Е. П. Голубева

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМ ПРИМИТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Пусть $d > 0$ – целое, $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ и d не является полным квадратом. Через $h(d)$ обозначим число классов (в узком смысле) неопределенных бинарных квадратичных форм дискриминанта d. Еще Гаусс заметил, что $h(d)$ ведет себя крайне прихотливо при росте d. Это связано, в основном, с нерегулярностью основной единицы соответствующего вещественного квадратичного поля. Обозначим через $\varepsilon(d) = P + Q\sqrt{d}$ наименьшее решение уравнения Пелля

$$P^2 - dQ^2 = 4. \tag{1}$$

Тогда $h(d) = \sqrt{d} L_d(1)/\log\varepsilon(d)$, где $L_d(s)$ – ряд Дирихле с соответствующим квалратичным характером. Для средних значений $h(d)$ можно предположить оценку

$$\sum_{d \leqslant x} h(d) = O(X \log^{\alpha} X),$$

где $\alpha > 0$ – постоянная, но на настоящий момент известно лишь очень слабое неравенство

$$\sum_{d \leqslant X} h(d) = O(X\sqrt{X}/\log X),$$

которое получается из тривиальной оценки снизу для каждого $\varepsilon(d)$. Это связано с тем обстоятельством, что, в отличие от случая положительных бинарных квадратичных форм, ряд Дирихле

$$\sum_{d} \frac{h(d)}{d^s},$$

по-видимому, не обладает хорошими свойствами. Такими свойствами обладает ряд

$$\sum_{d} \frac{h(d)\log\varepsilon(d)}{d^s},$$

но он не дает представления о распределении значений $h(d)$.

С другой стороны, среднее значение $h(d)$ при упорядочивании по величине $\varepsilon(d)$ тесно связано с распределением норм примитивных гиперболических классов сопряженных элементов группы $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Пусть $\pi(X) = \pi_\Gamma(X)$ – число примитивных гиперболических классов с нормами, не превосходящими X^2 (по поводу определений, см., например, [1]), тогда

$$\pi_\Gamma(X) = \sum_{\varepsilon(d) \leqslant X} h(d). \tag{2}$$

Для последней суммы, ввиду ее связи с дзета-функцией Сельберга, существует асимптотическая формула с хорошей оценкой остаточного члена ([2]).

Однако при таком способе упорядочивания вопрос о соотношении величин d и $\varepsilon(d)$, который является наиболее интересным и трудным, остается в стороне. Это видно из основного результата настоящей работы.

Теорема. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\sum_{\substack{\varepsilon(d) \leqslant X, \\ h(d) < C \frac{\sqrt{d}}{\log^2 d}}} h(d) = O(X \log^3 X). \tag{3}$$

Таким образом, даже если остаточный член в асимптотической формуле для суммы (2) будет предельно улучшен, дискриминанты d, для которых $h(d) < C\sqrt{d}/\log^2 d$, фактически исключаются из суммы.

Аналогичная ситуация имеет место и для простых дискриминантов (см. Предложение 1 ниже). Заметим также, что в сумме (2) дискриминанты с нормами основных единиц -1 и 1 неравноправны, поскольку для первых $\varepsilon(d) > d$.

В заключительной части работы мы уточняем границы для оценки сверху для $\pi(x + X) - \pi(X)$, полученной в работе [6] (см. также [7]).

Доказательство теоремы. Разобьем сумму из левой части (3) на два слагаемых $\sum_1$ и $\sum_2$ следующим образом: к $\sum_1$ отнесем те $h(d)$, для которых $L_d(s)$, возможно, имеет вещественный нуль на промежутке $1 - c_1/\log d < s < 1$ при некоторой положительной постоянной c_1; множество таких d обозначим через $\mathcal{D}_0$. К $\sum_2$

отнесем все остальные $h(d)$. Количество фундаментальных дискриминантов $d \leqslant X^{\lambda}$, $d \in \mathcal{D}_0$, оценивается как $O(\log X)$ при любом фиксированном λ. (Это известный результат Ландау. См., например, [3].) Обозначим через d_0 какой-либо дискриминант из $\mathcal{D}_0$ и пусть (x_0, y_0) – наименьшее решение уравнения (1):

$$x_0^2 - d_0 y_0^2 = 4.$$

Для нефундаментальных дискриминантов вида $d_0 m^2$ имеем

$$x^2 - d_0 m^2 y^2 = 4,$$

где x имеет порядок x_0^k и $x_0^k \leqslant X$. Ясно, что

$$\sum_{\substack{d=d_0 m^2,\\ \varepsilon(d)\leqslant X,\\ d\in\mathcal{D}_0}} h(d) = O\bigl(\sum_k \frac{x}{y}\bigr) = O\bigl(X \log X \sum_k 1\bigr) = O(X \log^2 X).$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_1 = O(X \log^3 X).$$

Оценим теперь $\sum_2$. Пусть d не принадлежит $\mathcal{D}_0$. В силу известных результатов из теории L-рядов (см. [4]), $L_d(1) > c_2/\log d$, где $c_2 > 0$ – некоторая эффективная постоянная. Следовательно, для таких d имеет место оценка

$$h(d) > \frac{c_2\sqrt{d}}{\log d \log \varepsilon(d)}.$$

Если $d < X^{\lambda}$, где $\lambda > 0$ – произвольная фиксированная постоянная, то $\log \varepsilon(d) = O_{\lambda}(\log d)$ и, значит, $h(d) > c_3\sqrt{d}/\log^2 d$ при некоторой постоянной c_3, зависящей от λ.

Таким образом,

$$\sum\nolimits_2 = O\Biggl(\sum_{\substack{d\in D_0,\\ \varepsilon(d)<X,\\ h(d)<c_3\sqrt{d}/\log^2 d}} h(d)\Biggr) = O(X^{\frac{3}{2}\lambda}).$$

Выбирая λ достаточно малым, имеем нужную оценку.

Замечание. Если вместо результата Ландау использовать в доказательстве теорему Бомбьери-Виноградова, то можно получить следующую оценку:

$$\sum_{\substack{\varepsilon(d)\leqslant X,\\ h(d)<\frac{c\sqrt{d}}{\log d\log\log d}}} h(d) = O_\varepsilon(X^{1+\varepsilon}),$$

где $c>0$ – абсолютная постоянная, $\varepsilon>0$ произвольно мало.

Предложение 1. *Пусть p – простое и*

$$d_p = \begin{cases} p, & p\equiv 1 \pmod 4,\\ 4p, & p\equiv 3 \pmod 4,\end{cases}$$

тогда

$$\sum_{\varepsilon(d_p)\leqslant X} h(d_p) = O(X\log X).$$

Доказательство. Для $p\equiv 3 \pmod 4$ соответствующий результат из довольно тонких соображений был получен в работе [5].

Пусть $p\equiv 1 \pmod 4$. Из уравнения (1) для $p\neq 5$ имеем

$$y_2^2 - py_1^2 = -4,$$

где $y = y_1y_2$. По заданному y_2 p и y_1 определяются однозначно. Таким образом,

$$\sum_{\substack{p\equiv 1 \pmod 4,\\ \varepsilon(p)\leqslant X}} h(p) = O\left(X\sum_{y_1\leqslant X}\frac{1}{y_1y_2}\right) = O(X\log X),$$

и предложение доказано.

Предложение 2. *Существуют абсолютные положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что при $x>C_1$*

$$\pi(x+X)-\pi(X) > C_2\frac{xX}{\log^2 X}. \tag{4}$$

Пусть $(\log\log X)^2 < x < X$, *тогда*

$$\pi(x+X)-\pi(X) = O(Xx).$$

Доказательство. Получим сначала оценку снизу. Имеем

$$\pi(x+X)-\pi(X)=\sum_{X<\varepsilon(d)\leqslant X+x} h(d).$$

Рассмотрим d вида $d=n^2-4$. Тогда $\varepsilon(d)=n+\sqrt{n^2-4}$,

$$\sum_{X<\varepsilon(d)\leqslant X+x} h(d)>\frac{C}{\log X}\sum_{X<n<X+x/2} nL_{n^2-4}(1).$$

В силу теоремы Пейджа, не более чем одно слагаемое в последней сумме не удовлетворяет оценке снизу с $X/\log X$. Таким образом, (4) доказано.

Получим теперь оценку сверху. При $\log^2 X<x$ соответствующий результат был получен в работе [6]. Следуя рассуждениям этой работы, имеем

$$\pi(x+X)-\pi(X)=O\left(X\sum_{m<2X}\frac{1}{m}\sum_{\substack{X<n<X+x,\\ n^2\equiv 4 \pmod{m^2})}} 1\right).$$

Пусть

$$\mathcal{N}(m)=\begin{cases} 1, & \text{если сравнение } n^2\equiv 4 \pmod{m^2} \\ & \text{имеет решение при } X<n<X+x, \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда для последней суммы имеем

$$\pi(x+X)-\pi(X)=O\left(X\sum_{m<2X}\frac{\tau(m)}{m}\left(\frac{1}{m^2}x+\mathcal{N}(m)\right)\right)=$$

$$=O\left(xX+X\sum_{m<2X}\frac{\tau(m)}{m}\mathcal{N}(m)\right). \quad (5)$$

Пусть p_m – наибольший простой делитель m. Поскольку каждому значению n соответствует одно значение $p_m\leqslant X$ и n принимает не более x значений, то

$$\prod_n p_m\leqslant X^x.$$

Таким образом, p_m принимает не более чем $O(x\log X)=O(\log^3 X)$ различных значений. Множество этих значений обозначим через P. Тогда

$$\sum_{m<2X}\frac{\tau(m)\mathcal{N}(m)}{m}=O\left(\prod_{p\in P}\left(1+\frac{2}{p}\right)\right)\leqslant$$
$$\prod_{p\leqslant c_4\log^3 X}\left(1+\frac{2}{p}\right)=O(\exp 2\log\log\log X)=O(x),$$

поскольку $x\geqslant(\log\log X)^2$. Подставляя эту оценку в (5), имеем требуемое утверждение.

Литература

1. P. Sarnak, *Class number of indefinite binary quadratic forms,* J. of Number Theory **15**, No. 2 (1982), 229–247.
2. W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture,* Geom. and Funct. Analysis **5**, No. 2 (1995), 387–401.
3. Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел,* Наука, 1971.
4. J. Pintz, *Elementary methods in the theory of L-functions,* Acta Arithm. **31**, No. 1 (1976), 53–60.
5. Е. П. Голубева, *О числах классов вещественных квадратичных полей дискриминанта 4p,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 11–36.
6. H. Iwaniec, *Prime geodesic theorem,* J. reine und angew. Math. **349** (1984), 136–159.
7. В. А. Быковский, *Плотностные теоремы и среднее значение функций на коротких интервалах,* Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 56–71.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 15 сентября 1997 г.