$ суть $\rho \times n$ матрицы такие, что $[W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)]$ есть $\rho \times nr$ первая блочная строка унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$. Тогда из равенства

$$[D_1(\lambda), \ldots, D_r(\lambda)] = \Delta(\lambda)[W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)]$$

и свойств ΔW-1 разложения следует справедливость (8.2.1), где полиномы $W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)$, как элементы блочной строки унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$, суть взаимно простые слева матричные полиномы, имеющие ранг ρ.

8.2.2. "Деление" матричных полиномов.

Пусть заданы матричные полиномы $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$, причем известно, что регулярная матрица $Q(\lambda)$ есть левый делитель $P(\lambda)$. Для вычисления матричного полинома $Q^{-1}(\lambda)P(\lambda)$ выполняются следующие операции.

(1). Формируется полиномиальная матрица

$$\mathfrak{A}(\lambda) = [P(\lambda), Q(\lambda)]$$

и находится ее ΔW-1 разложение

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}], \tag{8.2.2}$$

*Матричные полиномы называются взаимно простыми слева, если их общий левый делитель тривиален, т.е. является унимодулярной (в частности, постоянной) матрицей.

где $\Delta(\lambda)$ есть левый ОНД матричных полиномов $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$, так что $\Delta(\lambda)$ отличается от $Q(\lambda)$ разве лишь множителем, который есть унимодулярная или постоянная матрица.

(2). Вычисляется $W^{-1}(\lambda)$ и равенство (8.2.2) записывается в виде

$$[P(\lambda), Q(\lambda)] = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}]W^{-1}(\lambda).$$

Пусть

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Gamma_1(\lambda) & \Gamma_1(\lambda) \\ * & * \end{bmatrix},$$

где $*$ обозначены не интересующие нас блоки $W^{-1}(\lambda)$; $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ суть полиномиальные $n \times n$ матрицы. Отсюду находим

$$P(\lambda) = \Delta(\lambda)\Gamma_1(\lambda)$$
$$Q(\lambda) = \Delta(\lambda)\Gamma_2(\lambda),$$

где $\Gamma_2(\lambda)$ есть унимодулярная или постоянная, не зависящая от λ, неособенная матрица. Из последних равенств находим

$$Q^{-1}(\lambda)P(\lambda) = \Gamma_2^{-1}(\lambda)\Gamma_1(\lambda).$$

Алгоритм выделения левого делителя из матричного полинома можно обобщить на случай выделения левого ОНД из нескольких матричных полиномов. Пусть требуется выделить регулярный общий наибольший делитель $Q(\lambda)$ из матричных полиномов $P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)$. Для вычисления $Q^{-1}(\lambda)P_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$ выполняются следующие операции.

(1). Формируется матрица $\mathfrak{A}(\lambda) = \left[P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda), Q(\lambda)\right]$ и находится ее ΔW-1 разложение

$$\mathfrak{A}(\lambda)W(\lambda) = \left[\Delta(\lambda), \mathbb{O}\right].$$

(2). Вычисляется первая блочная строка унимодулярной матрицы

$$W^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} W_{11}(\lambda) & \ldots & W_{1n}(\lambda) & W_{1,n+1}(\lambda) \\ * & \ldots & * & * \end{bmatrix},$$

блоки $W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1n}(\lambda)$ и $W_{1,n+1}(\lambda)$ которой имеют такие же размеры, что и матричные полиномы $P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)$ и $Q(\lambda)$, соответственно.

(3). Находятся равенства

$$\begin{aligned} P_k(\lambda) &= \Delta(\lambda)W_{1k}(\lambda) \qquad k = 1, \ldots, n \\ Q(\lambda) &= \Delta(\lambda)W_{1,n+1}(\lambda). \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

Отсюда $W_{1,n+1}(\lambda) \equiv W_{1,n+1}$ есть унимодулярная или постоянная неособенная матрица, так что из равенств (8.2.3) находим

$$Q^{-1}(\lambda)P_k(\lambda) = W_{1,n+1}^{-1}(\lambda)W_{1k}(\lambda), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

8.2.3. Вычисление НОК матричных полиномов.

Пусть $P_1(\lambda), \ldots, P_q(\lambda)$ – последовательность регулярных порядка n матричных полиномов. Требуется найти матричные полиномы $K(\lambda), W_1(\lambda), \ldots, W_q(\lambda)$, удовлетворяющие равенствам

$$K(\lambda) = P_k(\lambda)W_k^T(\lambda) \qquad k = 1, \ldots, q. \tag{8.2.4}$$

Полином $K(\lambda)$ назовем левым НОК, если $W_1(\lambda), \ldots, W_q(\lambda)$ суть взаимно простые слева матричные полиномы.

Предлагается следующий алгоритм для вычисления НОК и разложений (8.2.4) заданных матричных полиномов.

(1). Используя алгоритм п. 8.2.1, находятся разложения вида

$$P_k(\lambda) = \Delta(\lambda)W_{1k}(\lambda) \qquad k = 1, \ldots, q, \tag{8.2.5}$$

где $\Delta(\lambda)$ есть ОНД матричных полиномов $P_1(\lambda), \ldots, P_q(\lambda)$ и является регулярной матрицей, $W_{11}(\lambda), \ldots, W_{1r}(\lambda)$ – слева взаимно простые матричные полиномы.

(2). Используя алгоритм п. 8.2.2, вычисляются матричные полиномы

$$\widehat{P}_k(\lambda) = \Omega(\lambda)W_{1k}^{-T}(\lambda) \qquad k = 1, \ldots, q,$$

$(\Omega(\lambda) = \prod_{i=1}^{q} W_{1i}(\lambda))$, которые, очевидно, суть регулярные матричные полиномы.

(3). Для каждого матричного полинома $\widehat{P}_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, q)$, используя алгоритм п. 8.2.1, находятся разложения вида

$$\widehat{P}_k(\lambda) = \widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{W}_{1k}(\lambda) \qquad k = 1, \ldots, q, \tag{8.2.6}$$

где $\widehat{\Delta}(\lambda)$ есть ОНД полиномов $\widehat{P}_1(\lambda), \ldots, \widehat{P}_q(\lambda)$ и является $n \times n$ регулярной матрицей; $\widehat{W}_{11}(\lambda), \ldots, \widehat{W}_{1q}(\lambda)$ – слева взаимно простые матричные полиномы.

(4). Искомые полиномы вычисляются по формулам

$$K(\lambda) = P_1(\lambda)\widehat{W}_{11}^T(\lambda), \qquad W_k(\lambda) = \widehat{W}_{1k}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{8.2.7}$$

Для обоснования алгоритма достаточно доказать, что матричные полиномы (8.2.5) удовлетворяют системе (8.2.4). Для этого, принимая во внимание (8.2.5), подсчитаем левую и правую части равенств (8.2.4), предварительно умножив их справа на $\widehat{\Delta}^T(\lambda)$. С учетом соотношений (8.2.5) – (8.2.7), получим

$$P_1(\lambda)\widehat{W}_{11}^T(\lambda)\widehat{\Delta}^T(\lambda) = P_1(\lambda)\widehat{P}_1^T(\lambda) = P_1(\lambda)W_{11}^{-1}(\lambda)\Omega^T(\lambda) = \Delta(\lambda)\Omega^T(\lambda)$$

$$P_k(\lambda)W_k^T(\lambda)\widehat{\Delta}^T(\lambda) = P_k(\lambda)\widehat{W}_{1k}^T(\lambda)\widehat{\Delta}^T(\lambda) = P_k(\lambda)\widehat{P}_k^T(\lambda) = \\ = P_k(\lambda)W_{1k}^{-1}(\lambda)\Omega^T(\lambda) = \Delta(\lambda)\Omega^T(\lambda).$$

Сравнивая полученные равенства, убеждаемся, что

$$K(\lambda)\widehat{\Delta}^T(\lambda) = P_k(\lambda)\widehat{W}_{1k}^T(\lambda)\widehat{\Delta}^T(\lambda).$$

Откуда с учетом, что $\widehat{\Delta}(\lambda)$ есть регулярная $n\times n$ полиномиальная матрица, имеем

$$K(\lambda) = P_k(\lambda)\widehat{W}_{1k}^T(\lambda) \equiv P_k(\lambda)W_k^T(\lambda),$$

т.е. система (8.2.4) при выборе $K(\lambda)$ и $W_k(\lambda)$ $(k = 1,\ldots,q)$ по формулам (8.2.7) удовлетворяется. Взаимная простота (слева) матричных полиномов $W_1(\lambda),\ldots,W_q(\lambda)$ следует из свойства унимодулярной матрицы $\widehat{W}^{-1}(\lambda)$, первой блочной строкой которой они являются. Этим завершается обоснование алгоритма.

8.2.4. Относительная факторизация матричного полинома от двух параметров.

Пусть $F(\lambda,\mu)$ есть матричный полином размеров $m\times n$ от двух переменных.

Задача состоит в вычислении разложения вида*

$$F(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{F}(\lambda,\mu), \tag{8.2.8}$$

где $\Delta(\mu), \widehat{\Delta}(\lambda)$ – матричные полиномы от одной переменной, $\widehat{F}(\lambda,\mu)$ – матричный полином, не имеющий своими левыми делителями матричных полиномов от одной переменной.

Для реализации разложения (8.2.8) надо выполнить следующие операции.

(1). Записать $F(\lambda,\mu)$ по степеням λ

$$F(\lambda,\mu) = C_s(\mu)\lambda^s + \cdots + C_0(\mu)$$

и для матричных полиномов $C_s(\mu),\ldots,C_0(\mu)$ найти разложения вида

$$C_k(\mu) = \Delta(\mu)W_{1k}(\mu), \tag{8.2.9}$$

*К разложению (8.2.8) будем ссылаться как к относительной факторизации матричного полинома от двух переменных.

где $\Delta(\mu)$ – ОНД полиномов $\{C_k(\mu)\}; \{W_{1k}(\mu)\}$ – последовательность взаимно простых слева матричных полиномов.

(2). Принимая во внимание равенства (8.2.9), записать $F(\lambda, \mu)$ по степеням μ:

$$F(\lambda, \mu) = \Delta(\mu)\big[W_{1s}(\mu)\lambda^s + \cdots + W_{10}(\mu)\big] = \Delta(\mu)\big[\widehat{C}_t(\lambda)\mu^t + \cdots + \widehat{C}_0(\lambda).\big]$$

(3). Найти для матричных полиномов $\widehat{C}_t(\lambda), \ldots, \widehat{C}_0(\lambda)$ разложения вида

$$\widehat{C}_k(\lambda) = \widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{W}_{1k}(\lambda) \qquad k = t, \ldots, 0. \tag{8.2.10}$$

Здесь $\widehat{\Delta}(\lambda)$ – левый ОНД матричных полиномов $\widehat{C}_t(\lambda), \ldots, \widehat{C}_0(\lambda)$; $\widehat{W}_{1t}(\lambda), \ldots, \widehat{W}_{10}(\lambda)$ – взаимно простые слева матричные полиномы.

(4). С учетом разложений (8.2.9) и (8.2.10) записать матричный полином $F(\lambda, \mu)$ в искомом (8.2.8) виде

$$F(\lambda, \mu) = \Delta(\mu)\widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{F}(\lambda, \mu),$$

где $\widehat{F}(\lambda, \mu) = \widehat{W}_{1t}(\lambda)\mu^t + \widehat{W}_{1,t-1}(\lambda)\mu^{t-1} + \ldots + \widehat{W}_{10}(\lambda)$.

Замечание. В рассмотренном выше алгоритме выделим из $F(\lambda, \mu)$ левые множители, т.е. матричные полиномы от одной переменной. Аналогично, применяя выше описанный алгоритм к матрице $\widehat{F}^T(\lambda, \mu)$, можно выделить из $F(\lambda, \mu)$ правые множители, т.е. матричные полиномы от одной переменной, а следовательно представить $F(\lambda, \mu)$ в виде

$$F(\lambda, \mu) = \Delta(\mu)\widehat{\Delta}(\lambda)F_1(\lambda, \mu)\widehat{\Delta}_1(\lambda)\Delta_1(\mu).$$

Здесь $F_1(\lambda, \mu)$ – матричный полином от двух параметров, не имеющий матричных полиномов от одной переменной своими левыми и правыми делителями.

8.2.5. Вычисление ОНД матричных полиномов от двух параметров.

Пусть $\{F_k(\lambda, \mu)\}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ последовательность двухпараметрических полиномиальных $m \times n$ матриц.

Рассмотрим разложение вида

$$F_k(\lambda, \mu) = \nabla(\lambda, \mu)V_k(\lambda, \mu), \quad k = 1, \ldots, p \tag{8.2.11}$$

где $\nabla(\lambda, \mu)$ и $V_k(\lambda, \mu)$ матрицы полного столбцового и строчного рангов соответственно.

Матрицу $\nabla(\lambda,\mu)$ назовем левым ОНД последовательности $\{F_k(\lambda,\mu)\}$, если матрица $\left[\widehat{V}_1(\lambda,\mu),\ldots,\widehat{V}_p(\lambda,\mu)\right]$ не имеет конечного регулярного спектра. При этом в частном случае $\nabla(\lambda,\mu)$ может быть постоянной матрицей.

Алгоритм построения разложений (8.2.11) состоит в выполнениии следующих операций

(1) Формируется матрица

$$\Phi(\lambda,\mu) := \left[F_1(\lambda,\mu),\ldots,F_p(\lambda,\mu)\right].$$

(2) Используя алгоритм ∇V-2 факторизации из [46], вычисляется ∇V-2 разложение $\Phi(\lambda,\mu)$ вида

$$\Phi(\lambda,\mu) = \nabla(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu),$$

где $\nabla(\lambda,\mu)$ есть $m\times\rho$ полного столбцового ранга матрицы, регулярный спектр которой совпадает с конечным регулярным спектром $\Phi(\lambda,\mu)$; $V(\lambda,\mu) = \left[\widehat{V}_1(\lambda,\mu),\ldots,\widehat{V}_p(\lambda,\mu)\right]$ есть $\rho\times n\rho$ матрица с блоками $\widehat{V}_k(\lambda,\mu)$ размеров $\rho\times n$, неимеющая конечного регулярного спектра.

В результате выполнения операций (1), (2) будем иметь разложение (8.2.11).

§8.3. Методы решения линейно-алгебраических систем с полиномиальными и рациональными матрицами [19, 47]

Рассматривается решение линейных систем и обращение матриц, зависящих полиномиально или рационально от одного и двух параметров.

8.3.1. Вычисление псевдообратных матриц.

Предлагаются способы построения псевдообратных матриц для матриц, элементы которых полиномиально или дробно-рационально зависят от параметров. Рассматриваются случаи одно и двухпараметрических матриц.

Построение псевдообратных матриц реализуется на базе алгоритмов ранговой факторизации. В случае матриц с полиномиальным вхождением параметров такими алгоритмами являются ΔW-1 и ΔW-2 алгоритмы соответственно для одно и двухпараметрических матриц. В случае матриц с рациональным вхождением параметров такими алгоритмами являются алгоритмы несократимой минимальной факторизации.

8.3.1.1. Теоретические предпосылки.

Пусть A есть $m \times n$ матрица ранга ρ ($\rho \leqslant \min(m, n)$), элементы которой суть постоянные числа. Известно, что факторизация вида

$$A = BC, \tag{8.3.1}$$

где B и C $m \times \rho$ и $\rho \times n$ матрицы ранга ρ, может быть использована для построения псевдообратной матрицы A^+, удовлетворяющей аксиомам:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^T = AA^+, \quad (A^+A)^T = A^+A. \tag{8.3.2}$$

При наличии факторизации (8.3.1) матрица A^+ может быть вычислена по формуле

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T. \tag{8.3.3}$$

Ранговая факторизация (8.3.1) может быть реализована различными способами, например, с использованием алгоритмов сингулярного разложения матрицы A, в частности SVD-алгоритма, или с использованием нормализованного разложения матрицы A (другими словами QR-разложения с перестановками).

8.3.1.2. Ранговая факторизация матриц, зависящих от параметров.

Ниже идея использования рангового разложения матрицы для построения псевдообратной матрицы, а следовательно, и для решения систем по принципу наименьших квадратов обобщается на случай матриц, зависящих от параметров.

В качестве ранговой факторизации используются следующие.

Для однопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $D(\lambda)$ ранга ρ рассматривается ранговая факторизация вида

$$D(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda) \tag{8.3.4}$$

где $\Delta(\lambda)$ есть полиномиальная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, имеющая спектр, совпадающий с конечным спектром $D(\lambda)$; $V(\lambda)$ есть полиномиальная $\rho \times n$ матрица, не имеющая конечного спектра.

Разложение (8.3.4) реализуется на базе ΔW-1 факторизации:

$$D(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), 0],$$

где 0-нулевая $m \times (n - \rho)$ матрица, $W(\lambda)$ есть унимодулярная матрица, так что матрица $V(\lambda)$ образована первыми ρ строками унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$.

Для двухпараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda, \mu)$ ранга ρ, рассматривается ранговая факторизация вида

$$F(\lambda, \mu) = \nabla(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu), \tag{8.3.5}$$

где $\nabla(\lambda, \mu)$ и $V(\lambda, \mu)$ – двухпараметрические $m \times \rho$ и $\rho \times n$ полиномиальные матрицы полного ранга соответственно.

Спектр $\nabla(\lambda, \mu)$ совпадает с конечным непрерывным спектром матрицы $F(\lambda, \mu)$, за исключением собственных значений вида $\mu = \mu_i$, которые, будучи в спектре $F(\lambda, \mu)$, отсутствуют в спектре $\nabla(\lambda, \mu)$.

Спектр $V(\lambda, \mu)$ является дискретным, совпадающим с дискретным спектром $F(\lambda, \mu)$, порожденным ее правыми полиномиальными решениями за исключением собственных значений вида $\mu = \mu_i$, если последние входят в спектр $F(\lambda, \mu)$.

Ранговая факторизация (8.3.5) реализуется на базе ΔW-2 разложения матрицы $F(\lambda, \mu)$ и алгоритм его подробно описан в главе 6.

Для однопараметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda)$ ранга ρ, в качестве ранговой факторизации рассматривается так называемая несократимая минимальная факторизация вида

$$R(\lambda) = S(\lambda) T^{-1}(\lambda) V(\lambda) \tag{8.3.6}$$

где $S(\lambda), T(\lambda), V(\lambda)$ – соответственно полиномиальные $m \times \rho$, $\rho \times \rho$ и $\rho \times n$ матрицы, так что $T(\lambda)$ есть регулярная матрица, при этом каждая из матриц

$$\begin{bmatrix} S(\lambda) \\ T(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [T(\lambda), V(\lambda)]$$

не имеет конечного спектра.

Для двухпараметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ, в качестве ранговой факторизации рассматривается, так называемая, несократимая минимальная факторизация вида

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu) T^{-1}(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu). \tag{8.3.7}$$

Здесь $S(\lambda, \mu), T(\lambda, \mu), V(\lambda, \mu)$ соответственно $m \times \rho, \rho \times \rho, \rho \times n$ двухпараметрические полиномиальные матрицы ранга ρ, так что $T(\lambda, \mu)$, есть регулярная матрица. При этом каждая из матриц

$$\begin{bmatrix} S(\lambda, \mu) \\ T(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad [T(\lambda, \mu), V(\lambda, \mu)]$$

не имеют конечного непрерывного спектра.

8.3.1.3. Построение псевдообратных матриц для матриц, зависящих от параметров.

Псевдообратная матрица $D^{+}(\lambda)$ для однопараметрической полиномиальной матрицы $D(\lambda)$, построенная на базе разложения (8.3.4), имеет вид

$$D^{+}(\lambda) = V^{T}(\lambda)\big[V(\lambda)V^{T}(\lambda)\big]^{-1}\big[\nabla^{T}(\lambda)\nabla(\lambda)\big]^{-1}\nabla^{T}(\lambda). \tag{8.3.8}$$

Псевдообратная матрица $F^{+}(\lambda,\mu)$ для двухпараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda,\mu)$, построенная на базе разложения (8.3.5), имеет вид

$$F^{+}(\lambda,\mu) = V^{T}(\lambda,\mu)\big[V(\lambda,\mu)V^{T}(\lambda,\mu)\big]^{-1}\big[\nabla^{T}(\lambda,\mu)\nabla(\lambda,\mu)\big]^{-1}\nabla^{T}(\lambda,\mu). \tag{8.3.9}$$

Псевдообратная матрица $R^{+}(\lambda)$ для однопараметрической рациональной матрицы $R(\lambda)$, построенная на базе разложения (8.3.6), имеет вид

$$R^{+}(\lambda) = V^{T}(\lambda)\big[V(\lambda)V^{T}(\lambda)\big]^{-1}T(\lambda)\big[S^{T}(\lambda)S(\lambda)\big]^{-1}S^{T}(\lambda). \tag{8.3.10}$$

Псевдообратная матрица $R^{+}(\lambda,\mu)$ для двухпараметрической рациональной матрицы $R(\lambda,\mu)$, построенная на базе разложения (8.3.7), имеет вид

$$R^{+}(\lambda,\mu) = \\ = V^{T}(\lambda,\mu)\big[V(\lambda,\mu)V^{T}(\lambda,\mu)\big]^{-1}T(\lambda,\mu)\big[S^{T}(\lambda,\mu)S(\lambda,\mu)\big]^{-1}S^{T}(\lambda,\mu). \tag{8.3.11}$$

Так построенные псевдообратные матрицы удовлетворяют четырем аксиомам вида (8.3.2), в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

8.3.2. Обращение регулярных матриц.

Как видно из формул (8.3.8)–(8.3.11) вычисление псевдообратных матриц требует вычисления обратной матрицы для регулярных полиномиальных одно и двухпараметрических матриц.

Ниже предлагаются алгоритмы обращения регулярных матриц зависящих от одного и двух параметров, построенных на различных принципах. В основе первой группы алгоритмов лежат модификации известного метода Леверье-Фаддеева, ранее предложенного для вычисления коэффициентов характеристического полинома постоянной матрицы.

8.3.2.1. Построение обратной матрицы $D^{-1}(\lambda)$ для регулярной однопараметрической $n \times n$ матрицы $D(\lambda)$, требует вычисления двух последовательностей $\{A_k(\lambda)\}$, $\{B_k(\lambda)\}$ $k = 1, \ldots, n$ регулярных полиномиальных матриц и последовательности $\{q_k(\lambda)\}$ скалярных полиномов. Полагая $B_0(\lambda) = I$, вычисления реализуются по формулам

$$A_{k+1}(\lambda) = D(\lambda)B_k(\lambda), \quad q_{k+1}(\lambda) = \frac{1}{k+1}\operatorname{tr} A_{k+1}(\lambda),$$
$$B_{k+1}(\lambda) = A_{k+1}(\lambda) - q_{k+1}(\lambda)I, \;\; k = 0, \ldots, n-1, \qquad (8.3.12)$$

где I – единичная матрица.

Тогда искомая матрица $D^{-1}(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$D^{-1}(\lambda) = \frac{1}{q_n(\lambda)} B_{n-1}(\lambda), \qquad (8.3.13)$$

при этом $B_n(\lambda) \equiv \mathbb{O}$ – нулевая $n \times n$ матрица.

Построение обратной матрицы $D^{-1}(\lambda, \mu)$ для регулярной двухпараметрической полиномиальной $n \times n$ матрицы $D(\lambda, \mu)$ требует вычисления двух конечных последовательностей $\{A_k(\lambda, \mu)\}$, $\{B_k(\lambda, \mu)\}$, $k = 1, \ldots, n$ регулярных двухпараметрических полиномиальных матриц и последовательности скалярных полиномов $\{q_k(\lambda, \mu)\}$ от двух переменных.

Полагая $B_0(\lambda, \mu) = I$, вычисления реализуются по формулам

$$A_{k+1}(\lambda, \mu) = D(\lambda, \mu)B_k(\lambda, \mu), \quad q_{k+1}(\lambda, \mu) = \frac{1}{k+1}\operatorname{tr} A_{k+1}(\lambda, \mu),$$
$$B_{k+1}(\lambda, \mu) = A_{k+1}(\lambda, \mu) - q_{k+1}(\lambda, \mu)I, \;\; k = 0, \ldots, n-1.$$

Тогда искомая матрица $D^{-1}(\lambda, \mu)$ вычисляется по формуле

$$D^{-1}(\lambda, \mu) = \frac{1}{q_n(\lambda, \mu)} B_{n-1}(\lambda, \mu),$$

при этом $B_n(\lambda, \mu) \equiv \mathbb{O}$ – нулевая $n \times n$ матрица.

Построение обратной матрицы $R^{-1}(\lambda)$ для регулярной рациональной однопараметрической $n \times n$ матрицы $R(\lambda)$ требует вычисления двух конечных последовательностей рациональных однопараметрических матриц $\{A_k(\lambda)\}$, $\{B_k(\lambda)\}$ $k = 1, \ldots, n$ и последовательности $\{q_k(\lambda)\}$ рациональных функций.

Предварительно исходную матрицу $R(\lambda)$ записываем в факторизаванной виде

$$R(\lambda) = K^{-1}(\lambda)D(\lambda),$$

где $K(\lambda)$ и $D(\lambda)$ суть $n \times n$ полиномиальные матрицы. Факторизацию можно реализовать, например, взяв

$$K(\lambda) := \operatorname{diag}\{k_1(\lambda), \dots, k_n(\lambda)\},$$

где $k_i(\lambda)$ есть НОК знаменателей элементов i-ой строки матрицы $R(\lambda)$. Тогда $D(\lambda) = K(\lambda)R(\lambda)$.

Переход от шага k к шагу $k+1$ требует выполнения следующих операций

(1) Рациональная матрица $B_k(\lambda)$ представляется в следующем факторизованном виде

$$B_k(\lambda) = \bar{D}_k(\lambda)\bar{K}^{-1}(\lambda),$$

где в качестве полиномиальных $n \times n$ матриц $\bar{D}_k(\lambda)$ и $\bar{K}(\lambda)$ можно взять, например, следующие

$$\bar{K}(\lambda) = \operatorname{diag}\{\bar{k}_1(\lambda), \dots, \bar{k}_n(\lambda)\}, \quad \bar{D}_k(\lambda) = B_k(\lambda)\bar{K}(\lambda).$$

Здесь $\bar{k}_i(\lambda)$ есть НОК знаменателей элементов i-го столбца матрицы $B_k(\lambda)$.

(2) Вычислить рациональную матрицу $A_{k+1}(\lambda)$ в следующем факторизованном виде

$$\begin{aligned} A_{k+1}(\lambda) &= D(\lambda)B_k(\lambda) = \\ &= K^{-1}(\lambda)D_k(\lambda)\bar{D}_k(\lambda)\bar{K}^{-1}(\lambda) = \\ &= K^{-1}(\lambda)\widetilde{D}_k(\lambda)\bar{K}^{-1}(\lambda), \end{aligned}$$

$\widetilde{D}_k(\lambda) := D_k(\lambda)\bar{D}_k(\lambda)$ – полиномиальная $n \times n$ матрица.

(3) Вычислить след рациональной матрицы $A_{k+1}(\lambda)$. Для чего матрица $A_{k+1}(\lambda)$ записывается в виде матрицы с рациональными элементами $r_{ij}^{(k+1)}(\lambda)$. Так что $\operatorname{tr} A_{k+1}(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_{ii}^{(k+1)}(\lambda)$.

(4) Вычислить рациональную матрицу

$$B_{k+1}(\lambda) = A_{k+1}(\lambda) - q_{k+1}(\lambda)I,$$

где

$$q_{k+1}(\lambda) = \frac{1}{k+1}\operatorname{tr} A_{k+1}(\lambda).$$

Шаги (1)–(4) выполняются для $k = 1, \dots, n-1$.

Тогда искомая матрица $R^{-1}(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$R^{-1}(\lambda) = \frac{1}{q_n(\lambda)}B_{n-1}(\lambda),$$

при этом $B_n(\lambda) \equiv \mathbb{O}$ – нулевая матрица.

Построение обратной матрицы $R^{-1}(\lambda,\mu)$ для регулярной двухпараметрической рациональной $n\times n$ матрицы $R(\lambda,\mu)$ требует вычисления двух конечных последовательностей регулярных двухпараметрических рациональных матриц $\{A_k(\lambda,\mu)\}$ и $B_k(\lambda,\mu)\}$ $k = 1,\dots,n$ и последовательности рациональных функций $\{q_k(\lambda,\mu)\}$ $k = 1,\dots,n$ от двух параметров.

Предварительно исходную матрицу $R(\lambda,\mu)$ записываем в следующем факторизованном виде

$$R(\lambda,\mu) = K^{-1}(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu),$$

где $K(\lambda,\mu)$ и $D(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные $n\times n$ матрицы.

Вычисление $K(\lambda,\mu)$ можно реализовать, например, в виде

$$K(\lambda,\mu) = \operatorname{diag}\{k_1(\lambda,\mu),\dots,k_n(\lambda,\mu)\},$$

где $k_i(\lambda,\mu)$ есть НОК знаменателей элементов i-ой строки матрицы $R(\lambda,\mu)$; $D(\lambda,\mu) = K(\lambda,\mu)R(\lambda,\mu)$.

Переход от шага k к шагу $k+1$ требует выполнения следующих операций.

(1) Представить рациональную двухпараметрическую матрицу $B_k(\lambda,\mu)$ в следующем факторизованном виде

$$B_k(\lambda,\mu) = \bar{D}_k(\lambda,\mu)\bar{K}^{-1}(\lambda,\mu),$$

где в качестве двухпараметрических полиномиальных матриц $\bar{D}(\lambda,\mu)$ и $\bar{K}(\lambda,\mu)$ можно взять, например, следующие

$$\bar{K}(\lambda,\mu) = \operatorname{diag}\{\bar{k}_1(\lambda,\mu),\dots,\bar{k}_n(\lambda,\mu)\},$$
$$\bar{D}_k(\lambda,\mu) = B_k(\lambda,\mu)\bar{K}(\lambda,\mu).$$

Здесь $k_i(\lambda,\mu)$ есть НОК знаменателей элементов i-го столбца матрицы $B_k(\lambda,\mu)$.

(2) Вычислить рациональную матрицу $A_{k+1}(\lambda,\mu)$ в следующем факторизованном виде

$$A_{k+1}(\lambda,\mu) = D(\lambda,\mu)B_k(\lambda,\mu) = K^{-1}(\lambda,\mu)D_k(\lambda,\mu)\bar{D}_k(\lambda,\mu)\bar{K}^{-1}(\lambda,\mu) = \\ = K^{-1}(\lambda,\mu)\tilde{D}_k(\lambda,\mu)\bar{K}^{-1}(\lambda,\mu),$$

где $\tilde{D}_k(\lambda,\mu) = D_k(\lambda,\mu)\bar{D}_k(\lambda,\mu)$ есть полиномиальная двухпараметрическая матрица.

(3) Вычислить след рациональной матрицы $A_{k+1}(\lambda,\mu)$. Для чего $A_{k+1}(\lambda,\mu)$ записывается в виде матрицы с рациональными элементами $r_{ij}^{(k+1)}(\lambda,\mu)$. Так что $\operatorname{sp} A_{k+1}(\lambda,\mu)=\sum\limits_{i=1}^{n} r_{ii}^{(k+1)}(\lambda,\mu)$.

(4) Вычисляется рациональная матрица

$$B_{k+1}(\lambda,\mu)=A_{k+1}(\lambda,\mu)-q_{k+1}(\lambda,\mu)I,$$

где

$$q_{k+1}(\lambda,\mu)=\frac{1}{k+1}\operatorname{tr} A_{k+1}(\lambda,\mu).$$

Операции (1)–(4) выполняются для $k=0,\dots,n-1$. Тогда искомая матрица $R^{-1}(\lambda,\mu)$ вычисляется по формуле

$$R(\lambda,\mu)=\frac{1}{q_n(\lambda,\mu)}\,B_{n-1}(\lambda,\mu),$$

при этом $B_n(\lambda,\mu)\equiv\mathbb{O}$ есть нулевая $n\times n$ матрица.

Для определенности обоснование алгоритма проведем для случая однопараметрической полиномиальной матрицы. Сначала устанавливается, что

$$t^n-q_1(\lambda)t^{n-1}-\dots-q_n(\lambda)=\det\left[D(\lambda)-tI\right] \tag{8.3.14}$$

есть характеристический полином полиномиальной матрицы $D(\lambda)$ и $q_n(\lambda)=\det D(\lambda)\equiv q(\lambda)$. Доказательство проводится по индукции и основано на рекуррентных формулах Ньютона

$$kq_k(\lambda)=s_k(\lambda)-q_1(\lambda)s_{k-1}(\lambda)-\dots-q_k(\lambda)s_1(\lambda)$$

$k=1,\dots,n$, устанавливающих связь между коэффициентами и корнями полинома. Здесь через $s_k(\lambda)=\sum\limits_{r=1}^{n} t_r^k(\lambda)$ обозначена сумма k-тых степеней корней t_k полинома (8.3.14). Учитывая, что $q_n(\lambda)=t_1(\lambda)\dots t_n(\lambda)=\det D(\lambda)$, заключаем, что корни $q_n(\lambda)$ суть собственные значения $D(\lambda)$.

Далее доказывается, что матрица $B_n(\lambda)$ есть нулевая матрица. Для этого, используя формулы образования последовательности $\{A_k(\lambda)\}$ и $\{B_k(\lambda)\}$ устанавливается справедливость равенства

$$B_n(\lambda)=D^n(\lambda)-q_1(\lambda)D^{n-1}(\lambda)-\dots-q_n(\lambda)I,$$

так что $B_n(\lambda)=\mathbb{O}$, ибо матрица $D(\lambda)$ есть корень своего характеристического полинома. Из (8.3.12) вытекает справедливость равенства (8.3.13). Заметим, что факторизация $D^{-1}(\lambda)$ в форме

(8.3.13) является сократимой, что влечет неоправданно завышенную степень у матрицы $B_{n-1}(\lambda)$. Матрица $B_{n-1}(\lambda)$ имеет λ_i своими собственными значениями, каждый кратности $(n-1)$. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_{ns}$ собственные значения матрицы $D(\lambda)$.

Алгоритм второй и третьей групп обращения регулярных матриц рассмотрим для вычисления $D^{-1}(\lambda)$.

8.3.2.2. В основе алгоритмов второй группы лежит следующая лемма.

Лемма 8.1. *Любой k-ый столбец матрицы $D^{-1}(\lambda)$ совпадает с первыми n компонентами вектора, образующего правое нуль-пространство матрицы $[D(\lambda), -e_k]$, нормированного к единичной последней компоненте. (Здесь $D(\lambda)$ – регулярная $n \times n$ полиномиальная матрица, $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ – k-ый столбец единичной $n \times n$ матрицы.)*

Доказательство проводим конструктивно, описывая алгоритм вычисления $D^{-1}(\lambda)$. Вычисление $D^{-1}(\lambda)$ будем осуществлять по столбцам. Так для определения k-того столбца $(k = 1, \ldots, n)$ следует найти правое нуль-пространство расширенной полиномиальной $n \times (n+1)$ матрицы $[D(\lambda), -e_k]$, применив к ней, например, алгоритм $\Delta W - 1$ разложения. Имеем

$$\left[D(\lambda), -e_k\right] W_k(\lambda) = \left[\Delta_k(\lambda), \mathbb{O}\right].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевой столбец, $\Delta_k(\lambda)$ – регулярная $n \times n$ матрица, $W_k(\lambda)$ – унимодулярная порядка $n+1$ матрица, последний столбец которой образует искомое правое нуль-пространство. Обозначим $W_{k,n+1}(\lambda)$ – последний столбец $W_k(\lambda)$, поделенный на ОНД своих компонент, и запишем его в блочном виде

$$W_{k,n+1}(\lambda) = \left[X_k(\lambda), p_k(\lambda)\right]^B,$$

где $p_k(\lambda)$ – последняя компонента, $X_k(\lambda)$ – вектор-столбец из первых n компонент $W_{k,n+1}(\lambda)$. Имеем

$$D(\lambda) X_k(\lambda) = p_k(\lambda) e_k.$$

Обозначим $P(\lambda) = \operatorname{diag}\{p_1(\lambda),\ldots,p_n(\lambda)\}$, $X(\lambda) = [x_1(\lambda),\ldots,x_n(\lambda)]$. Тогда последнее равенство можно записать в матричном виде

$$D(\lambda) X(\lambda) = P(\lambda).$$

Отсюда

$$D^{-1}(\lambda) = X(\lambda) P^{-1}(\lambda), \tag{8.3.16}$$

где $P^{-1}(\lambda) = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{p_1(\lambda)}, \ldots, \frac{1}{p_n(\lambda)}\right\}$ – рациональная диагональная матрица.

Если описанный алгоритм применить к матрице $D^T(\lambda)$, т.е. получить факторизацию вида

$$D^{-T}(\lambda) = Y_1(\lambda)P_1^{-1}(\lambda),$$

то факторизация $D^{-1}(\lambda)$ будет

$$D^{-1}(\lambda) = P_1^{-1}(\lambda)Y_1^T(\lambda), \tag{8.3.17}$$

где $P_1^{-1}(\lambda)$ – диагональная рациональная матрица; $Y_1^T(\lambda)$ – полиномиальная матрица.

Представление $D^{-1}(\lambda)$ в формах (8.3.16) и (8.3.17) может быть сократимой факторизацией, что влечет завышенную степень у матриц $Y(\lambda)$ и $Y_1(\lambda)$.

8.3.2.3. Алгоритмы обращения третьей группы базируются на представлении любой регулярной матрицы $D(\lambda)$ в виде

$$D(\lambda) = L(\lambda)\widetilde{W}(\lambda), \tag{8.3.18}$$

где $\widetilde{W}(\lambda)$ есть унимодулярная матрица, $L(\lambda)$ – левая треугольная. Разложение (8.3.18) можно получить, используя ΔW-1 алгоритм или ZW алгоритм. Так, например, применив алгоритм ΔW-1 для приведения $D(\lambda)$ к треугольной форме, получим разложение

$$D(\lambda)W(\lambda) = L(\lambda), \tag{8.3.19}$$

где $W(\lambda)$ – унимодулярная $L(\lambda)$ – левая треугольная матрица. Откуда, полагая $W^{-1}(\lambda) = \widetilde{W}(\lambda)$, найдем разложение (8.3.18). Из (8.3.18) находим

$$D^{-1}(\lambda) = W(\lambda)L^{-1}(\lambda). \tag{8.3.20}$$

Если вместо матрицы $D(\lambda)$ взять матрицу $D_1(\lambda) = D^T(\lambda)$, то (8.3.19) примет вид

$$D_1^{-1}(\lambda) \equiv D^{-T}(\lambda) = W_1(\lambda)L_1^{-1}(\lambda), \tag{8.3.21}$$

где $W_1(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ – матрицы равенства (8.3.19), полученного для $D_1(\lambda)$. Так что из (8.3.21) находим

$$D^{-1}(\lambda) = L_1^{-T}(\lambda)W_1^T(\lambda). \tag{8.3.22}$$

Равенства (8.3.20) и (8.3.22) дают представление $D^{-1}(\lambda)$ в факторизованном виде с множителями, не имеющими сократимых конечных особых точек. Сократимыми могут быть только особенности бесконечной точки: особенность типа полюс унимодулярной матрицы может сократиться с особенностью типа нуль левой треугольной рациональной матрицы.

8.3.3. Решение систем с матрицами, зависящими от параметров.

Пусть

$$QX = q \tag{8.3.23}$$

система линейноалгебраических уравнений с матрицей Q и свободным членом q, элементы которых суть рациональные функции, в частности скалярные полиномы от одного (двух) переменных.

Любой вектор $Y = \left(\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_n}{g_n}\right)^T$, имеющий своими компонентами рациональные функции от одно (двух) переменных будем называть несократимым и записывать в виде $Y = \delta\widehat{Y}$, если вектор $\widehat{Y} = \left(\frac{\widehat{f}_1}{\widehat{g}_1}, \dots, \frac{\widehat{f}_n}{\widehat{g}_n}\right)^T$ имеет компоненты, обладающие следующими свойствами

$$f_k = \delta\widehat{f}_k, \qquad g_k = \delta\widehat{g}_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{8.3.24}$$

Полиномы $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_n, \widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_n$ образуют последовательность взаимно-простых полиномов; δ есть ОНД последовательности полиномов $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$. Заметим, что любой вектор с рациональными компонентами от одной (двух) переменных может быть представлен в несократимом виде. Для этого следует использовать алгоритмы, позволяющие находить полином δ, т.е. ОНД скалярных полиномов $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ от одной (двух) переменных, и разложения вида (8.3.24).

Неизвестный вектор X системы (8.3.23) будем определять как вектор $X = Q^+q$ в случае сингулярной (относительно параметров) матрицы Q и как вектор $X = Q^{-1}q$ в случае регулярной относительно параметров матрицы Q и записывать в несократимом виде $X = \delta\widehat{X}$. При этом, в случае сингулярной матрицы Q вектор $X = Q^+q = \delta\widehat{X}$ будем называть обобщенным решением системы (8.3.23). Очевидно, при любом фиксированном значении параметров матрицы Q и свободного члена q системы (8.3.23) обобщенное решение доставляет минимум евклидовой норме вектора невязки, т.е. дает решение системы (8.3.23) по принципу наименьших квадратов.

В случае регулярной матрицы Q, вектор $X = Q^{-1}q = \delta\widehat{X}$ будем называть решением системы (8.3.23). Он удовлетворяет системе при любых значениях параметров.

Замечание.

Представления обратных матриц для регулярных матриц $D(\lambda)$, $D(\lambda,\mu)$, $R(\lambda)$ и $R(\lambda,\mu)$ соответственно в факторизованных видах не являются несократимыми. Каждая из обратных матриц является рациональной матрицей, записанной в виде сократимой факторизации. Последнее следует из того, что матрица $\begin{bmatrix} q_n I \\ B_{n-1}\end{bmatrix}$ имеет конечный спектр.

Существуют алгоритмы (см. гл. 7), позволяющие сократимую факторизацию представлять в виде несократимой. Но если обратная матрица применяется для решения системы, то вычислительных затрат будет меньше, если, вычислив вектор-решение системы, его записать затем в несократимом виде.

§8.4. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ-1) ([41, 77])

Пусть

$$\left(f_1(\lambda),\dots,f_m(\lambda)\right)^T = 0 \qquad (8.4.1)$$

заданная система нелинейных алгебраических уравнений от одной переменной. Здесь

$$f_k(\lambda) \equiv a_{ks}\lambda^s + a_{k,s-1}\lambda^{s-1} + \dots + a_{k0} \quad (k = 1,\dots,m),$$

суть скалярные полиномы, s – максимальная степень λ в уравнениях (8.4.1). Требуется вычислить все конечные корни СНАУ (8.4.1).

8.4.1. Первый метод решения СНАУ-1.

Запишем (8.4.1) в эквивалентном виде

$$\mathfrak{A}\Lambda = 0, \qquad (8.4.2)$$

где $\Lambda = (\lambda^s, \lambda^{s-1},\dots,\lambda,1)^T$ – вектор, $\mathfrak{A}$ – постоянная $m\times(s+1)$ матрица $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_{1s} & a_{1,s-1} & \dots & a_{10} \\ a_{2s} & a_{2,s-1} & \dots & a_{20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ms} & a_{m,s-1} & \dots & a_{m0}\end{bmatrix}$.

Для решения уравнения (8.4.2) надо выполнить следующие операции:

(1). Вычислить базис Q правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}$, применяя к ней, например, $\Delta W - 0$ алгоритм.

(2). Образовать пучок полного столбцового ранга $Q_+ - \lambda Q_-$, матрицы Q_+ и Q_- которого составлены из s первых и s последних строк матрицы Q.

(3). Найти все собственные значения пучка $Q_+ - \lambda Q_-$, т.е. искомые корни системы (8.4.1).

8.4.2. Второй метод решения СНАУ-1.

Для решения СНАУ (8.4.1) следует найти общий наибольший делитель полиномов $f_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m$ и вычислить его корни. С этой целью выполняются следующие операции

(1) Формируется $1 \times m$ матричный полином

$$F(\lambda) := [f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda)] =$$
$$\lambda^s[a_{1s}a_{2s}, \ldots, a_{ms}] + \ldots + [a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}]$$

(2) находится ΔW-1 разложение $F(\lambda)$. Имеем

$$F(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), 0, \ldots, 0],$$

где скалярный полином $\Delta(\lambda)$ является ОНД последовательности полиномов $f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda)$.

(3) Вычисляются корни алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0$$

которые дадут конечные корни СНАУ (8.4.1).

§8.5. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных (СНАУ-2) [45, 50]

Пусть

$$f_k(\lambda, \mu) = 0, \quad k = 1, \ldots, m \tag{8.5.1}$$

заданная система нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных (СНАУ-2). Здесь $f_k(\lambda, \mu) = a_{s_k}^{(k)}(\mu)\lambda^{s_k} + \ldots + a_{s_k}^{(k)}(\mu)$, $k = 1, \ldots, m$, есть скалярные полиномы от двух переменных, записанный по переменной λ, с коэффициентами $a_i^{(k)}(\mu)$ полиномиально зависящими от μ; s и t суть максимальные степени по λ и μ соответственно.

Корни СНАУ-2 принято делить на две группы. К первой группе относятся, так называемые, нульмерные корни, т.е. пары (λ_*, μ_*) чисел, удовлетворяющие системе (8.5.1). Ко второй группе относятся одномерные корни, т.е. пары $(\varphi(\lambda), \mu)$ и

$(\lambda, \hat{\varphi}(\mu))$, компоненты которых связаны функциональной зависимостью. При этом явный (формульный) вид φ и $\hat{\varphi}$ могут быть неизвестным и даже не существовать. Но всегда можно указать правило, позволяющее при фиксированном значении одной из компонент одномерного корня находить вторую компоненту его. Полезно заметить, что одномерные корни (8.3.3) суть корни $h(\lambda, \mu)$, т.е. наибольшего общего делителя (ОНД) полиномов $f_1(\lambda, \mu), \ldots, f_m(\lambda, \mu)$.

Задача состоит в вычислении всех нульмерных решений СНАУ (8.5.1) и в нахождении полинома $h(\lambda, \mu)$ или регулярного пучка полиномиальных матриц, собственные значения которого совпадают с одномерными корнями СНАУ (8.5.1).

Ниже предлагаются три метода решения СНАУ-2 первый и второй методы основаны на применении ΔW-2 алгоритма, третий – на применении ΔW-1 алгоритма.

8.5.1 Первый метод. решения состоит из двух этапов. На первом этапе от СНАУ (8.5.1) переходим к СНАУ вида

$$\widehat{f}_k(\lambda, \mu) = 0, \qquad (8.5.2)$$

не содержащей одномерных корней. Конечные нульмерные решения (8.5.1) и (8.5.2) совпадают.

На втором этапе находим нульмерные корни СНАУ (8.5.2).

8.5.1.1 Первый этап состоит в выполнении следующих операций.

(1) Каждый полином $f_k(\lambda, \mu) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, представляется в виде относительной факторизации:

$$f_k(\lambda, \mu) = f_1^{(k)}(\lambda) f_2^{(k)}(\mu) f_{1,2}^{(k)}(\lambda, \mu). \qquad (8.5.3)$$

Здесь $f_i^{(k)}(\ )$ – алгебраические полиномы от одной переменной; $f^{(k)}(\lambda, \mu)$ – полином от двух переменных, не имеющий своими делителями полиномов от одной переменной.

Для вычисления разложения (8.5.3) выполняются следующие операции

(1.1) Полином $f_k(\lambda, \mu)$ записывается по степеням параметра λ:

$$f_k(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{t_1} a_i^{(k)}(\mu) \lambda^i.$$

(1.2) Находится $f_2(\mu)$, т.е. ОНД полиномов $a_i^{(k)}(\mu)$, $i=0,1,\ldots,t_1$, и разложения вида

$$a_i^{(k)}(\mu) = f_2^{(k)}(\mu)\widehat{a}_i^{(k)}(\mu), \quad i = 0,1,\ldots,t_1,$$

где $\widehat{a}_i^{(k)}(\mu)$, $i = 0,1,\ldots,t_1$ суть взаимно простые полиномы.

В результате выполнения шагов (1,1), (1,2) имеем

$$f_k(\lambda,\mu) = f_2^{(k)}(\mu)\sum_{i=0}^{t_1}\widehat{a}_i^{(k)}(\mu)\lambda^i. \tag{8.5.4}$$

(1.3) Полином $\sum\limits_{i=0}^{t_1}\widehat{a}_i^{(k)}(\mu)\lambda^i \equiv g_k(\lambda,\mu)$ записывается по степеням μ:

$$g_k(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{t_2} b_i^{(k)}(\lambda)\mu^k.$$

(1.4) Находится $f_1^{(k)}(\lambda)$, т.е. ОНД полиномов $b_i^{(k)}(\lambda)$, $i = 0,\ldots,t_2$ и разложения вида

$$b_i^{(k)}(\lambda) = f_1^{(k)}(\lambda)\widehat{b}_i^{(k)}(\lambda).$$

В результате выполнения операций (1.3), (1.4) имеем

$$f_k(\lambda,\mu) = f_1^{(k)}(\lambda)f_2^{(k)}(\mu)f_{1,2}^{(k)}(\lambda,\mu),$$

где $f_{12}^{(k)}(\lambda,\mu) := \sum\limits_{i=0}^{t_2}\widehat{b}_i^{(k)}(\lambda)\mu^i$.

(2) Находится разложение вида

$$f_k(\lambda,\mu) = \delta_1(\lambda)\delta_2(\mu)\delta_{12}(\lambda,\mu)\widehat{f}_k(\lambda,\mu),$$

где $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\mu)$ ОНД полиномов $f_1^{(k)}(\lambda)$ и $f_2^{(2)}(\mu)$, $k = 1,\ldots,m$, соответственно, так что имеем

$$f_1^{(k)}(\lambda) = \delta_1(\lambda)\omega_1^{(k)}(\lambda)$$
$$f_2^{(k)}(\mu) = \delta_2(\lambda)\omega_1^{(k)}(\mu)$$

$\{\omega_1^{(k)}(\lambda)$ и $\{\omega_2^{(k)}(\mu)$, $i = 1,\ldots,m$ последовательности взаимно простых полиномов; $\delta_{12}(\lambda,\mu)$ есть ОНД полиномов $f_{1,2}^{(k)}(\lambda,\mu)$ $k = 1,\ldots,m$, так что имеем

$$f_{12}^{(k)}(\lambda,\mu) = \delta_{12}(\lambda,\mu)\omega_{12}^{(k)}(\lambda,\mu),$$

где $\omega_{1,2}^{(k)}(\lambda,\mu)$, $k=1,\dots,m$, есть взаимно простые полиномы над кольцом скалярных полиномов от двух переменных:

$$\widehat{f}_k(\lambda,\mu) := \omega_1^{(k)}(\lambda)\omega_2^{(k)}(\mu)\omega_{12}^{(k)}(\lambda,\mu).$$

В результате выполнения первого этапа будут получены

• СНАУ вида (8.5.2), не содержащая одномерных корней. (Конечные нульмерные корни (8.5.2) совпадают с таковыми для исходной системы (8.5.1));

• не зависящие друг от друга скалярные уравнения

$$\begin{aligned} &\delta_1(\lambda)=0, \quad \delta_2(\mu)=0,\\ &\delta_{12}(\lambda,\mu)=0, \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

корни которых совпадают с конечными одномерными корнями исходной системы (8.5.1), так что $h(\lambda,\mu) := \delta_1(\lambda)\delta_2(\mu)\delta_{12}(\lambda,\mu)$ есть ОНД полиномов $f_k(\lambda,\mu)$ исходной СНАУ (8.5.1).

8.5.1.2 Второй этап. состоит в решении СНАУ (8.5.2)

Введем в рассмотрение матричный полином

$$\begin{aligned} F(\lambda,\mu) &:= \left(\widehat{f}_1(\lambda,\mu),\dots,\widehat{f}_m(\lambda,\mu)\right)\\ &\equiv C_s(\mu)\lambda^s + C_{s-1}(\mu)\lambda^{s-1} + \dots C_0(\mu) \end{aligned}$$

где s – максимальная степень по λ полиномов $\widehat{f}_k(\lambda,\mu)$, $k = 1,\dots,m$.

Запишем (8.5.2) в эквивалентном виде

$$\mathfrak{A}(\mu)\Lambda = 0, \tag{8.5.6}$$

где $\mathfrak{A}(\mu) = \left[C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)\right]$ есть $m\times(s+1)$ полиномиальная по μ матрица, $\Lambda = \left(\lambda^s,\lambda^{s-1},\dots,1\right)^T$ – вектор.

Реализация второго этапа основан на связи решений СНАУ (8.5.2) со спекральными характеристиками уравнений (8.5.6)

Пусть $\mu=\mu^*$ есть точка спектра матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$; $Q(\mu^*)$- матрица, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства $\mathfrak{A}(\mu^*)$, Рассмотрим пучок

$$Q_+(\mu^*) - \lambda Q_-(\mu^*),$$

где матрицы $Q_+(\mu^*)$, $Q_-(\mu^*)$ составлены из s первых и s последних строк $Q(\mu^*)$. Обозначим $\lambda=\lambda_i^*$, $i=1,\dots,t$ собственные значения пучка. Тогда пары чисел (λ_i^*,μ^*), $i=1,\dots,t$ удовлетворяют уравнению (8.5.6). К таким парам будем ссылаться как к точкам спектра $F(\lambda,\mu)$, порожденного собственными значением μ^* матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. Обозначим $W_0(\mu)$ матрицу размеров $(s+1)\times n_1$, столбцы которой образуют минимальный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, полученного алгоритмом ΔW-1 факторизации матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. Имеем

$$\mathfrak{A}(\mu)W(\mu) = \big[\Delta(\mu), \mathbb{O}\big],$$

где $W(\mu) = \big[W_1(\mu), W_0(\mu)\big]$, так что число последних столбцов n_1 матрицы $W(\mu)$, образующие матрицу $W_0(\mu)$, равно числу столбцов нулевой матрицы $\mathbb{O}$. Пусть N_c обозначает правое нуль-пространство матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$. Имеем

$$\begin{aligned} N_c &= W_0(\mu^*) \cup S(\mu^*) \quad &\text{при} \quad \mu = \mu^*;\\ N_c &= W_0(\mu) &\text{при} \quad \mu \neq \mu^*. \end{aligned}$$

Здесь $S(\mu^*)$ есть инвариантное подпространство матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, порожденное ее собственным значением μ^*.

Справедливы следующие утверждения.

1^0. Конечный спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$ состоит из объединения

• конечных спектров, порожденных собственными значениями матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$;

• конечного спектра пучка

$$F_1(\lambda,\mu) := W_+^{(0)}(\mu) - \lambda W_-^{(0)}(\mu).$$

Здесь $W_+^{(0)}(\mu)$ и $W_-^{(0)}(\mu)$ суть $s\times n_1$ матрицы составленные соответственно из s первых и s последних строк матрицы $W_0(\mu)$.

2^0. Конечный спектр пучка $F_1(\lambda,\mu)$ состоит из объединения

• конечных спектров, порожденных собственными значениями матрицы $\mathfrak{A}_1(\mu) := \big[-W_-^{(0)}(\mu), W_+^{(0)}(\mu)\big]$;

• конечного спектра пучка

$$F_2(\lambda,\mu) := W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu).$$

Здесь $W_+^{(1)}(\mu)$ и $W_-^{(1)}(\mu)$ суть $n_1\times n_2$ матрицы, составленные соответственно из n_1 первых и n_1 последних строк матрицы $W_1(\mu)$, столбцы которой образуют минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}_1(\mu)$, построенный с помощью ΔW-1 алгоритма. При этом $n_1 \geqslant n_2$.

8.5.1.3. Метод решения СНАУ-(8.5.2). состоит из конечного числа шагов и требует построения последовательности полиномиальных по μ матриц $\{\mathfrak{A}_k(\mu)\}$, $k = 0, \dots, l$.

Здесь $\mathfrak{A}_0(\mu) = \mathfrak{A}(\mu) \equiv \big[C_s(\mu), \dots, C_0(\mu)\big]$ есть $m \times (s_0 + 1)n_0$ матрица ($s_0 = s$, $n_0 = 1$);

$$\mathfrak{A}_k(\mu) = \big[-W_-^{(k-1)}(\mu), W_+^{(k-1)}(\mu)\big] \quad \text{есть} \quad s_{k-1}n_{k-1} \times (s_{k-1}+1)n_k$$

матрица, состоящая из двух матричных блоков $-W_-^{(k-1)}(\mu)$ и $W_+^{(k-1)}(\mu)$. Матрицы $W_+^{(k-1)}(\mu)$ и $W_-^{(k-1)}(\mu)$ составлены соответственно из $s_{k-1}n_{k-1}$ первых $s_{k-1}n_{k-1}$ последних строк матрицы $W_{k-1}(\mu)$ размеров $(s_{k-1}+1)n_{k-1} \times n_k$, столбцы которой образуют минимальный базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}_{k-1}(\mu)$,

$$s_0 = s, \quad s_k = 1, \quad \text{если} \quad k \neq 0, \quad n_k = \dim W_{k-1}(\mu).$$

Переход от шага k к шагу $k+1$ требует выполнения следующих операций

(1) Для матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$, полученной на шаге k метода, вычисляется матрица $W_k(\mu)$. Эта операция реализуется с помощью ΔW-1 алгоритма, примененного к $\mathfrak{A}_k(\mu)$.

Имеем

$$\mathfrak{A}_k(\mu) W_k(\mu) = \big[\Delta(\mu), \mathbb{O}\big].$$

Здесь $\mathbb{O}$-нулевая матрица; $W_k(\mu) = \big[W_1(\mu), W_0(\mu)\big]$, где $W_0(\mu)$ составлена из последних столбцов унимодулярной матрицы $W_k(\mu)$, число которых равно числу столбцов нулевой матрицы $\mathbb{O}$.

(2) Вычисляются все конечные собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$. Обозначим их μ_i^*.

(3) Вычисляется конечный дискретный спектр матрицы $F(\lambda, \mu)$, т.е. конечные нульмерные корни СНАУ (8.5.2).

Эту операцию можно реализовывать двумя способами

Первый способ состоит в выполнении следующих шагов.

(3i) Для каждого фиксированного собственного значения $\mu := \mu^*$ матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$ вычисляется матрица $Q_k(\mu^*)$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu^*)$, и формируется пучок из постоянных матриц

$$Q_+^{(k)}(\mu^*) - \lambda Q_-^{(k)}(\mu^*).$$

Матрицы $Q_+^{(k)}(\mu^*)$ и $Q_-^{(k)}(\mu^*)$ соответственно составляются из $s_{k-1}n_{k-1}$ первых и $s_{k-1}n_{k-1}$ последних строк матрицы $Q_k(\mu^*)$.

(3ii) Вычисляются все конечные собственные значения λ_j пучка.

(3iii) Операция (3i), (3ii) повторяются для каждого собственного значения μ^* матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$. Тогда пары $(\lambda^*_{ji}, \mu^*_i)$ так вычисленных чисел образуют дискретный спектр матрицы $F(\lambda, \mu)$ (или что то же нульмерные решения СНАУ (8.5.2)), порожденные точками дискретного спектра матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$.

Второй способ состоит в выполнении следующих шагов.

(3i) Для каждого фиксированного собственного значения μ^* матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$ вычисляется СНАУ-1, т.е. система нелинейных алгебраических уравнений от λ вида

$$\widehat{f}_k(\lambda, \mu^*) = 0, \quad k = 1, \dots, m;$$

(3ii) Находятся все конечные решения λ^*_i этой СНАУ. Тогда наборы (λ^*_i, μ^*) образуют нульмерные решения СНАУ (8.5.2), порожденные собственным значением μ^* матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$.

Выполняя операции (3i) (3ii) для каждого собственного значения μ^* матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$, получим нульмерные корни СНАУ (8.5.2), порожденные спектром $\mathfrak{A}_k(\mu)$.

(4) Если $n_{k+1} := \dim W_k(\mu) \neq 0$, то осуществляется переход к следующему $(k+1)$-му шагу метода. В качестве $\mathfrak{A}_{k+1}(\mu)$ берется матрица

$$\left[-W_-^{(k)}(\mu), W_+^{(k)}(\mu) \right].$$

Процесс формирования последовательности $\{\mathfrak{A}_k(\mu)\}$ заканчивается на шаге l, когда $n_{l+1} = 0$. Ситуация $n_{l+1} = 0$ означает, что СНАУ (8.5.2) содержит только нульмерные корни и их вычисление закончено.

8.5.2. Второй метод. решения СНАУ-2 (8.5.1) состоит в выполнении следующих операций.

(1) Системе (8.5.1) сопоставляется $1 \times n$ матрица

$$\Phi(\lambda, \mu) = \left[f_1(\lambda, \mu), \dots, f_m(\lambda, \mu) \right]$$

с элементами, полиномиально зависящими от двух параметров.

(2) Находится разложение $\Phi(\lambda, \mu)$ вида

$$\Phi(\lambda, \mu) = \delta_1(\lambda)\delta_2(\mu)\widetilde{F}(\lambda, \mu),$$

где $\widetilde{F}(\lambda, \mu) \equiv \left[\widetilde{f}_1(\lambda, \mu), \dots, \widetilde{f}_m(\lambda, \mu) \right]$ – матрица, элементы $\widetilde{f}_k(\lambda, \mu)$ $k = 1, \dots, m$ которой не имеют в качестве общих делителей полиномов от одной переменной;

(3) Вычисляется ОНД полиномов $\widetilde{f}_k(\lambda,\mu), \quad k=1,\dots,m$. Для этого

(3i) находится ΔW-2 разложение матрицы $\widetilde{F}(\lambda,\mu)$. Имеем

$$\widetilde{F}(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=\big[\Delta(\lambda,\mu),\mathbb{O}\big],$$

где $W(\lambda,\mu)$–$n\times n$ – унимодулярная по λ матрица; $\Delta(\lambda,\mu)$ — полином от двух переменных, отличающийся от $\widetilde{h}(\lambda,\mu)$, т.е. общего наибольшего делителя полиномов $\widetilde{f}_1(\lambda,\mu),\dots,\widetilde{f}_n(\lambda,\mu)$, разве лишь присутствием множителей вида $(\mu-\mu_*)$;

(3ii) находится разложение $\Delta(\lambda,\mu)$ вид

$$\Delta(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widetilde{h}(\lambda,\mu),$$

где $\widetilde{h}(\lambda,\mu)$ – полином, неимеющий своими делителями полиномов от одной переменной μ. Для этого полином $\Delta(\lambda,\mu)$ записывается по степеням $\lambda:\Delta(\lambda,\mu)=\sum_{k=0}^{t}c_k(\mu)\lambda^k$ и вычисляются разложения видов $c_k(\mu)=\delta(\mu)\omega_k(\mu)$, где $\{\omega_k(\mu)\}$ взаимно простые полиномы. В качестве $\widetilde{h}(\lambda,\mu)$ берется полином $\sum_{k=0}^{t}\omega_k(\mu)\lambda^k$.

(4) Находится полином

$$h(\lambda,\mu)=\delta_1(\lambda)\delta_2(\mu)\widetilde{h}(\lambda,\mu),$$

корни которого совпадают с одномерными корнями системы (8.5.1) ($h(\lambda,\mu)$ — ОНД полиномов $\widetilde{f}_1(\lambda,\mu),\dots,\widetilde{f}_m(\lambda,\mu)$).

(5) Вычисляются все конечные нульмерные решения (λ_*,μ_*) системы (8.5.1). Для этого

(5i) вычисляются все корни μ_i уравнения*

$$\delta(\mu)=0;$$

(5ii) для каждого фиксированного $\mu_*=\mu_{*i}$ находится частное от деления $f_k(\lambda,\mu_*)$ на $h(\lambda,\mu_*)$,

$$\omega_{k*}(\lambda)=f_k(\lambda,\mu_*)/h(\lambda,\mu_*),\quad k=1,\dots,n$$

(5iii) вычисляются корни системы алгебраических уравнений од одной переменной:

$$\omega_{1*}(\lambda)=0,\dots,\omega_{n*}(\lambda)=0$$

---

*Заметим, что $\det W(\lambda,\mu)=\prod_{k=1}^{l}\prod_{i=1}^{n}l_{ii}^{(k)}(\mu)$, где $l_{ii}^{(k)}(\mu)$ – диагональные элементы, зависящие от μ, левых трапецеидальных матриц $L_k(\mu)$, формируемых в алгоритме $\Delta W-2$ разложения матрицы $\widetilde{F}(\lambda,\mu)$. Так что корни μ_{*i} полинома $\delta(\mu)$ могут быть определены в ходе применения к матрице $\widetilde{F}(\lambda,\mu)$ алгоритма ΔW-2 факторизации.

или другими словами, корни ОНД полиномов $\omega_{n*}(\lambda), \dots, \omega_{n*}(\lambda)$. Пары (λ_{*n}, μ_{*i}) так найденных чисел дадут все конечные нульмерные корни системы (8.5.1).

8.5.3. Третий метод. решения (8.5.1) состоит из двух этапов. На первом этапе от системы (8.5.1) переходим к решению спектральной задачи для пучка $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ полиномиальных матриц $A(\mu)$ и $B(\mu)$, нульмерные и одномерные собственные значения которого совпадают с искомыми нульмерными и одномерными корнями СНАУ-2. На втором этапе решаем спектральную задачу для пучка $D(\lambda, \mu)$: находим все нульмерные собственные значения пучка $D(\lambda, \mu)$ и регулярный пучок полиномиальных матриц, спектр которого дает все одномерные собственные значения $D(\lambda, \mu)$. Другими словами, находим все нульмерные корни (8.5.1) и регулярную двухпараметрическую полиномиальную матрицу, корни определителя которой совпадают с одномерными корнями системы (8.5.1). С этой целью предварительно к пучку $D(\lambda, \mu)$ применяем алгоритм разделения непрерывного и дискретного спектров, приводя его к квазитреугольному виду, диагональные блоки (регулярный и сингулярный) которого содержат соответственно непрерывный и дискретный спектр пучка $D(\lambda, \mu)$. Затем вычисляется дискретный спектр, состоящий из нульмерных собственных значений сингулярного блока квазитреугольной формы.

Реализация первого этапа состоит в выполнении следующих операций:

(1) Систему (8.5.1) записываем в виде $m \times 1$ матричного полинома степени s:

$$F(\lambda, \mu) = \big(f_1(\lambda, \mu), \dots, f_m(\lambda, \mu)\big)^T = C_s(\mu)\lambda^s + \dots + C_0(\mu), \quad (8.5.7)$$

где $C_k(\mu)$ есть m-мерный полиномиальный вектор с компонентами

$$a_{tk}^{(i)}\mu^t + a_{t-1,k}^{(i)}\mu^{t-1} + \dots + a_{0k}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

(2) Матричному полиному (8.5.7) сопоставляем сопутствующий ему пучок $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ полного столбцового ранга

вида

$$D(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} \mathbb{O} & \dots & \dots & C_0(\mu) \\ -I_m & & & C_1(\mu) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -I_m & C_{s-1}(\mu) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -I_m & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -I_m & \mathbb{O} \\ & & \mathbb{O} & -C_s(\mu) \end{bmatrix}. \tag{8.5.8}$$

Между спектральными характеристиками матричного полинома $F(\lambda,\mu)$ и сопутствующего ему пучка (8.5.8) существует взаимно однозначное соответствие. В частности дискретный и непрерывный спектры $F(\lambda,\mu)$ и $D(\lambda,\mu)$ совпадают.

Второй этап состоит в решении спектральной задачи для пучка (8.5.8) и осуществляется с помощью алгоритма, изложенного в главе 6 для пучков полиномиальных матриц общего вида. Приводим краткое описание его применительно к пучку (8.5.8). Сначала от пучка (8.5.8) переходим к эквивалентному ему пучку вида

$$\begin{bmatrix} D_{11}(\lambda,\mu) & \vdots & \mathbb{O} \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ D_{12}(\lambda,\mu) & \vdots & D_{22}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}, \tag{8.5.9}$$

где $D_{ij}(\lambda,\mu)$ — пучки полиномиальных матриц: $D_{11}(\lambda,\mu)$ имеет только непрерывный спектр, т.е. только одномерные собственные значения (или, что то же, одномерные корни СНАУ (8.5.1)). Пучок $D_{22}(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга имеет только дискретный спектр и, следовательно, определяет все нульмерные корни СНАУ (8.5.1).

Переход от (8.5.8) к (8.5.9) состоит из конечного числа шагов.

Типичный шаг требует выполнения следующий операций:

(1) Полагая $A_{11}(\mu)=A(\mu), B_{11}(\mu)=B(\mu)$, находится ΔW-1 разложение $A_{11}^T(\mu)$:

$$A_{11}^T(\mu)W_a(\mu)=\left[\Delta_a(\mu),\mathbb{O}\right].$$

(2) Вычисляется пучок

$$W_a^T\left[A_{11}(\mu)-\lambda B_{11}(\mu)\right]=\begin{bmatrix} A_2(\mu)-\lambda B_2(\mu) \\ \mathbb{O}-\lambda\tilde{B}_1(\mu) \end{bmatrix},$$

где $A_2(\mu) \equiv \Delta_a^T(\mu)$ — матрица полного строчного ранга, $\mathbb{O}$ — нулевая матрица.

(3) Находится ΔW-1 разложение матрицы $\tilde{B}_1(\mu)$:

$$\widetilde{B}_1(\mu)W_b(\mu) = \bigl[\widehat{B}_{11}(\mu), \mathbb{O}\bigr].$$

(4) Вычисляется пучок

$$W_a^T(\mu)\bigl[A_{11}(\mu) - \lambda B_{11}(\mu)\bigr]W_b(\mu) = \begin{bmatrix} A_{21}(\mu) - \lambda B_{21}(\mu) & A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu) \\ -\lambda \hat{B}_{11}(\mu) & \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

или, после перестановки блочных столбцов, пучок

$$\begin{bmatrix} A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu) & A_{21}(\mu) - \lambda B_{21}(\mu) \\ \mathbb{O} & -\lambda \widehat{B}_{11}(\mu) \end{bmatrix} \equiv W^T(\mu)\bigl[A_{11}(\mu) - \lambda B_{11}(\mu)\bigr]W_b(\mu)\theta,$$

где θ — матрица перестановок.

Если ведущая матрица $A_{22}(\mu)$ имеет неполный строчный ранг, аналогичный процесс выделения блоков из пучка $A_{22}(\mu) - \lambda B_{22}(\mu)$ продолжается и заканчивается на шаге k, когда матрица $A_{k+1,k+1}(\mu)$ имеет полный строчный ранг. В результате будет построен пучок

$$\begin{bmatrix} A_{k+1,k+1}(\mu) - \lambda B_{k+1,k+1}(\mu) & \mathbb{O} \\ A_{k+1,k}(\mu) - \lambda B_{k+1,k}(\mu) & D_{22}(\lambda, \mu) \end{bmatrix},$$

эквивалентный исходному пучку. Здесь по построению $D_{11}(\lambda, \mu) = A_{k+1,k+1}(\mu) - \lambda B_{k+1,k+1}(\mu)$ имеет полный строчный ранг (является регулярным), пучок $D_{22}(\lambda, \mu)$, являясь сингулярным полного столбцового ранга, не имеет регулярного блока.

Замечание. Описанный выше алгоритм разделения непрерывного и дискретного спектра применим к пучку $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$, не имеющему одномерных собственных значений вида $(0, \mu)$ или (∞, μ), но это не умаляет его общности, так как этих ситуаций можно избежать. Так, если $(0, \mu)$ есть одномерный корень СНАУ (8.5.1) или, что то же, одномерное собственное значение пучка $D(\lambda, \mu)$, то сдвигом спектра, т.е. заменой переменных $\lambda = \lambda' + a$ можно перейти к пучку $D(\lambda' + a, \mu)$, не имеющему $(0, \mu)$ своим собственным значением. Аналогично, если (∞, μ) есть корень СНАУ (8.5.1) или, что то же, одномерное собственное значение $D(\lambda, \mu)$, то применяют замену переменных вида $\lambda = \frac{1}{\lambda' + b}$.

При этом числа "a" и "b^{-1}" не должны совпадать ни с одним из чисел λ_*, если (λ_*, μ) есть одномерное собственное значение $D(\lambda, \mu)$.

Из сказанного выше следует, что вычисление одномерных корней СНАУ (8.5.1) сводится к нахождению непрерывного спектра регулярного пучка $D_{11}(\lambda, \mu)$, т.е. к вычислению корней уравнения $\det D_{11}(\lambda, \mu) = 0$.

Для раскрытия $\det D_{11}(\lambda, \mu)$ можно воспользоваться модификацией метода Леверье–Фаддеева, рассмотренной в главе 8, п. 8.3.2.

Построением пучка (8.5.9) вычисление нульмерных корней СНАУ (8.5.1) сведено к вычислению дискретных собственных значений пучка $D_{22}(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга. Приводим краткое описание алгоритма вычисления дискретного спектра пучка $D_{22}(\lambda, \mu)$ полиномиальных матриц полного столбцового ранга.

Пусть $D_{22}(\lambda, \mu) \equiv D_0(\lambda, \mu) = A_0(\mu) - \lambda B_0(\mu)$ пучок размеров $m_0 \times n_0$, полного столбцового ранга. Предлагаемый алгоритм состоит из конечного числа шагов и сводится к построению конечной последовательности пучков уменьшающихся размеров. Типичный (первый) шаг требует выполнения следующих операций.

(1) Формируется матрица

$$\mathfrak{A}_0 = \big[- B_0(\mu), A_0(\mu)\big]$$

и находится ее ΔW-1 разложение

$$\mathfrak{A}_0(\mu) W(\mu) = \big[\Delta_0(\mu), \mathbb{O}\big],$$

где $W(\mu) = \big[W_1(\mu), W_2(\mu)\big]$ – унимодулярная матрица с блоками $W_1(\mu)$ и $W_2(\mu)$ соответственно размеров $2n_0 \times r_0$ и $2n_0 \times [2n_0 - r_0]$, $r_0 = \operatorname{rank} \mathfrak{A}_0(\mu)$; $\Delta_0(\mu)$ – полиномиальная матрица ранга r_0, собственные значения которой совпадают с конечным спектром матрицы $\mathfrak{A}_0(\mu)$.

(2) Находится минимальный базис $W_0(\mu)$ правого нуль–пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathfrak{A}_0(\mu)$. Для чего осуществляется $\Delta W - 1$ разложение матрицы $W_2(\mu)$:

$$W_2(\mu)\widetilde{W}(\mu) = W_0(\mu).$$

Здесь $\widetilde{W}(\mu)$ — унимодулярная матрица, реализующая ΔW-1 разложение матрицы $W_2(\mu)$.

(3) Вычисляются собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_{\rho_0}$ матрицы $\Delta_0(\mu)$ и для каждого фиксированного $\mu_i = \mu_*$ находится ортогональный базис $Q_0 = \ker \mathfrak{A}_0(\mu_*)$ и пучок $Q_+ - \lambda Q_-$, где Q_+ и Q_- – матрицы, составленные из n_0 первых и n_0 последних строк Q_0.

(4) Вычисляются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ пучка $Q_+ - \lambda Q_-$. Пары (λ_{*i}, μ_*) так вычисленных чисел для каждого $\mu_* = \mu_i$ $(i = 1, \ldots, \rho_*)$ принадлежат дискретному спектру пучка $D(\lambda, \mu)$, другими словами, являются нульмерными корнями СНАУ.

(5) Формируется пучок

$$D_1(\lambda, \mu_*) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$$

размеров $m_1 \times n_1$, $m_0 > n_0 = m_1 > n_1$ с матрицами $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$, построенными из первых n_0 и последних n_0 строк матрицы $W_0(\mu)$. Процесс аналогично продолжается с пучком $D_1(\lambda, \mu)$ и заканчивается на шаге l, когда $n_l = m_{l+1} = 0$. Объединение вычисленных спектров пучков построенной последовательности дает искомый (конечный по μ) спектр пучка $D_{22}(\lambda, \mu)$ (все конечные по μ нульмерные корни (8.5.1)).

Для вычисления нульмерных корней вида (λ_*, ∞) и (∞, ∞) следует на каждом шаге процесса вычислять не только конечные собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$, но и бесконечные собственные значения ее, сделав замену переменных: $\mu = \frac{1}{\mu}$ в $\mathfrak{A}_k(\mu)$, т.е. перейти к матрице $\mu^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_k(\mu)$, матрица $\overline{\mathfrak{A}}_k(\mu)$ имеет своими собственными значениями числа μ_*^{-1}, так что собственное значение $\mu_* = \infty$ матрицы $\mathfrak{A}_k(\mu)$ перейдет в нулевое собственное значение матрицы $\overline{\mathfrak{A}}_k(\mu)$.

Далее надо образовать пучок $Q_+(0) - \lambda Q_-(0)$, где $Q_+(0)$ и $Q_-(0)$ – матрицы, построенные, как и выше, из n первых и n последних строк $Q_0 = \ker \mathfrak{A}(0)$, и найти его собственные значения, обратные величины которых обозначим λ_{*i}. Пары (λ_{*i}, ∞) и (∞, ∞) дадут искомые корни (8.5.1).

§8.6. Оценка неустранимой погрешности

Предлагается новый способ оценки погрешности начальных данных (так называемой, неустранимой погрешности) на погрешность решения системы линейно алгебраических уравнений. Этот способ позволяет в формульном виде получить погрешность в каждой компоненте решения системы, так что дальнейший анализ этих формул позволяет выявлять значения параметров исходных данных, оказывающих наибольшее влияние на погрешность решения.

Причиной неустранимой погрешности могут быть, например, следующие: несовершенство измерений (вычислений) физических констант исходных данных; погрешность аппроксимации, возникающей при переходе от непрерывной задачи к задачам линейной алгебры. В зависимости от вида аппроксимации параметры, характеризующие погрешность, могут входить полиномиально или рационально. При этом число параметров может меняться от одного и более, что, в частности, зависит от размерности решаемой задачи. В дальнейшем к неустранимым погрешностям такого вида будем ссылаться как к погрешностям полиномиального или рационального видов. Погрешность вызванную несовершенством измерений так же будем рассматривать, как погрешность полиномиального вида с линейным вхождением параметра.

Нас будет интересовать влияние неустранимой погрешности полиномиального и рационального видов на решение совместной линейно алгебраической системы

$$Ax = f \tag{8.6.1}$$

с матрицей полного столбцового ранга. При этом, если выбрать различные параметры для погрешности элементов матрицы и компонент свободного члена, то можно раздельно оценить их влияние на решение системы.

8.6.1. Способ оценки неустранимой погрешности полиномиального вида.

Решаемую систему (8.6.1) с учетом неустранимой погрешности запишем в расширенном виде

$$\mathcal{D}(\lambda)Y = 0. \tag{8.6.2}$$

Здесь $\mathcal{D}(\lambda) = [A, -f] + P(\lambda) = \{\alpha_{ij}(\lambda)\}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n + 1$; $P(\lambda)$ есть $n \times (n+1)$ матрица, имеющая своими элементами скалярные полиномы от переменной λ, которые суть погрешности как в элементах матрицы, так и в компонентах правой части: $p_{ij}(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$ суть погрешности в элементах матрицы: $p_{in+1}(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$ суть погрешности правой части; $Y = (X, 1)^T$ есть вектор из $n+1$ компоненты, первые n компонент которого дают искомое решение.

Для решения системы (8.6.2) надо найти минимальный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathcal{D}(\lambda)$. Очевидно, в случае совместной системы (8.6.1), с матрицей полного столбцового ранга, упомянутый базис состоит только из одного полиномиального вектора.

Для вычисления минимального базиса надо выполнить следующие операции.

Используя алгоритм ΔW-1 факторизации однопараметрической матрицы, вычислить унимодулярную порядка $n+1$ матрицу $W(\lambda)$, реализующую разложение

$$\mathcal{D}(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}].$$

Здесь $\mathbb{O}$ есть нулевой столбец, так что последний столбец $W_{n+1}(\lambda) := (\omega_1(\lambda), \dots, \omega_{n+1}(\lambda))^T$ матрицы $W(\lambda)$ образует минимальный базис нуль-пространства (из правых полиномиальных решений) матрицы $\mathcal{D}(\lambda)$, так как скалярные полиномы $\omega_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, n+1$, являются взаимно простыми.

Искомое решение системы (8.6.1) будет

$$X = \left(\frac{\omega_1(\lambda)}{\omega_{n+1}(\lambda)}, \dots, \frac{\omega_n(\lambda)}{\omega_{n+1}(\lambda)}\right)^T. \tag{8.6.3}$$

Как следует из (8.6.3), компоненты решения X являются рациональными функциями от параметра λ. Наиболее "опасными" в смысле чувствительности решения к неустранимой погрешности являются значения λ, совпадающие и близкие к корням уравнения

$$\omega_{n+1}(\lambda) = 0. \tag{8.6.4}$$

Так, в условиях линейной теории погрешности, неустранимая погрешность может быть задана в виде

$$P(\lambda) = \lambda P,$$

где $P = \{p_{ij}\}$ – постоянная матрица, p_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n+1$ суть порядки округления в элементах матрицы решаемой системы и в свободном члене. Получив решение в виде (8.6.3), необходимо проанализировать близость значения $\lambda = 1$ к корням уравнения (8.6.4). Близость будет характеризовать чувствительность решения к ошибкам в исходных данных.

При более сложном задании неустранимой погрешности в исходных данных, следует анализировать при каких значениях параметров заданной погрешности, решение системы претерпевает недопустимые изменения, и, быть может, следует более детально анализировать параметры входных данных, чтобы избежать некорректной постановки задачи, которая приводит к недопустимым изменениям в решении при малых изменениях параметров исходной задачи.

Мы рассмотрели способ оценки неустранимой погрешности, задаваемой в однопараметрическом полиномиальном виде, на решение системы. Идея этого способа может быть распространена как на случай погрешности полиномиального вида от двух и большего числа параметров, так и на случай погрешности рационального вида от одного и большего числа параметров.

Так, в случае неустранимой погрешности полиномиального вида от двух параметров следует для отыскания базиса правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathcal{D}(\lambda, \bar{\mu})$, зависящей от двух параметров λ, μ, воспользоваться ΔW-2 алгоритмом, реализующим разложение вида

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), \mathbb{O}].$$

Здесь $W(\lambda, \mu)$ есть двухпараметрическая регулярная матрица, унимодулярная по λ, последний столбец которой образует базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathcal{D}(\lambda, \bar{\mu})$. Для построения искомого базиса правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\mathcal{D}(\lambda, \mu)$ следует предварительно (до нормировки к единичной последней компоненте) найти общий наибольший делитель (ОНД) скалярных полиномов из элементов последнего столбца $W(\lambda, \mu)$, и поделить на него весь последний столбец. Компоненты так построенного вектора-столбца по-прежнему обозначим $(\omega_1(\lambda, \mu), \ldots, \omega_{n+1}(\lambda, \mu))^T$. Тогда искомое решение системы (8.6.1) с учетом неустранимой погрешности будет

$$X(\lambda, \bar{\mu}) = \left(\frac{\omega_1(\lambda, \bar{\mu})}{\omega_{n+1}(\lambda, \bar{\mu})}, \ldots, \frac{\omega_n(\lambda, \bar{\mu})}{\omega_{n+1}(\lambda, \bar{\mu})} \right)^T . \tag{8.6.4}$$

8.6.2. Способ оценки неустранимой погрешности рационального вида.

Для простоты рассмотрим задание неустранимой погрешности рационального вида в однопараметрическом случае. Все сказанное может быть обобщено на случай большего числа параметров.

Решаемую систему (8.6.1) с учетом неустранимой погрешности рационального вида, как и в полиномиальном случае, запишем в расширенном виде

$$R(\lambda) Y = 0. \tag{8.6.6}$$

где $R(\lambda) = [A, -f] + R_1(\lambda)$, $R_1(\lambda) = \left\{\frac{r_{ij}(\lambda)}{q_{ij}(\lambda)}\right\}$ – рациональная $n \times (n+1)$ матрица; $r_{ij}(\lambda)$ и $q_{ij}(\lambda)$ суть скалярные полиномы от $\lambda : \frac{r_{ij}(\lambda)}{q_{ij}(\lambda)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n+1$ суть погрешности в элементах матрицы, $\frac{r_{i,n+1}(\lambda)}{q_{i,n+1}(\lambda)}$, $i = 1, \ldots, n$ погрешности в компонентах свободного члена; Y есть вектор из $n+1$ компоненты, являющийся минимальным полиномиальным базисом правого нуль-пространства рациональной матрицы $R(\lambda)$, так что первые n компонент вектора Y, нормированного к единичной последней компоненте, дают решение исходной системы с учетом неустранимой погрешности рационального вида.

Для вычисления вектора Y следует матрицу $R(\lambda)$ (предварительно) представить в виде несократимой факторизации

$$R(\lambda) = T^{-1}(\lambda) S(\lambda). \tag{8.6.7}$$

Здесь $T(\lambda)$–регулярная полиномиальная $n \times n$ матрица, $S(\lambda)$–полиномиальная $n \times (n+1)$ матрица, причем матрица $[-T(\lambda), S(\lambda)]^B$ не имеет конечного спектра. Тогда искомый полиномиальный минимальный базис нуль-пространства рациональной матрицы $R(\lambda)$ совпадает с минимальным базисом нуль-пространства полиномиальной матрицы $S(\lambda)$.

Литература

1. А. И. Белинский, Б. М. Подлевский , “Вариационная характеристика собственных значений некоторых полиномиальных пучков дифференциальных операторов,” *Мат. Методы и Физ.-мех. Поля*, No. 17, 17–21 (1983).
2. В. А. Белый, “Факторизация полиномиальной матрицы и ее применение к решению спектральных задач,” *Сб. Научн. Тр. ЛКИ: Прикл. Мат. и САПР в Судостроении*, 76–83 (1987).
3. В. А. Белый, В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “Спектральные задачи для пучков матриц. Методы и алгоритмы 3.,” Препринт ЛОМИ Р-4-88 (1988).
4. В. А. Белый, “К решению спектральных задач для линейного пучка матриц,” *Сб. Научн. Тр. ЛКИ: Прикл. Мат. и САПР в Судостроении*, 18–24 (1989).
5. В. А. Белый, В. Н. Кублановская, “Решение спектральных задач для полиномиальных пучков матриц,” *Сб. Научн. Тр. ЛКИ: Прикл. Мат. и САПР в Судостроении*, 4–17 (1989).
6. В. А. Белый, В. Н. Кублановская, “Спектральные задачи для рациональных матриц. Методы и алгоритмы. 4,” Препринт ЛОМИ Р-4-88 (1990).

7. В. А. Белый, *О некоторых алгоритмах решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц*, Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук, Ленингр. ун-т (1990).
8. Т. В. Ващенко, В. Н. Кублановская, "Построение фундаментального ряда решений пучка матриц," *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **139**, 74–93 (1984).
9. В. В. Воеводин, *Линейная Алгебра*, М., Наука (1974).
10. Ф. Р. Гантмахер, *Теория Матриц*, М., Наука (1967).
11. Ж. Гашпар, Г. Поппер, "Решение алгебраической проблемы собственных значений разбиением на клетки," *Ж. Вычислит. Мат. и Мат. Физ.*, **21**, No. 2, 263–270 (1981).
12. С. К. Годунов, "Гарантированная точность в несимметрических спектральных задачах," В кн.: *Введение в вычислительную линейную алгебру*, Новосибирск, Наука, 204–223 (1991).
13. А. В. Гулин, О. М. Дроздов, С. В. Картышев, "Итерационный метод решения задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра," Препринт No. 137, ИПМ АН СССР (1986).
14. В. В. Диткин, "О приближенном вычислении собственных значений полиномиального пучка линейных операторов," *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики*, **18**, No. 5, 1302–1306 (1968).
15. О. М. Дроздов, "Сходимость одного метода решения нелинейной спектральной проблемы," *Ж. Дифф. Урав.*, **7**, 1263–1265 (1986).
16. Х. Д. Икрамов, *Численное Решение Матричных Уравнений*, Наука, М., (1984).
17. Х. Д. Икрамов, *Несимметрическая Проблема Собственных Значений*, М., Наука (1991).
18. Т. Я. Конькова, В. Н. Кублановская, Л. Е. Савинова, "К решению нелинейной спектральной задачи для матрицы," *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **58**, 54–66 (1976).
19. Т. Я. Конькова, В. Н. Кублановская, "Обращение полиномиальных и рациональных матриц," *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **202**, 97–109 (1992).
20. Т. Я. Конькова, В. Н. Симонова, "Библиотека MATLAB-функций для полиномиальных матриц," *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **219**, 53–80 (1994).
21. Кублановская В. Н., "Об одном способе построения канонического базиса матрицы," *Международный Конгресс Математиков*, (1986), тезисы.
22. В. Н. Кублановская, "Об одном способе решения полной проблемы собственных значений вырожденной матрицы," *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики*, **6**, No. 3, 611–620 (1966).
23. В. Н. Кублановская, "О применении метода Ньютона к определению собственных значений матриц," *Докл. АН СССР*, **188**, No. 5, 1004–1005 (1969) .
24. В. Н. Кублановская, "Метод Ньютона для определения собственных значений и собственных векторов матрицы," *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики*, **12** No. 6, 1371–1380 (1966).
25. В. Н. Кублановская, Т. Н. Смирнова, В. Б. Хазанов, "К решению проблемы собственных значений полиномиальной матрицы," *Тр. Ленингр. Кораблестр. Ин-та*, No. 97, 94–111 (1975).

26. В. Н. Кублановская, В. Б. Михайлов, В. Б. Хазанов, “К проблеме собственных значений нерегулярной λ-матрицы,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **58**, 80–92 (1976).
27. В. Н. Кублановская, “К анализу сингулярных пучков матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **70**, 89–102 (1977).
28. В. Н. Кублановская, “К решению спектральных задач для сингулярного пучка матриц,” *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. физики*, **18**, No. 4, 1056–1060 (1978).
29. В. Н. Кублановская, “К спектральной задаче для полиномиальных пучков матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **80**, 83–116 (1976).
30. В. Н. Кублановская, “Построение канонического базиса для матриц и пучков матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **90**, 46–62 (1979).
31. В. Н. Кублановская, “Алгоритм AB и его свойства,” *Зап. Научн. Цемин. ЛОМИ*, **102**, 42–60 (1980).
32. В. Н. Кублановская, В. Н.Симонова, “О некоторых модификациях алгоритма AB,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **111**, 117–137 (1981).
33. В. Н. Кублановская, “К спектральной задаче для полиномиальных пучков матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **111**, 109–116 (1981).
34. В. Н. Кублановская, “Об одном способе построения фундаментального ряда полиномиальных решений и жордановых цепочек для сингулярного линейного пучка матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **124**, 101–113 (1983).
35. В. Н. Кублановская, “Построение фундаментального ряда пучка матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **130**, 74–93 (1984).
36. В. Н. Кублановская, В. Б.Хазанов, “Исчерпывание в спектральных задачах для пучков матриц,” Отд. вычисл. мат-ки АН СССР, Москва, (1986), Препринт 111, с. 32.
37. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “Исчерпывание в спектральных задачах для пучков матриц,” *Вычислительные Процессы и Системы*, вып. 5, М., Наука (1987).
38. В. Н. Кублановская, “Алгоритмы вычисления спектральной структуры сингулярного линейного пучка матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **159**, 23–33 (1987).
39. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “Спектральные задачи для пучков матриц. Методы и алгоритмы. I,” Препринт ЛОМИ P-2-88, Л. (1988).
40. В. Н. Кублановская, В. Б.Хазанов, “Спектральные задачи для пучков матриц. Методы и алгоритмы II,” Препринт ЛОМИ P-3-88, Л. (1988), 33ц.
41. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, “Об одном подходе к решению нелинейных алгебраических уравнений,” Препринт ЛОМИ P-7-89, (1989), 42 с.
42. В. Н. Кублановская, “О некоторых факторизациях матричных полиномов,” *Алгебра и анализ*, **2**, No. 6, 167–176 (1990).
43. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “Спектральные задачи для пучков полиномиальных матриц. V,” Препринт ЛОМИ P-8-91, (1988), 62ц.
44. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “Спектральные задачи для пучков полиномиальных матриц,” *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **202**, 26–70 (1992).

45. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, “Об одном подходе к решению систем нелинейных алгебраических уравнений. 2,” *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **202**, 71–96 (1992).
46. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “О несократимых факторизациях рациональных матриц и их применении,” *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **219**, 117–156 (1994).
47. В. Н. Кублановская, “Метод наименьших квадратов для матриц, зависящих от параметров,” *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **219**, 176–185 (1994).
48. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, “Операции над скалярными полиномами и их машинная реализация,” *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **219**, 157–175 (1994).
49. В. Н. Кублановская, “Решение систем нелинейных алгебраических уравнений от трех переменных. Методы и алгоритмы,” *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **229**, ??? (1995).
50. В. Н. Кублановская, “О некоторых факторизациях двух параметрических полиномиальных матриц,” *Зап. Научн. Семин. ПОМИ*, **219**, 94–116 (1994).
51. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, “Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных,” (Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики).
52. В. Н. Кублановская, “Об одном способе оценки неустранимой погрешности,” (Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики).
53. М. И. Мавлянова, “Применение ортогональных преобразований к определению собственных значений и векторов полиномиальных матриц,” *Вопросы Вычисл. и Прикл. Мат.*, Ташкент, No. 41, 68–73 (1970).
54. М. И. Мавлянова, “Решение частичной проблемы собственных значений полиномиальной матрицы,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **18**, 116–124 (1970).
55. М. И. Мавлянова, “Об одном способе построения матричного решения полиномиальной матрицы,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **18**, 125–137 (1970).
56. М. И. Мавлянова, “Проблемы собственных значений полиномиальной матрицы,” *Сб. Научн. Тр. Ташкент. Политехн. Ин-та*, No. 235, 29–34 (1978).
57. А. С. Маркеус, *Введение в Спектральную Теорию Полиномиальных Операторных Пучков*, Штиница, Кишинев (1986).
58. А. Г. Мазко, “К задаче расщепления спектра регулярного пучка матриц,” *Ж. Прямые Методы в Задачах Динамики и Устойчивости Многомерных Систем*, Киев, Ин-т матем. АН УССР, (1986).
59. А. Г. Мазко, “Обобщенное уравнение Ляпунова для регулярного пучка матриц,” *Сб. Матем. Методы Исследования Прикладных Задач Динамики Тел, Несущих Жидкость*, Киев, Ин-т матем. АН УССР (1992).
60. А. Г. Мазко, “Обобщенное уравнение Ляпунова и его применение в задачах устойчивости и локализации спектра,” Диссертация физ.-мат. наук, Киев, Ин-т матем. АН УССР (1995).
61. Г. И. Марчук, *Методы Вычислительной Математики*, М., Наука (1980).

62. Н. А. Недашевский, “Решение систем алгебраических уравнений с полиномиальными матрицами,” *Докл. АН УССР, сер. А*, No. 10, 72–77 (1984).
63. Н. А. Недашевский, “Решение систем алгебарических уравнений с полиномиально-буквенными элементами,” *Мат. Методы и Физ.-Мех. Поля,* вып. 24, с. 10–16 (1986).
64. Н. А. Недашевский, “О решении систем алгебраических уравнений с λ-матрицами,” *Ж. Вычисл. Матем. и Мат. Физики*, **28**, No. 3, 439–443 (1988).
65. Ю. М. Нечепуренко, “Сингулярные функции матрицы многочленов,” М., ИВМ РАН, (1991).
66. Ю. М. Нечепуренко, *Метод Сингулярной Функции для Проблем Собственных Значений*, М., (1994).
67. Ю. М. Нечепуренко, “Метод сингулярной функции для вычисления собственных значений матрицы многочленов,” *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики* (1995).
68 Дж. Ортега, В. Рейнбалт, *Итерационные Методы Решения Систем Уравнений со Многими Неизвестными*, М., Мир (1975).
69. Б.Н. Парлетт, *Симметрическая Проблема Собственных Значений. Численные Методы*, М., Наука (1983).
70. М. Петков, “О решении уравнения $(A\lambda^2 + B\lambda + C)x = 0$,” *VIII, Int. Kongress über Anwendungen der. Mathematik in den Ingenieurwiss. mit dem Rahmenthema* (Шеимар, Бд. 2, С. 340–344 (1978). Ерфурт, (1978).
71. Петков М., “Два алгоритма за числено решаване на уравненито $(A\lambda^2+B\lambda+C)x=0$,” Девета пролетна конференция на СМБ, *Доклади. Математика и Мат. Образование*, София, БАН, 159–161 (1980).
72. Г. Г. Распутин, “О численном решении систем нелинейных алгебраических уравнений,” *Вестник ЛГУ*, No. 1, 66–70 (1977).
73. Г. Г. Распутин, “Численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений,” *Сб. Методы Вычислений*, вып. 11, 57–81 (1978).
74. Д. Сапаговне, “Последовательность Штурма для нелинейных алгебраических задач на собственные значения,” *Ж. Дифф. Уравнения и их Применение*, **16**, 87–95 (1976).
75. В. Н. Симонова, “Решение частичной проблемы собственных значений регулярного пучка матриц,” *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **159**, 33–39 (1987).
76. В. Н. Симонова, “Алгоритм ABCSD”, *Труды ЛКИ. Математическое Обеспечение Автоматизированных Систем в Судостроении*, Л. (1989).
77. В. Н. Симонова, “Модификации AB-алгоритма и их применение к решению системы нелинейных уравнений,” Автореферат дисс. канд. физ.-мат наук, Л. Ленингр. ун-т (1990).
78. Дж. Х. Уилкинсон, *Алгебраическая Проблема Собственных Значений*, М., Наука (1970).
79. Дж. Х. Уилкинсон, Рейнш, *Справочник на Языке АЛГОЛ. Линейная Алгебра*, Машиностроение, М. (1976).
80. Д. К. Фаддеев, В. Н. Кублановская, В. Н. Фаддеева, “Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами,” В кн.: *Современные Вычислительные Методы* , вып. 1 Материалы международной летней школы по численным методам Киев, 16–75 (1966).

81. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные Методы Линейной Алгебры*, ГИФМЛ, М.-Л. (1963).
82. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, "Вычислительные методы линейной алгебры," *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **54**, 3–228 (1979).
83. В. Н. Фаддеева, Х. Д. Икрамов, Е. А. Мейник, Т. Г. Фурса, *Вычислительные Методы Линейной Алгебры. Библиографический Указатель 1975–1980* (под ред. В. В. Воеводина), ЛОМИ АН СССР, Л. (1982).
84. В. Н. Фаддеева, А. Ю. Еремин, Л. Ю. Колотилина Е. А. Мейник, *Вычислительные Методы Линейной Алгебры. Библиографический Указатель 1981–1984* (под ред. В. В. Воеводина), ЛОМИ АН СССР, Л. (1986).
85. Л. Ф. Юхно, "О численном решении нелинейной спектральной задачи для симметрических матриц," *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики*, **27**, No. 9, 1320–1326 (1987).
86. В. Б. Хазанов, "О спектральных свойствах λ-матриц," *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **111**, 180–194 (1981).
87. В. Б. Хазанов, "Матричные решения, понижающие подпространства и блочная проблема собственных значений λ-матриц," *Сб. Науч. Тр. ЛКИ. Прикл. Мат. и САПР в Судостроении*, Л., 91–99 (1982).
88. В. Б. Хазанов, "О применении метода одновременных итераций для решения спектральных задач для λ- матриц," *Сб. Науч. Тр. ЛКИ. Прикл. Мат. и САПР в Судостроении*, Л., 100–110 (1982).
89. В. Б. Хазанов, "Применение метода одновременных итераций для λ-матриц," *Вычисл. Методы Линейной Алгебры*, Тр. Всес. конф. (Москва, 1982), М., ОВМ АН СССР (1983).
90. В. Б. Хазанов, "К решению спектральных задач для λ-матриц," Автореферат дис. канд. физ.-мат.наук, Л., Ленингр. ун-т (1983).
91. В. Б. Хазанов, "О некоторых спектральных характеристиках λ-матриц," *Зап. Научн. Семин. ЛОМИ*, **139**, 111–124 (1984).
92. В. Б. Хазанов, "Нормализованный процесс ортогонализации Грама–Шмидта," *Сб. Науч. Тр. ЛКИ. Прикл. Мат. и САПР в Судостроении*, Л., 109–113 (1984).
93. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный Анализ*, М., Мир (1989).
94. L. Andersson, K. Holmström, A. Ruhe, "Complex formation constants – a problem from solution chemistry", in: *Algorithms for Approximatiom*, J. C. Mason and M. G. Cox, editors, Clarendon Press, Oxford, 557–572 (1987).
95. E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, D. Sorensen, *LAPACK Users' Guide*, Society for Industrial and Applied Math. (1992).
96. P. M. Anselone, L. B. Rall, "The solution of characterictic value-vector problems by Newton's method," *Number. Math.*, **11**, No. 1, 38–45 (1968).
97. P. Arbenz, W. Geneler, "Solving nonlinear eigenvalue problems by algorithmic differentiation," *Computing*, **36**, No. 3, 205–215 (1986).
98. F. V. Atkinson, *Multiparameter Eigenvalue Problems.* V. 1. *Matrices and Compact Operators*, Academic Press, New York (1972).
99. H. Bart, I. Gphberg, M. A. Kaashoek, *Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions*, Birkhäuser, Basel (1974).
100. Bart H. , I. Gohberg, M. Kaashoek, P. Van Dooren, "Factorization of transfer functions," *SIAM J. Control Optim*, **18**, 675–696 (1980).

101. R. H. Bartels, G. W. Stewart, "Solution of the equation $AX + XB = C$," *Comm. Assoc. Comput. Math*, **15**, 820–826 (1972).
102. K.-J. Bathe, S. Ramaswany, "An accelerated subspace iteration method," *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, **23**, No. 3, 313–331 (1980).
103. C. Bavely , G. W. Stewart, "An algorithm for computing reducing subspaces by block diagonalization," *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**, No. 2, 359–367 (1979).
104. T. G. J. Beelen, *New Algorithm for Computing the Kronecker Structure of a Pencil with Applications to System and Control Theory*, Doctor thesis, Helmond (1987).
105. T. G. J. Beelen, P. Van Dooren, "An improved algorithm for the computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil," *Lin. Alg. Appl.*, **105**, 9–65 (1988).
106. T. G. J. Beelen, P. Van Dooren, M. Verhaegen, *A Class of Stair Case Algorithms for Generalized State Space Systems*, Proceedings of American Control Conference, Seattle Wash, 425–426 (1986).
107. V. A. Bely, V. N. Kublanovskaya, "Solution of spectral problems for polynomials matrix pencils", *Teubne texte*, **107**, 221–227 (1987).
108. V. A. Bely, V. B. Khazanov, V. N. Kublanovskaya, "Spectral poroblems for matrix pencils. Methods and Algorithms. 3" *J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **4**, No. 1, 19–51 (1989).
109. V. A. Bely, V. N. Kublanovskaya, "Spectral poroblems for rational matrices. Methods and Algorithms. 4" *J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **6**, No. 3, 1–13 (1991).
110. J. P. Berlioz, "A propos de l'algorithme QZ, RAIRO," *Anal. numer,*, **13**, No. 1, 21–30 (1979).
111. J. P. Berlioz, "Stabilité d'un algorithme recherche de valeur propre de problem generalizé," RAIRO, *Anal. numer.*, **14**, No. 3, 227–238 (1980).
112. J. P. Berlioz, *Sur L'algorithme QZ, Th. 3e Cyclé*, Rennes, Math. Appl. (1980).
113. C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, D. Sorensen, *LAPACK Provisional Contents Mathematics and Computer Science Division*, Report L-88-38, Argonne National Laboratory (1988).
114. S. P. Bhattacharyya, E. Souza, "Pole assignment via Sylvester's equation," *Systems Control Lett.*, **1**, 261–263 (1982).
115. A. Bjork, *Least Square Methods*, Dep. of Math., Linkoping university, S–581, Sweden (1987).
116. E. K. Blum, *Solution of λ-Matrices by Gradient Method*, U. S. C. Math. Dept. Report (1975).
117. D. L. Boley, "Computing the contrabolity/ observability decomposition of a linear time-invariant dynamic system, a numerical approach, PhD," Dissertation Stanford University (1981).
118. D. Bolley and G. Golub, "The Lanczos-Arnoldi algorithm and controllability," *Syst. and Cont. Lett*, **4**, 317–324 (1984).
119. A. Bojanzyk, G. Golub, P. Van Dooren, The Periodic Schur decomposition. Algorithms and Applications, SCCM Inter. Rept. NA–92–07 (1992).
120. L. Brusa, "Similtaneous iteration algorithms for the solution of large eigenvalue problems," *Publ. Ist. Applic. Calc., Ser. 3*, No. 99 (1975).
121. R. Byers, "A LINPACK-styl condition estimator for the equation $AX - XB = C$," *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–29, 926–928 (1984).

122. J. J. Dongarra, C. Moler, J. Bunch, and G. Stemart, *LINPACK User's Grud*, SIAM, Philadelphia, PA (1979).

123. J. Bunch, "The weak and strong stability of algorithms in numerical linear algebra," *Lin. Alg. Appl.*, **88/89**, 49–66 (1987).

124. S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, 1, 2, Pitman, Marshfield, MA (1980 and 1982).

125. S. L. Cambell, "The numerical solution of higher index linear time varying singular systems of differential equations," *SIAM J. Sci. Stat. Computing*, **6**, No. 2, 334–348 (1985).

126. T. Chan, "Rank revealing QR factorizations," *Lin. Alg. Appl.*, **88/89**, 67–82 (1987).

127. L. O. Chua, *Introduction to Nonlinear Network Theory*, Mc. Graw Hill, New York (1969).

128. K. E. Chu, *Exclusion Theorems and the Perturbation Analysis of the Generalized Eigenvalue Problem*, NA-report 11/85, Dept. of Mathematics, Univ. of Reading UK (1985).

129. J. B. Cruz, J. S. Freudenberg, D. P. Looze, "A relationship between sensitivity and stability of multivariable feedback systems," *TEEE Trans. Automat. Centr.*, **26**, No. 1, 66–74 (1981).

130. B. N. Datta, "Parallel and large scal matrix computations in control: some ideas," *Linear Alg. Appl.*, **121**, 243–264 (1989).

131. C. Davis, W. M. Kahan, "The rotation of eigenvectors by a perturbation. III," *SIAM J. Num. Anal.*, **7**, 1–46, (1970).

132. G. J. Davis, "Numerical solution of a quadratique matrix equations," *SIAM J. Sci. Stat. Compat.*, **2**, No. 2, 164–175 (1981).

133. G. J. Davis, "An algorithm to compute solvents of the matrix equations $AX^2 + BX + C = 0$. Algorithm 596," *ACM Trans. Math. Software*, **9**, No. 2, 246–254 (1983).

134. A. M. Dell, R. L. Weil, G. L. Thompson, "Roots of matrix pencil: the generalized eigenvalue problems," *Comm. ACM*, **14**, No. 2, 113–117 (1971).

135. J. E. Dennis, J. F. Traub, R. P. Weber, *On Matrix Polynomial. Lambda-Matrix and Block Eigenvalue Problems*, Cornegie-Mellon, Univ. Dept. Compat. Sci. CMU-CS-71-110, Pittsburg (1971).

136. J. Demmel, "The condition number of eigenvalence transformations that block diagonalize matrix pencils," *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**, 599–610 (1983).

137. J. Demmel, B. Kågström, *Stable Eigendecompositions of Matrix Pencils* $A-\lambda B$, Rep. UMINF-118.84, University of Umeå (1984).

138. J. Demmel, B. Kågström, *Stable Eigendecompositions of Matrix Pencils*, Computer Science Dept. Technical Report No. 163, Courant Inst., New York Univ. (1985).

139. J. Demmel, B. Kågström, *Stability Computing the Kronecker Structure and Reducing Subspaces of Singular Pencils* $A-\lambda B$ *for Uncertain Data*, Proceedings of Conf. on large eigenvalue problems, IBM Europe Int., Austria (1986).

140. J. Demmel, "Computing stable eigendecompositions of matrices," *Lin. Alg. Appl.*, **79**, 163–193 (1986).

141. J. Demmel, B. Kågström, "Computing stable eigendecompositions of matrix pencils," *Lin. Alg. Appl.*, **8**, 139–186 (1987).

142. J. Demmel, B. Kågström, "Accurate solutions of ill-posed problems in control theory," *SIAM J. Mat. Anal. Appl.*, **9**, No. 1, 126–145 (1988).
143. J. Demmel, W. Kahan, "Accurate singular values of bidiagonal matrices," *SIAM Sci. Stat. Comput*, **11**, No. 5, 873–912 (1990).
144. J. Demmel, B. Kågström, *The Generalized Schur Decomposition of an Arbitrary Pencil $A - \lambda B$: Robust Soltware with Error Bounds and Applications. Part* I*: Theory and Algoritms*, ACM Trans. Math. Software and Report UMINF 91.22 (1991).
145. J. Demmel, B. Kågström, *The Generalized Schur Decomposition of an Arbitrary Pencil $A - \lambda B$: Robust Soltware with Error Bounds and Applications. Part* II*: Theory and Algoritms*, ACM Trans. Math. Software, submitted, 1–29 (1991).
146. J. E. Dennis, J. E. Traub, R. P. Weber, "The algebraic theory of matrix polynomials," *SIAM J. Numer. Anal.*, **13**, No. 6, 831–845 (1978).
147. J. E. Dennis, J. E. Traub, R. P. Weber, "Algorithm for solvents of matrix polynomials," *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**, No. 3, 523–533 (1978).
148. J. E. Dennis, R. B. Scnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Press Hall Inc. Englewood Clifts, New York (1983).
149. P. Deuflhard, W. Sautter, *On Rank Deficient Pseudo-Inverses*, Preprint, Univ. Heidelberg, Inst. Angew. Math. (1979).
150. J. Dongara, S. Hammarling, J. Wilkinson, "Numerical considerations in computing invariant subspaces," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **13**, No. 1, 145–161 (1992).
151. P. Van Dooren, P. Dewild, *State-Space Realization of a General Rational Matrix. A Numerically Stable Algorithm*, Proc. Midw. Symp. Circ. and Syst., 773–781 (1977).
152. P. Van Dooren, G. Verghese, T. Kailath, *Propertice of the System Matrix of a Generalized Stable Space System for Rational Matrix*, Proc. Iee Conf. Contr., 173–175 (1979).
153. P. Van Dooren, "The computation of Kroneeker's canonical form of a singular pencil," *Lin. Alg. Appl.*, **27**, 103–141 (1979).
154. P. Van Dooren, *Computing of the Eigenvalue of a Polynomial Matrix*, Proc. of the IBM-NFWO Symposium, Brussels, 213–223 (1979).
155. P. Van Dooren, *The Generalized Eigenstructure Problem. Application in Linear System Theory*, Doctoral theses. Univ. of Louvain (1979).
156. P. Van Dooren, "The generalized eigenstructure problem in linear system theory," *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-26**, 111–129 (1981).
157. P. Van Dooren, P. Dewild, "Minimal cascade factorization of real and complex rational transfer matrices," *IEEE Trans. Circuits ans System CAS*, **28**, No. 5, 395 (1981).
158. P. Van Dooren, "A generalized eigenvalue approach for solving Riecati equations," *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, **2**, 121–135 (1981); Correction, **4**, No. 4, 787 (1983).
159. P. Van Dooren, "Algorithm 590:DSUBSP and EXCHQZ. Fortran routines for computing deflating subspaces with specified spectrum," *ACM Trans. Math. Software*, **8**, No. 4, 376–382 (1982).
160. P. Van Dooren, *Reducing Subsapce: Computational Aspects and Applications in Linear Systems Theory*, Proc. 5th Internat. Conference on Analysis and Optimization of Systems, Lecture Notes on Control and Information Sci. (1982).

161. P. Van Dooren, A. Emami-Nazini, "Computation of zeros of linear multivariable systems," *Automatica*, **18**, 415–430 (1982).
162. P. Van Dooren, P. Dewidle, "The eigenstructure of an arbitrary polynomial matrix. Computational aspects," *Lin. Alg. Appl.*, **50**, 545–579 (1983).
163. P. Van Dooren, "Reducing subspace: definitions, properties and algorithms," *Lect. Notes Math.*, **973**, 58–73 (1983).
164. R. Eising, "Polynomial matrices and feedbach," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC–30**, 1022–1025 (1985).
165. E. Elmroth, *Matrix Computations: Factorizing in Parallel and Surfing the Kronecker Structure Hierarchies*, Ph. D. Thesis, UmeåUniversity, Sweden (1995).
166. T. Ericsson, A. Ruhe, "The spectral transformation Lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems," *Math. Comp.*, **35**, 1251–1268 (1980).
167. T. Ericsson, A. Ruhe, "Lanczos algorithms and field of value rotations for symmetric matrix pencils," *L. A. A.*, **88/89**, 733–746 (1987).
168. T. Ericsson, A. Ruhe, "Stlm – a softwarw package for the spectral transformation Lanczos algorithm," *Technical report, UMINF* (1982).
169. G. D. Forney, "Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable linear systems," *SIAM J. Control*, **13**, No. 3, 493–520 (1975).
170. A. Friedman, M. Shinbrot, "Nonlinear eigenvalue problems," *Acta Math.*, **112**, No. 1/2, 77–125 (1968).
171. B. S. Garbow, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, C. B. Moler, *Matrix Eigensystem Routines*, EISPAC Guid Extension, Lecture Notes in Compluter Science (1977).
172. B. S. Garbow, "Algorithm 535. The QZ-algorithm to solve the generalized problem for complex matrices $F2$," *ACM Trans. Math. Software*, **4**, No. 4, 404–410 (1978).
173. B. S. Garbow, "Remark on algorithm 535. The QZ algorithm to solve the generalized eigenvalue problem," *ACM Trans. Math. Software*, **8**, No. 4, 402 (1982).
174. B. S. Garbow, "Remark on algorithm 535," *ACM Trans. Math. Software*, **10**, No. 4, 476 (1984).
175. C. W. Gear, L. R. Petzold, "Differential'Algebraic Systems and Matrix Pencils," *Lecture Notes in Mathematics*, **973**, 75–89 (1983).
176. I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Matrix Polynomials. Computer Science and Appl. Math.*, Birkhäuser.
177. I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Matrices and Indefinite Scalar Products. Operators Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser.
178. G. H. Golub, W. Kahan, "Calculating the singular values and pseudoinverse of matrix," *J. SIAM Numer. Anal. Ser. B2*, **2**, No. 2, 205–224 (1965).
179. G. H. Golub, C. Reinsch, "Singular value decomposition and least square solutions," *Numer. Math.*, **14**, No. 5, 403–420 (1970).
180. G. H. Golub, J. H. Wilkinson, "Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form," *SIAM Review*, **18**, No. 4, 578–619 (1976).
181. G. H. Golub, S. Nash, C. Van Loon, "A Hessenberg–Schur method for the matrix problem $AX + XB = C$," *IEEE Trans. Autom. Contr. AC*, **24**, 909–913 (1979).
182. G. H. Golub, C. Van Loan, *Matrix Computations* (1983).
183. G. H. Golub, C. Van Loan, *Matrix Computations*, (second edition) Johns Hopkin University Press, Baltimore, MD (1989).

184. L. Hayes, E. Wasserstron, "Solution of non-linear eigenvalue problems by the continuation method," *J. Inst. and Appl.*, **17**, No. 1, 5–14 (1976).
185. N. J. Higham, "Experience with a matrix norm estimator," *SIAM J. Sci Statist. Comput.*, **11**, 804–809 (1990).
186. J. Huitfeldt, A. Ruhe, "A new algorithm for numerical path following applied to an example from hydrodynamical flow," *SISSC*, **11**, 1181–1192 (1990).
187. Y. S. Hung, A. C. J. MacFarlan, "Analytic properties of the singular value of rational matrix," *Int. J. Control*, **37**, No. 2, 221–234 (1983).
188. K. Huseyin, K. Singhal, N. K. Jain, "On roots of functional lambda matrices," *Comput. Math. Appl. Mech. Eng.*, **10**, No. 3, 277–292 (1983).
189. N. K. Jain, K. Singhal, "Kublanovskaya's approach to the solution of the generalized latent value problem for functional λ-matrices," *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**, No. 5, 1062–1070 (1983).
190. A. Jennings, W. J. Stewart, "Simultaneous iteration for partial eigensolution of real matrices," *J. Inst. Math. Appl.*, **15**, No. 3, 341–361 (1983).
191. L. S. Jenning, M. R. Osborn, "Generalized eigenvalue problems for rectangular matrices," J. Inst. Math. and Appl., **20**, No. 4, 443–458 (1977).
192. B. Kågström, A. Ruhe, "An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix," *ACM Trans on Math. Software*, **6**, 398–419 (report), 437–443 (algorithm) (1980).
193. B. Kågström, "On computing the Kronecker canonical form of regular $A - \lambda B$-pencils," *Lect. Notes Math.*, **973**, 30–57 (1983).
194. B. Kågström, "RGSVD – An algorithm for computing the Kronecker structure and reduced subspaces of singular $A - \lambda B$-pencils," Umea Univ. Inst. Information Processing, Rep. UMINF – 112, 83, Sweden (1983).
195. B. Kågström, "The generalized singular value decomposition and the general $(A - \lambda B)$ probelm," *BIT*, **24**, 568–583 (1984).
196. B. Kågström, "RGSVD – An algorithm for computing the Kronecker structure and reduced subspaces of singular $A - \lambda B$-pencils," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **7**, No. 1, 185–211 (1986).
197. B. Kågström, L. Westin, "CSYLV-Fortran routines for the generalized Schur methods with Dif^{-1}-estimators for solving the generalized Sylvester equations," Report UMINF-B282, Institute of Information Processing, University of Umeå(1987).
198. B. Kågström, L. Westin, "Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation," *IEEE Trans. Autom. Contz.*, **34**, (4), 745–751 (1989).
199. B. Kågström, P. Poromaa, "Distributed block algorithms for the triangular Silvester equation with condition estimator," in *Hypercube and Distributed Computters*, North-Holland, Amsterdam, 233–248 (1989).
200. B. Kågström, L. Nyström, P. Poromaa, "Parallel shared memory algorithms for solving the triangular Silvester equation," in *Vector and Parallel Computing*, Ellis Horwood, Chichester, UK, 229–240 (1989).
201. B. Kågström, "A perturbation analysis of the generalized Silvester equation $(AR - LB, DR - LF) = (C, F)$," Rep. UMINF-92.17, University of Umeå (1992).
202. B. Kågström, P. Poromaa, "Distributed and shared memory block algorithms for the triangular Sylvester equation with sep^{-1} estimators," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **13**, No. 1, 90–101 (1992).

203. B. Kågström, "A direct method for reordering eigenvalues in the generalized real Schur form of a regular matrix pair (A, B)," Report UMINF–92.18, ISSN-0348–0542, University of Umeå (1992) and also *Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications*, Klumer Acad. Publischers, Amsterdam, 195–218 (1993).
204. B. Kågström, P. Poromaa, "An LAPACK-style Block Algorithm with Dif-estimator for solving the generalized Sylvester equation," Report UMINF-93, University of Umeå, (to appear) (1993).
205. W. Kahan, "Numerical linear algebra," *Canadian Math. Bulletin*, **9**, No. 6, 757–801 (1966).
206. T. Kailath, *Lecture Notes on System Theory*, Informations systems Lab., Stanford Univ. (1978).
207. T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall (1980).
208. R. E. Kalman, "Irreducible realizations and the degree of rational matrix," *SIAM J. Appl. Math.*, **13**, 520–544 (1965).
209. L. Kaufman, "Some thoughts of the QZ-algorithm for solving the generalized eigenvalue problem," *ACM Trans. Math. Software*, **3**, No. 1, 65–75 (1977).
210. V. B. Khazanov, V. N. Kublanovskaya, "Deflaction in spectral problems for matrix pencils," *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **2**, 15–36 (1987).
211. V. B. Khazanov, V. N. Kublanovskaya, "Spectral problems for matrix pencils. Methods and Algorithms. 1," *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **3**, No. 2, 337–371 (1988).
212. V. B. Khazanov, V. N. Kublanovskaya, "Spectral problems for matrix pencils. Methods and Algorithms. 2," *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **3**, No. 3, 467–485 (1988).
213. N. M. Kostenko, "Necessary and sufficient condition for factorization of rational matrix functions," *Functional Analisis and Applications*, **12**, 87–88 (1978).
214. L. Kroneker, "Algebraisch reduction der schaaren bilinearer formen," *S. B. Acad.*, 763–776 (1890).
215. W. Kratz, E. Stickel, "Numerical solution of matrix polynomial equations by Newton's method," *IMA J. Numer. Anal.*, **7**, No. 3, 355–369 (1987).
216. V. N. Kublanovskaya, "On an approach to the solution of the generalized latent value problem for λ-matrices," *SIAM J. Numer. Anal.*, **7**, No. 4, 532–537 (1970).
217. V. N. Kublanovskaya, *On an Algorithm for Solution Spectral Problems of Linear Matrix Pencils*, LOMI Preprint E–1–82 (1982).
218. V. N. Kublanovskaya, "An approach to solving the spectral problem of $A - \lambda B$," *Lecture Notes in Mathem.*, **973**, 17–29 (1983).
219. V. N. Kublanovskaya, "The AB-algorithm and its modifications for spectral problems of linear pencils of matrices," *Numer. Math.*, **43**, 329–342 (1984).
220. V. N. Kublanovskaya, "Solution of spectral problems for matrix pencils," Colloquia Matematics Societatis Janoe Bolyai 50. Numerical Methods Miscol, 67–109 (1986).
221. V. N. Kublanovskaya, V. N. Simonova, "An approach to solving nonlinear algebraic systems," *Sov. J. Anal. Math. Modelling*, **5**, No. 4/5, 369–394 (1990).
222. V. Kublanovskaya, "Rank-devision algorithms and their applications," *J. Numer. Lin. Algebra Appl.* **1**, No. 2, 199–213 (1992).
223. V. Kublanovskaya, "Solving spectral problem for two-parameter polynomial matrices. Methods and algorithms," *J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **9**, No. 2, 111–120 (1994).

224. P. Lancaster, “Inversion of lambda-matrices and applications to the theory of linear vibrations,” *Arch. Rational Mech. Anal.*, **6**, 105–114 (1960).

225. P. Lancaster, “On eigenvalues of matrices dependent on a parameter,” *Numer. Math.*, **6**, No. 5, 377–387 (1964).

226. P. Lancaster, *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, New York (1966).

227. P. Lancaster, “A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. I, II. Ordinary differential equations with constant coefficients,” *Linear Algebra Appl.*, **18**, 189–211 (1977).

228. P. Lancaster, H. K. Wimmer, “Zur Theorie der λ-Matrizen,” *Math. Nachr.*, **68**, 325–330 (1975).

229. A. Laub, “A Schur method for solving algebraic Riccati equations,” *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **AC-24**, 913–921 (1974).

230. D. O'Leary, G. W. Stewart, “Data-flow algorithms for parallel matrix compositions,” *Comm. ACN*, **28**, 840–853 (1985).

231 F. L. Levis, “Fundamental reachability, and observability matrices for descriptor systems,” *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **AC-30**, No. 5, 502–505 (1985).

232. C. Van Loan, “Computing the CS and the generalized singular value decomposition,” *Numer. Math.*, **46**, No. 4, 479–491 (1985).

233. C. Van Loan, “Generalizing the singular value decomposition,” *SIAM J. Number Anal.*, **13**, No. 1, 76–83 (1976).

234. C. Van Loan, *Computing the CS and the Generalized Singular Value Decomposition*, Cornell Univ. Report TR84–614 (1984).

235. C. Van Loan, “A general matrix eigenvalue algorithm,” *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**, 812–834 (1975).

236. B. McMillan, “Introduction to formal realizability theory I and II,” *Bell. Syst. Techn. J.*, **31**, 217–279, 541–600 (1952).

237. C. Moler, G. Stewart, “An algorithm for the generalized matrix eigenvalue problem,” *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 241–256 (1973).

238. R. Natarajan, “An Arnoldi-based iterative scheme for nonsymmetric matrix pencils arising in finite element stability problems,” *J. Comput. Phys.*, **100**, 128–142 (1992).

239. Yu. M. Nechepurenko, “Singular functions of polynomial matrices,” *Russ. J. Numer. Annal. Math. Modelling*, **7**, No. 1, 63–74 (1992).

240. A. Neumaier, “Residial inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem,” *SIAM J. Numer. Anal.*, **22**, No. 5, 914–923 (1985).

241. C. C. Paige, “Properties of numerical algorithms related to computing controllability,” *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC-26**, 130–138 (1981).

242. C. C. Paige, M. Saunders, “Towards a generalized singular value decomposition,” *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**, No. 3, 398–405 (1981).

243. C. C. Paige, “Computing the generalized singular value decomposition,” *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, 1126–1146 (1986).

244. C. Papaconstantinou, “Iterative solution of the generalized eigenvalue problem,” *J. Inst. Math. and Appl.*, **17**, No. 2, 255–260 (1976).

245. L. Pernedo, *Algebraic Control Theory for Linear Multivariable System*, Ph. D. Thesis, Depr. Aut. Control, Lund Inst. of Technology, Sweden (1978).

246. G. Peters, J. H. Wilkinson, “$Ax = \lambda Bx$ and the generalized eigenvalue problem,” *SIAM J. Numer. Anal.*, 479–492 (1970).

247. G. Peters, J. H. Wilkinson, "Computing the generalized singular value decompositions," *SIAM J. Sci. Stanf. Comput.*, **4**, 1112–1146 (1986).
248. G. Popper, Z. Gáspár, *The Solution of the Algebraic Eigenvalue Problem by Partitioning*, Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures. Proc. Euromech Colloq. (Matkafúred, 1979), Ed. A.Bosznay. Akad. Kiadó, Budapest, 399–413 (1980).
249. G. Popper, J. Gyórgyi, "Computation of eigenfreguencies of structures by lambda-matrices," *Z. Angew. Math. Mech.*, **62**, No. 4, 68–69 (1982).
250. G. Popper, Z. Gáspár, "Numerical method for solving eigenvalue problems of lambda-matrices of degree," *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.*, **94**, No. 3/4, 103–109
251. P. Poromaa, *Design and Implemention Aspects of Parallel Algorithms for the Triangular Silvester Equation with Condition Estimator*, Report UMINF–18890, UmeåUniversity (1990).
252. A. Pokrzywa, "On perturbations and the eigenvalence orbit of a matrix pencil," *Linear Alg. Appl.*, **82**, 99–121 (1986).
253. L. Postlethwaite, A. G. J. MacFarlan, *A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems*, Lecture Notes in Control and Information Dciences, **12**, Springer Verlag, New York (1979).
254. G. H. Rodrigne, "A gradient method for the matrix eigenvalue problem $AX = \lambda BX$," *Numer. Math.*, **22**, No. 1, 1–16 (1973).
255. H. H. Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*, John Wiley and Sone, New York (1970).
256. H. H. Rosenbrock, "Structural properties of linear dynamical systems," *Int. J. Control*, **20**, No. 2, 191–202 (1974).
257. A. Ruhe, "An algorithm for numerical determination of the structure of a general matrix," *BIT*, **10**, 196–216 (1970).
258. A. Ruhe, "Perturbation bounds for means of eigenvalues and invariant subspaces," *BIT*, **10**, 343–354 (1970).
259. A. Ruhe, *Algorithms for the Nonsymmetric Algebraic Eigenvalue Problem*, PhD thesis, Lund, Sweden (1970).
260. A. Ruhe, T. Wiberg, "The method of conjugate gradients used in inverse iteration," *BIT*, **12**, 543–554 (1972).
261. A. Ruhe, "Algorithms for the nonlinear algebraic eigenvalue problem," *SIAM J. Num. Anal.*, **10**, 674–689 (1973).
262. A. Ruhe, "Iterative eigenvalue algorithms for large symmetric matrices," in: L. Collatz and K. P. Hadeler, editors, *Eigenwertprobleme*, ISNM 24, **24**, 97–115. Birkhäuser Verlag Base; und Stuttgart (1974).
263. A. Ruhe, "SOR-methods for the eigenvalue problem of large sparse matrices," *Math. Comp.*, **28**, 695–710 (1974).
264. A. Ruhe, "On the closeness of eigenvalues and singular values for almost normal matrices," *Lin. Alg. Appl.*, **11**, 87–93 (1975).
265. A. Ruhe, "Numerical computation of principal components when several observations are missing," Technical report, UMINF–48, Umeå(1974).
266. A. Ruhe, "Iterative eigenvalue algorithms based on convergent splittings," *Journal of Comp. Physics*, **19**, 110–120 (1975).
267. A. Ruhe, "Numerical methods for the solution of large sparse eigenvalue problems," in: V. A. Barker, editor, *Sparse Matrix Techniques, Lect. Notes Math.*, **572**, 1300-184. Springer Berlin-Heidelberg–New York (1976).

268. A. Ruhe, "Accelerated Gauss–Newton algorithms for nonlinear least squares problems," *BIT*, **19**, 356–367 (1979).
269. A. Ruhe, "A universal elimination scheme for generalized linear least squares problems with equality constraints," Technical report, UMINF–74 (1974).
270. A. Ruhe, "Eigenvalues in an APL environment, an algorithm based on Rayleigh quotient iteration," *APL Quote Quad*, **10**, No. 3, 29–30 (1980).
271. A. Ruhe, "Fitting empirial data by positive sums of exponentials," *SIAM J. Scient and Stat Comp.*, **1**, 481–498 (1980).
272. A. Ruhe, "Fitting empirial data by positive sums of exponentials," in: M. M. Barrit and D. Wishart, editors, COMPSTAT, *Edinburgh*, 622–628. Physica-Verlag, Vienna (1980).
273. A. Ruhe, P. A. Wedin, "Algorithms for separable nonlinear least squares problems," *SIAM Rewiew*, **22**, 318–337 (1980).
274. A. Ruhe, "Numerical aspects of Gram–Schmidt orthogonalization of vectors," *L. A. A.*, **52/53**, 591–601 (1983).
275. A. Ruhe, "The two-sided Arnoldi algorithm for nonsymmetric eigenvalue problems," in: B. Kågström and A. Ruhe, editors, *Matrix Pencils LNM*, **973**, 104–120. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1983).
276. A. Ruhe, S. Wold, W. J. Dunn, "The collinearity problem in linear regression the partial least squares (pls) approach to generalized inverses," *SISSC*, **5**, 735–743 (1984).
277. A. Ruhe, "Rational Kryliv sequence methods for eigenvalue computation," *L. A. A*, **58**, 391–405 (1984).
278. A. Ruhe, Y. F. Zhou, "Numerical path following and eigenvalue criteria for branch switching," in: J. Cullum and R. A. Willoughby, editors, *Large Scale Eigenvalue Problems*, 121–142. Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland (1986).
279. A. Ruhe, "Rational Krylov algorithms for nonsymmetric eigenvalue problems," in: G. Golub, A. Greenbaum, M. Luskin, editors, *Iterative methods for Sparse and Structured Problems, Proc. conf. IMA*, University of Minnesota, Feb.24–28, 1992. Springer-Verlag, New York (1993).
280. A. Ruhe, "Rational Krylov algorithms for nonsymmetric eigenvalue problems, II" The homogeneous case. in: ILAS Conference Lisbon Aug 3–7, 1992, to appear in L. A. A. (1993).
281. H. Rutishauser, "Computational aspects of F. Bauer's simultaneous itaration method," *Numer. Math.*, **13**, No. 1, 4–13 (1969).
282. Y. Saad, "Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems," *Math. Comput.*, **42**, No. 166, 567–588 (1984).
283. B. T. Smith, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, B. S. Garbow, Y. Ikebe, V. C. Klema, C. B. Moler, "Matrix eigensystem routines – EISPACK Guide," *Lecture Notes in Computer Sci.*, **6**, (1976).
284. H. J. S. Smith, "On systems of linear congruences," *Proc. London Math. Soc.*, **IV**, 241–249 (1973).
285. D. S. Scott, "Solving sparse symmetric definite quadratic λ-matrix problem," *BIT*, **21**, No. 4, 475–480 (1981).
286. D. S. Scott, R. G. Ward, "Solving symmetric-definite quadratic λ-matrix problem without factorization," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **3**, No. 1, 58–67 (1982).
287. G. W. Stewart, "On the sensivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$," *SIAM J. Numer. Anal.*, **9**, No. 4, 669–686 (1972).

288. G. W. Stewart, *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, New York (1973).
289. G. W. Stewart, "Error and perturbation bounds for subspaces associated with certain eigenvalue problems," *SIAM Rev.*, **15**, 752–764 (1973).
290. G. W. Stewart, "Gershgorin theory for the generalized eigenproblem $Ax = \lambda Bx$," *Math. Comp.*, **29**, No. 130, 600–606 (1975).
291. G. W. Stewart, "Perturbation bounds for the QR factorization of a matrix," *SIAM J. Num. Anal.*, **14**, 509–518 (1977).
292. G. W. Stewart, "The effecient generation of random orthogonal matrices with an application of condition estimators," *SIAM J. Numer. Anal.*, **17**, No. 3, 403–409 (1980).
293. G. W. Stewart, "A method for computing the generalized singular value decomposition," *Lectire Notes Math.*, **973**, 207–220 (1982).
294. G. W. Stewart, "An algorithm for computing the CS decomposition of partioned ortogonal matrix," *Numer. Math.*, **40**, No. 3, 297–306 (1982).
295. G. W. Stewart, "Computing the CS decomposition of a partitioned orthonormal matrix," *Numer. Math.*, **40**, 297–306 (1983).
296. G. W. Stewart, *Matrix perturbation theory*, Acad. Press, New York (1990).
297. G. W. Stewart, *On the Perturbation of LU, Cholesky and QR Factorizations*, Technical Report TR–92–24, TR–2848, Department of Computer Sci, University of Muryland (1992).
298. J. -G. Sun, "Orthogonal projections and the perturbation of the eigenvalues of singular pencils," *J. Comp. Math.* (China), **1**, No. 1, 63–74 (1983).
299. J. -G. Sun, "Perturbation analysis for the generalized eigenvalue and the generalized singular value problem," *Matrix pencils. Lecture Notes in Math.*, **973**, 221–244 (1983).
300. J. -G. Sun, "Perturbation analysis for the generalized singular value problem," *SIAM J. Num. Anal.*, **20**, 611–625 (1983).
301. J. -G. Sun, "Perturbation bounds for the Cholesky and QR factorizations," *BIT*, **31**, 341–352 (1991).
302. J. -G. Sun, "Componentwise perturbation bounds for some matrix decompositions," *BIT*, **32**, 702–714 (1992).
303. J. -G. Sun, "On perturbation bounds for the QR-factorization," Report UMINF–93.07, ISSN–0348–0542 (1993).
304. S. Tan, J. Vandewalle, *State Feedbach and Pole Assignment for Singular Systems via Canonical Form*, 25-th CDC, Athens (1986).
305. G. L. Thompson, R. L. Weil, "The roots of matrix pencils $Ay = \lambda By$: existence, calculations and relations to game theory," *Linear Alg. and Appl.*, **5**, No. 3, 207–226 (1972).
306. J. S. Thorp, "The singular pencil of a linear dynamical system," *Int. J. Control*, **18**, 557–596 (1973).
307. G. A. Thurston, "Roots of lambda matrices," *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **45**, No. 4, 859–863 (1978).
308. P. Turán, "On the latent roots of λ-matrices," *Comput. and Math. with Appl.*, **1**, No. 3/4, 307–313 (1975).
309. R. Walker, *Computing the Jordan Form for Control of Dynamic Systems*, PhD thesis, Stanford University, CA 94305 (1981).
310. Pu. Wang, "An embedding method for generalized eigenvalue problems," *Math. Numer. Sinica*, **1**, No. 2, 194–198 (1979).

311. W. Waterhouse, "The codimension of singular matrix pairs," *Lin. Alg. Appl.*, **57**, 227–245 (1984).
312. J. Wilkinson, "The differential system $Bx = Ax$ and the generalized eigenvalue problem $Au = \lambda Bu$," *Nat. Phys. Lab.* , Report NAC73 (1977).
313. J. Wilkinson, *Linear Differential Equations and Kronecker's Canonical Forms*, Numer. Anal., Academ. Press, New York, 231–265 (1978).
314. J. Wilkinson, "Kronecker's canonical form and the QZ algorithm," *Nat. Phys. Lab. Div. Numer. Anal. and Comput. Sci. Rept.*, **10**, 1–21 (1979).
315. J. Wilkinson, "Kronecker's canonical form and the QZ algorithm," *Linear Algebra and Appl.*, **28**, 285–303 (1979).
316. H. K. Wimmer, "A Jordan factorization theorem for polynomial matrices," *Proc. Amer. Math. Sci.*, **75**, No. 12, 201–206 (1979).
317. W. A. Wolowich, *Linear Multivariable Systems*, Springer Verlag, New York (1974).
318. R. Wobst, "The generalized eigenvalue problem and acoustic wave computation," *Computing*, **39**, No. 1, 57–69 (1987).
319. M. Wonham, *Linear Multivariable. Theory A. Geometric Approach*, 2 nd ed., New York (1979).
320. J. Varach, "On the separation of two matrices," *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**, No. 2, 216–221 (1979).
321. G. Verghese, *Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems*, PhD thesis, Inform. Systems Lab., Stanford (1978).
322. G. Verghese, P. van Dooren, T. Kailath, "Properties of the system matrix of a generalized state-space system," *Int. J. Control*, **30**, 235–243 (1979).
323. G. Verghese, B. Levy, T. Kailath, "Generalized state-space systems," *IEEE Trans. Aut. Control*, **30**, No. 2, 235–243 (1979).
324. M. Vidyasugar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Gamburge (1985).
325. W. H. Yang, "A method for eigenvalues of sparse λ-matrices," *Int. J. Numer. Mech. Eng.*, **19**, No. 6, 943–948 (1983).
326. S. Utku, J. L. M. Clements, "Computation of eigenpares of $Ax = \lambda bx$ for vibrations of spinning deformable bodies," *Comput. Struct.*, **19**, No. 5–6, 843–847 (1984).

Kublanovskaya V. N. Methods and algorithms of solving spectral problems for polynomial and rational mathrices.

The present paper studies some methods and algorithms for numerical solution of spectral problems and problems related to them for one- and two-parameter polynomial and rational matrices.

A review of some known methods based on rank factorization of constant matrices (the SVD and QR-decomposition algorithms) is suggested. The rank factorization approach is generalized to one- and two-parameter polynomial and rational matrices. Methods and algorithms for solving some parametric problems of algebra are constructed by using rank-factorization methods.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 февраля 1996 г.