$\boxed{\text{З. И. Боревич}}$, **В. А. Койбаев, И. В. Лаврентьев**

ГИРЛЯНДЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ПОЛНУЮ ЛИНЕЙНУЮ ГРУППУ НАД ПРОМЕЖУТОЧНЫМ ПОЛЕМ

§1. Введение

Пусть G - некоторая группа, $T \leq G$ - подгруппа группы G. Подгруппа $H \leq G$ называется промежуточной относительно T, если $T \leq H \leq G$. Решетку всех промежуточных подгрупп группы G относительно T обозначим через $\mathrm{Lat}\,(T, G)$. Введем на $\mathrm{Lat}\,(T, G)$ структуру графа, приняв все промежуточные подгруппы в качестве вершин. Если H_1 и H_2 - две промежуточные подгруппы и $H_1 \triangleleft H_2$ (т.е. H_1 - нормальный делитель в H_2), то H_1 и H_2 соединяем ребром и на ребре указываем направление из H_1 в H_2. Полученный граф называется графом нормальности, а его связные компоненты называются гирляндами (см.[1]). На решетке $\mathrm{Lat}\,(T, G)$ введем две унарные операции: $H \in \mathrm{Lat}\,(T, G)$, $H \to H^{(1)} = N_G(H)$- нормализатор подгруппы H в группе G (операция подъема) и $H \to H_{(1)} = T^H =< hTh^{-1} : h \in H >$ - операция спуска. Ясно, что любая гирлянда инвариантна относительно введенных операций. Если $H^{(1)} = H$, то H - самонормализуемая подгруппа, а если $H_{(1)} = H$, то H называется полной промежуточной подгруппой.

В данной работе рассматривается следующая ситуация. Пусть k - поле, K/k - расширение степени $n < \infty$. Пусть, далее, L - промежуточное подполе, $k \subseteq L \subseteq K$. Через $GL_L(K)$ мы обозначим полную линейную группу всех L-линейных обратимых отображений векторного пространства K_L (поля K над полем L). Ясно, что $K^* \approx GL_K(K) \leq GL_L(K) \leq GL_k(K) = G$. В нашем случае группу $GL_k(K)$ обозначим через T (максимальный нерасщепимый тор). В дальнейшем мы полагаем $H = GL_L(K)$. Подгруппа H содержится в некоторой гирлянде, которую мы обозначим через Γ_L. Основной результат работы состоит в том, что $\Gamma_L = \mathrm{Lat}\,(H_{(1)}, H^{(1)})$, то есть все подгруппы, заключенные между $H_{(1)} = T^H$ и $H^{(1)} = N_G(H)$ и образуют гирлянду Γ_L. В частности, подгруппа $T^H = H_{(1)}$ является полной, и мы даем ее описание. Мы также даем описание группы $H^{(1)} = N_G(H)$.

§2. Нормальное замыкание и нормализатор

Группы $GL_L(K)$.

Для конечного расширения полей $k \subseteq L \subseteq K$ и связанного с ним вложения $K^* \approx GL_K(K) \leq GL_L(K) \leq GL_k(K)$ положим $T = GL_K(K)$, $H = GL_L(K)$, $G = GL_k(K)$.

Теорема 1. *Если $L = F_2$ и $(K : L) = 2$, то $T^H = T$. Во всех остальных случаях $T^H = T \cdot SL_L(K)$, где $SL_L(K)$- специальная линейная группа из $GL_L(K)$.*

Доказательство. Если $L = F_2$ и $(K : L) = 2$, то нетрудно увидеть, что T - нормальная подгруппа группы $H = GL_L(K)$, поэтому $T^H = T$. Пусть $L = F_3$, $(K : L) = 2$. Так как $T \leq T^H \leq H$, то несложно увидеть, что группа T^H содержит трансвекцию, а потому и группу $SL_L(K)$, следовательно, $T^H = T \cdot SL_L(K)$. Рассмотрим теперь оставшиеся случаи. Включение $T^H \leq T \cdot SL_L(K)$ – очевидно: $t \in T, h \in H$,

$$hth^{-1} = tt^{-1}hth^{-1} = t \cdot [t^{-1}, h] \in T \cdot SL_L(K).$$

Покажем обратное включение. Очевидно, что группа T^H нормализуется группой $SL_L(K)$ и не содержится в центре группы $GL_L(K)$. Поэтому выполнены условия Теоремы 4.9 [2], согласно которой $SL_L(K) \leq T^H$. Следовательно, $T \cdot SL_L(K) \leq T^H$.

Замечание. Рассмотрим группу $D = \mathrm{diag}(1, 1, ..., N_{K/L}K^*)$ всех матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \mathrm{O} & \\ \mathrm{O} & & 1 & \\ & & & \delta \end{pmatrix}$$

порядка $m = (K : L)$, где $\delta = N_{K/L}(\alpha), \alpha \in K^*$. Легко видеть, что группа $T \cdot SL_L(K)$ в выбранном базисе поля K над L изоморфна произведению группы D и специальной линейной группы $SL(m, L)$.

Следствие 1. *Если $N_{K/L}K^* = L^*$, то $T^H = H$, а потому $H = GL_L(K)$ - полная промежуточная подгруппа в решетке $\mathrm{Lat}(T, G)$.*

Следствие 2. *Группа* T^H *является полной промежуточной подгруппой в решетке* $\mathrm{Lat}(T, G)$.

Доказательство. Пусть $H_{(1)} = T^H$. Если $L = F_2, (K : L) = 2$, то по Теореме 1 $T^H = T$, а потому $T^{H_{(1)}} = H_{(1)}$. В остальных случаях согласно Теореме 1 $H_{(1)} = T^H = T \cdot SL_L(K)$. Аналогично доказательству Теоремы 1 $T^{H(1)} \geq T \cdot SL_L(K)$. Обратное заключение очевидно. Поэтому $T^{H_{(1)}} = H_{(1)}$.

Займемся теперь вычислением нормализатора подгруппы $GL_L(K) = H$ в группе $G = GL_k(K)$. Для всякого элемента $\alpha \in K$ через $\widehat{\alpha}$ обозначим отображение $\widehat{\alpha} : K \longrightarrow K$, для которого $\widehat{\alpha}(x) = \alpha x$, $x \in K$. Очевидно, что группа $T = GL_k(K)$ совпадает с множеством $\{\widehat{\alpha} : \alpha \in K^*\}$. Следующие две теоремы вытекают из результатов работы [3].

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$N_G(H) = \{g \in G : g\widehat{L} = \widehat{L}\, g\},$$

где $\widehat{L} = \{\widehat{\lambda} : \lambda \in L^*\}$. *Таким образом,* $N_G(H) = N_G(\widehat{L})$.

Теорема 3. *Нормализатор* $N_G(H)$ *совпадает с полупрямым произведением группы* Ω, *изоморфной группе* $\mathrm{Aut}\,(L/k)$ *всех автоморфизмов поля* L, *тождественных на* k, *и группы* $H = GL_L(K)$: $N_G(H) = \Omega\, \lambda GL_L(K)$.

§3. Гирлянды, содержащие $GL_L(K)$

Напомним, что через Γ_L мы обозначим гирлянду в решетке подгрупп $\mathrm{Lat}\,(T, G)$, содержащую группу $H = GL_L(K)$. В этом параграфе мы вычисляем гирлянду Γ_L.

Пусть $k \subseteq L \subseteq K$ - конечное расширение полей, причем $(K : L) = m$. Рассмотрим следующую реализацию полной линейной группы $GL_k(K)$ и ее подгрупп.

Рассмотрим кольцо

$$\Lambda = M(m, \mathrm{End}_k(L)) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} : g_{ij} \in \mathrm{End}_k(L) \right\}$$

Покажем, что Λ изоморфно кольцу $\mathrm{End}_k(K)$. Рассмотрим базис $e_1, ..., e_m$ поля K над L ; $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_m e_m \in K, \lambda_i \in L$. Пусть

$g \in \Lambda$. Положим $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$, где

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Тогда $g \in \mathrm{End}_k(K)$. Обратно, пусть $g \in \mathrm{End}_k(K)$. Для $\lambda e_k \in Le_k/\lambda \in L$ имеем

$$g(\lambda e_k) = g_1 k(\lambda) e_1 + \dots + g_{mk}(\lambda) e_m, g_{ik}(\lambda) \in L.$$

При этом возникают k-линейные отображения $g_{ij} : L \dashrightarrow L$, то есть $g_{ij} \in \mathrm{End}_k(L)$. Тогда для матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \in M\left(m, \mathrm{End}_k(L)\right)$$

мы имеем $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m \in K, \lambda_i \in L, g(x) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$, причем

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Итак, $\Lambda = M(m, \mathrm{End}_k(L)) \approx \mathrm{End}_k(L)$, поэтому мы не будем различать кольцо Λ и $\mathrm{End}_k(L)$.

Далее, $G = GL_k(K) = \Lambda^*$. Подгруппа $H = GL_L(K)$ состоит из всех матриц из G вида

$$h = \begin{pmatrix} \widehat{\lambda}_{11} & \dots & \widehat{\lambda}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{\lambda}_{m1} & \dots & \widehat{\lambda}_{mm} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{ij} \in L,$$

где для $\lambda \in L$ через $\widehat{\lambda}$ мы обозначаем отображение $\widehat{\lambda} : L \longrightarrow L$, $\widehat{\lambda}(x) = \lambda x, x \in L$. Пусть $\omega \in \mathrm{Aut}\,(L/k)$,

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \omega \end{pmatrix} \in G : \quad \omega \in \mathrm{Aut}\,(L/k) \right\}.$$

Тогда согласно Теореме 3 $N_G(H) = \Omega\lambda H$, то есть $N_G(H) = \Omega H$ и $\Omega \cap H = 1$. Отметим, наконец, очевидную формулу

$$\omega \widehat{\lambda} \omega^{-1} = \widehat{\omega(\lambda)}$$

справедливую для всех $\lambda \in L$, $\omega \in \mathrm{Aut}(L/k)$.

Лемма 1. *Пусть* $b \in GL_k(L)$ *и* $b\,\widehat{L}\,b^{-1} \subseteq \operatorname{Aut}(L/k) \cdot \widehat{L}$, *где* $\widehat{L} = \{\,\widehat{\lambda} : \lambda \in L^*\}$. *Тогда* $b\widehat{L}b^{-1} \subseteq \widehat{L}$.

Доказательство. Пусть $A = b\widehat{L}b^{-1}$. Напомним, что $\operatorname{Aut}(L/k) \cap \widehat{L} = 1$, поэтому из того, что $\omega_1\widehat{\lambda}_1 = \omega_2\widehat{\lambda}_2$ ($\omega_i \in \operatorname{Aut}(L/k)$, $\lambda_i \in L^*$) следует, что $\omega_1 = \omega_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$. Пусть $a_0 \in A$, $a_0 = \omega_0\widehat{\lambda}_0$, где $\omega_0 \in \operatorname{Aut}(L/k)$, $\lambda_0 \in L^*$. Покажем тогда, что для всякого $a \in A$ имеет место $a = \omega_0\,\widehat{\lambda}$ для некоторого $\lambda \in L^*$. Действительно, пусть $a \in A$, $a = \omega\widehat{\lambda}$. Тогда $a_0 + a \in A$, а потому $\omega_0\,\widehat{\lambda}_0 + \omega\,\widehat{\lambda} = \omega_1\,\widehat{\lambda}_1$. Отсюда

$$\widehat{\lambda}_0 + {\omega_0}^{-1}\omega\,\widehat{\lambda} = {\omega_0}^{-1}\omega_1\,\widehat{\lambda}_1. \qquad (*)$$

Сделаем теперь одно замечание. Если для произвольных автоморфизмов $\omega, \omega_1 \in \operatorname{Aut}(L/k)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in L^*$ имеет место равенство $\omega = \omega_1\,\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2$, то $\omega = \omega_1 = 1$. Действительно, имеем $\omega(1) = 1$, откуда $\omega_1(\lambda_1) = \lambda_2 + 1$. Далее, так как для $x \in L^*$, $1 = \omega\,(x) \cdot \omega\,\left(\dfrac{1}{x}\right)$, то

$$1 = (\omega_1(\lambda_1)\,\omega_1(x) - \lambda_2 x)\left(\frac{\omega_1(\lambda_1)}{\omega_1(x)} - \frac{\lambda_2}{x}\right),$$

но так как $\omega_1(\lambda_1) = \lambda_2 + 1$, то

$$1 = ((1+\lambda_2)\,\omega_1(x) - \lambda_2 x)\left(\frac{1+\lambda_2}{\omega_1(x)} - \frac{\lambda_2}{x}\right),$$

откуда $\lambda_2(1+\lambda_2)(x - \omega_1(x))^2 = 0$. Но $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\omega_1(\lambda_1) = 1 + \lambda_2 \neq 0$. Следовательно, $\omega_1(x) = x$, для всех $x \in L^*$. Откуда $\omega_1 = 1$. Поэтому $\omega = \widehat{\lambda_1} - \widehat{\lambda_2}$, а значит $\omega = 1$. Согласно этому замечанию из (*) мы имеем ${\omega_0}^{-1}\omega = {\omega_0}^{-1}\omega_1 = 1$, откуда $\omega = \omega_0$. Итак, для всякого $a \in A$ мы имеем $a = \omega_0\widehat{\lambda}$. Но $a^2 \in A$, где $a^2 = \omega_0\,\widehat{\lambda} \cdot \omega_0\,\widehat{\lambda} = {\omega_0}^2 \cdot \widehat{{\omega_0}^{-1}(\lambda)} \cdot \widehat{\lambda}$. С другой стороны согласно сказанному $a^2 = \omega_0 \cdot \widehat{\mu}$, $\mu \in L^*$. Поэтому ${\omega_0}^2 = \omega_0$, откуда $\omega_0 = 1$. Следовательно, $A \subseteq \widehat{L}$.

Лемма 2. *Пусть* $g \in G = GL_k(K)$ *и* $g\,SL_L(K)g^{-1} \subseteq \Omega \leftthreetimes H$, *где* $H = GL_L(K)$. *Тогда* $g\,SL_L(K)\,g^{-1} \subseteq SL_L(K)$.

Доказательство. Мы пользуемся реализацией группы $GL_k(K)$ о которой мы говорили в начале параграфа. Пусть $t_{ij}(\widehat{\lambda}) = e + \widehat{\lambda}e_{ij}$ – произвольная элементарная трансвекция из $H = GL_L(K)$, $\lambda \in L$, $i \neq j$, $1 \leq i,\ j \leq m$, (e – единичная матрица порядка

$m = (K : L)$, e_{ij} – матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули). Покажем, что $g\, t_{ij}(\widehat{\lambda})\, g^{-1} \in GL_L(K)$. Матрица $g\, t_{ij}(\widehat{\lambda})\, g^{-1}$ имеет вид

$$(\delta_{rs} + \alpha_r\, \widehat{\lambda}\, \beta_s), \qquad \delta \text{ — символ Кронекера,}$$

где $\alpha_r,\ \beta_s \in \mathrm{End}_k(L)$, причем $\sum_{r=1}^m \alpha_r \beta_r = 0$. Пусть $\lambda = 1$, тогда $g\, t_{ij}(\widehat{1})g^{-1} \neq e$. Пусть, например, $\alpha_2\, \widehat{1}\, \beta_1 = \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Так как $g\, t_{ij}(\widehat{1})\, g^{-1} \in \Omega \leftthreetimes H$, то $\alpha_2\beta_1 = \sigma_0 \cdot \widehat{l}$, где $l \in L^*$, $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}\,(L/K)$. В частности, $\alpha_2\beta_1 \in GL_k(L)$. Так как $g\, t_{ij}(\widehat{\lambda})\, g^{-1} \in \Omega \leftthreetimes H$, то $\alpha_2\, \widehat{\lambda}\, \beta_1 \in \mathrm{Aut}\,(L/k) \cdot \widehat{L}$, а потому $\alpha_2 \widehat{L} \beta_1 \subseteq \mathrm{Aut}\,(L/k) \cdot \widehat{L}$. Так как $\alpha_2\beta_1 = \sigma_0\, \widehat{l}$, то $\alpha_2 = \sigma_0 \cdot \widehat{l}\, \beta_1^{-1}$ и $\alpha_2\, \widehat{L}\, \beta_1 = \sigma_0\, \widehat{l}\, \beta_1^{-1}\, \widehat{L}\, \beta_1 \subseteq \mathrm{Aut}\,(L/K) \cdot \widehat{L}$. Отсюда $\beta_1^{-1}\, \widehat{L}\, \beta_1 \subseteq \mathrm{Aut}\,(L/k) \cdot \widehat{L}$. Тогда по Лемме 2 $\beta_1^{-1}\, \widehat{L}\, \beta_1 \subseteq \widehat{L}$, а потому $\alpha_2\, \widehat{L}\, \beta_1 = \sigma_0\, \widehat{l}\, \beta_1^{-1}\, \widehat{L}\, \beta_1 \subseteq \sigma_0 \widehat{L}$. В частности, для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 \in L^*$,

$$g\, t_{ij}\, (\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2)\, g^{-1} = g\, t_{ij}\, (\widehat{\lambda}_1)\, g^{-1} \cdot g\, t_{ij}\, (\widehat{\lambda}_2)\, g^{-1},$$

поэтому для некоторых $h_r, h' \in H$, $r = 1, 2$.

$$g\, t_{ij}(\widehat{\lambda}_r)\, g^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \sigma_0 \end{pmatrix} h_r,$$

$$g\, t_{ij}(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2)\, g^{-1} = \begin{pmatrix} {\sigma_0}^2 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & {\sigma_0}^2 \end{pmatrix} h'.$$

Следовательно, $\alpha_2(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2)\beta_1 \in \sigma_0^2 \widehat{L}$, но $\alpha_2\, \widehat{\lambda}_r \beta_1 \in \sigma_0\, \widehat{L}$, $r = 1, 2$. Отсюда $\alpha_2(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2)\beta_1 \in \sigma_0^2\, \widehat{L} \cap \sigma_0\, \widehat{L}$, поэтому ${\sigma_0}^2 = \sigma_0$ и $\sigma_0 = 1$. Следовательно, $g\, t_{ij}(\widehat{\lambda})\, g^{-1} \in H = GL_L(K)$.

Теорема 4. *Пусть $H = GL_L(K)$, $T = GL_K(K)$, $G = GL_k(K)$, $A \leq G$, причем $T^H \leq A \leq N_G(H)$. Тогда $N_G(A) \leq N_G(H)$.*

Доказательство. Если $k = L = \mathbb{F}_2$, $K = \mathbb{F}_4$, то $G = H = GL_2(\mathbb{F}_2)$, $T \approx {\mathbb{F}_4}^*$ и как мы показали в Теореме 2.5.1 $T^H = T$, следовательно, утверждение теоремы очевидно. В остальных случаях по Теореме 2.5.1 $T^H \geq SL_L(K)$. Пусть $g \in N_G(A)$, тогда $g\, SL_L(K)g^{-1} \leq A$. По Теореме 3 $A \leq N_G(H) = \Omega \leftthreetimes H$. По Лемме 2 тогда $g\, SL_L(K)\, g^{-1} \leq SL_L(K)$. Известно (см., например, [4, с. 73]), что $\langle SL_L(K)\rangle_{ad} = \mathrm{End}_L(K)$. Поэтому $g\,\mathrm{End}_L(K)\,g^{-1} \subseteq \mathrm{End}_L(K)$. Следовательно, для произвольных $\varphi \in \mathrm{End}_L(K)$, $\lambda \in L$ имеем $g\,\varphi\,g^{-1}\,\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}\,g\,\varphi\,g^{-1}$, откуда $\varphi\,(g^{-1}\,\widehat{\lambda}\,g) = (g^{-1}\,\widehat{\lambda}\,g)\,\varphi$. Поэтому $g^{-1}\,\widehat{\lambda}\,g$ лежит в централизаторе $\mathrm{End}_L(K)$ в кольце $\mathrm{End}_k(K)$. Тогда согласно Лемме 2.3.3 $g^{-1}\,\widehat{\lambda}\,g \in \widehat{L}$, а потому $\widehat{L}\,g \subseteq g\,\widehat{L}$ и аналогично $g\,\widehat{L} \subseteq \widehat{L}\,g$, откуда $\widehat{L}\,g = g\,\widehat{L}$. Теперь по Теореме 2 $g \in N_G(H)$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для конечного расширения полей $k \subseteq L \subseteq K$, $G = GL_k(K)$, $H = GL_L(K)$, $T = GL_K(K)$ справедливо равенство*

$$\Gamma_L = \mathrm{Lat}\,(T^H, N_G(H))$$

Доказательство. Согласно Следствию 2 из Теоремы 1 подгруппа T^H является полной промежуточной подгруппой, содержащейся, очевидно в Γ_L. Теперь мы пользуемся терминологией работы [1]. Для подгруппы $H \in \mathrm{Lat}\,(T, G)$ положим $H_{(i)} = \big(H_{(i-1)}\big)_{(1)}$, $i \geq 1$, где $H_{(0)} = H$, $H_{(1)} = T^H$ и назовем эту операцию “спуском”. Говорят, что гирлянда “ограничена снизу”, если в ней не существует бесконечных цепей спусков (для подгрупп из гирлянды). Пусть G — группа, $T \leq G$. Напомним результат 1.3.1. В каждой гирлянде Γ решетки $\mathrm{Lat}\,(T, G)$ содержится не более одной полной промежуточной подгруппы. Для того, чтобы гирлянда Γ была ограничена снизу необходимо и достаточно, чтобы в Γ содержалась полная промежуточная подгруппа. Вернемся к нашей ситуации. Так как гирлянда Γ_L содержит по подгруппу T^H, то она ограничена снизу. Заметим также очевидный факт, что если $A \in \mathrm{Lat}\,(T^H, N_G(H))$, то $A_{(2)} = T^H$. Для доказательства Теоремы 5 достаточно показать, что если $A \in \mathrm{Lat}\,(T, G)$ и $A_{(i)} = T^H$ для некоторого i, то $A \in \mathrm{Lat}\,(T^H, N_G(H))$. Проведем индукцию по i. Если $i = 0$, то $A_{(0)} = A = T^H$ и утверждение очевидно. Пусть теперь утверждение справедливо для всех $i \leq n$, и пусть $A_{(n+1)} = T^H$. Имеем $A_{(n+1)} = \big(A_{(1)}\big)_{(n)}$ и по индукционному предположению $A_{(1)} \in \mathrm{Lat}\,(T^H, N_G(H))$. Так как $A_1 \trianglelefteq A$, то $A \leq N_G(A_1)$, но по Теореме 2.5.7 $N_G(A_1) \leq N_G(H)$. Следовательно, $T^H \leq A \leq N_G(H)$. Теорема 5 доказана.

Литература

1. А. Х. Аль Хамад, *Гирлянды в линейных группах, связанные с кольцами нормирования.* Дисс.канд.ф.-м.н. СПб..

2. Э. Артин, *Геометрическая Алгебра*. М, Наука, 1969, с. 283.
3. В. А. Койбаев, *Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **211** (1994), 133–135.
4. Д. А. Супруненко, *Группы матриц*. М, Наука, 1972, с. 351.

Borevich Z. I., Kojbaev V. A., Lavrent'ev I. V. Garlands containing the general linear groups over a intermediate field.

Let K/k be a finite extension of fields with intermediate subfield L and let $H = \mathrm{GL}_L(k)$ be the general linear group of the all L-linear invertible mappings of the vector space of the field k over L. It is proved that the intermediate between $\mathrm{GL}_k(K)^H$ and the normalizae of H subgroups form a goarland.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 4 апреля 1997 г.