Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 41–57

УДК 517.95
DOI 10.46698/l6995-7714-5336-s

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Р. Ишмеев[1,2]

[1] АО «Тинькофф Банк», Россия, 127287, Москва, ул. Хуторская 2-я, д. 38 А, стр. 26;
[2] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Россия, 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

E-mail: marat.ishmeev@yandex.ru

Аннотация. В работе решена задача об одновременном восстановлении коэффициента температуропроводности и быстро осциллирующего по времени коэффициента при источнике в одномерной начально-краевой задаче с краевыми условиями Дирихле и неоднородным начальным условием для уравнения теплопроводности по некоторым сведениям о частичной асимптотике его решения. Показано, что коэффициенты можно восстановить по определенным данным о неполной асимптотике решения. Предварительно построена и обоснована асимптотика решения исходной начально-краевой задачи. Статья стимулирована работами А. М. Денисова, в которых исследован ряд различных обратных коэффициентных задач для параболических уравнений, но при этом не рассматриваются высокочастотные осцилляции. Работа также продолжает исследования, начатые в работах В. Б. Левенштама и его учеников, в которых впервые рассмотрены обратные задачи для параболических уравнений с высокочастотными коэффициентами и разработана методика решения подобных задач. В отличие от последних, где неизвестной предполагалась только функция источника или же отдельные ее сомножители, в текущей работе мы предполагаем неизвестными одновременно коэффициент температуропроводности и один из сомножителей источника. Отметим, что задачи с быстро осциллирующими по времени данными моделируют ряд физических явлений и процессов, связанных с высокочастотными воздействиями.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, быстро осциллирующие коэффициенты, асимптотика.

AMS Subject Classification: 35K05, 35C20, 35R30.

Образец цитирования: *Ишмеев М. Р.* Обратная задача для уравнения теплопроводности с двумя неизвестными коэффициентами // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 50–57. DOI: 10.46698/l6995-7714-5336-s.

Введение

В работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в прямоугольнике с краевыми условиями Дирихле, неоднородным начальным условием, с зависящим от времени коэффициентом температуропроводности и быстро осциллирующим по времени источником. Коэффициент температуропроводности зависит от времени, а источник является произведением двух функций: одна из этих функций зависит от пространственной переменной, а вторая — от временной и быстрой временной переменных. В п. 1 построена и обоснована асимптотика решения исходной начально-краевой задачи при больших значениях частоты осцилляций. В п. 2 решена обратная задача, по условиям которой неизвестны коэффициент температуропроводности и второй сомножитель источника. Они восстановлены в работе по значениям нескольких первых коэффициентов асимптотики решения, вычисленных при фиксированном значении пространственной переменной.

Данная статья стимулирована работами [1–3], в которых исследован ряд различных обратных коэффициентных задач для параболических уравнений (без высокочастотных осцилляций). Работа также продолжает исследования, начатые в работах [4–6], в которых впервые рассмотрены обратные задачи для параболических уравнений с высокочастотными коэффициентами и разработана методика решения подобных задач. В отличие от последних, где неизвестной предполагалась только функция источника, в текущей работе мы предполагаем неизвестными коэффициент температуропроводности и функцию источника.

Заметим, что задачи с быстро осциллирующими по времени данными моделируют ряд физических явлений и процессов. К ним относятся, например: высокочастотные воздействия в механических системах; диффузия в среде, подверженной высокочастотным вибрациям; конвекция жидкости в поле быстро осциллирующих сил (см. [7–10] и др.).

1. Построение и обоснование асимптотики

Рассмотрим краевую задачу Дирихле с неоднородным начальным условием для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t)r(t,\omega t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,T)$, $T = \text{const} > 0$, $\omega \gg 1$. Введем следующие обозначения: $S_0 = [0,\pi] \times [0,T]$, $S_1 = [0,T] \times [0,+\infty)$. Пусть функции $q(x)$, $k(t)$ и $r(t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $[0,\pi]$, $[0,T]$, S_1 соответственно, кроме того, $r(t,\tau)$ 2π-периодична по τ и представима в виде $r(t,\tau) = r_0(t) + r_1(t,\tau)$, где $\langle r_1(t,\tau)\rangle = 0$, а $k(t)$ всюду положительна. Символом $\langle f(t,\tau)\rangle$ мы обозначаем интегральное среднее по τ произвольной 2π-периодической по τ фунции $f(t,\tau)$:

$$\langle f(t,\tau)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

а символом $\{f(t,\tau)\}$ следующую функцию с нулевым средним:

$$\{f(t,\tau)\} \equiv f(t,\tau) - \langle f(t,\tau)\rangle. \tag{3}$$

Пусть $q(x) \in C^3([0,\pi])$, $\varphi(x) \in C^0([0,\pi])$, $k(t) \in C^0([0,T])$, $r_0(t) \in C^0([0,T])$, $r_1(t,\tau) \in C^{1+\gamma,0}(S_1)$, где $\gamma \in (0,1)$. Символом $C^{l,m}(S)$, где l, m — неотрицательные числа, обозначаем обычные гёльдеровы пространства функций. Пусть также выполняются условия согласования

$$q(0) = q(\pi) = \frac{d^2q}{dx^2}(0) = \frac{d^2q}{dx^2}(\pi) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \tag{5}$$

Представим решение задачи (1) в следующем виде:

$$u_\omega(x,t) = u_0(x,t) + \omega^{-1}[u_1(x,t) + v_1(x,t,\omega t)] + W_\omega(x,t), \quad \omega \gg 1, \tag{6}$$

где $v_1(x,t,\tau)$ — 2π-периодическая с нулевым средним по τ функция.

Известно, что задача (1) имеет единственное классическое решение $u_\omega(x,t)$. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Решение $u_\omega(x,t)$ задачи (1) представимо в виде (6), где*

$$\|W_\omega(x,t)\|_{C(S_0)} = o(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty. \tag{7}$$

Замечание 1. Можно построить и обосновать полную асимптотику решения задачи (1) по норме $C(S_0)$ для бесконечно дифференцируемых по x и t функций $q(x)$, $\varphi(x)$, $k(t)$, $r(t,\tau)$, удовлетворяющих условиям типа (4) любого четного порядка. Но для решения обратной задачи нам понадобится лишь асимптотика вида (6).

Замечание 2. Можно построить асимптотику решения задачи (1), заменив функцию источника $q(x)r(t,\tau)$ на 2π-периодическую по τ функцию более общего вида $f(x,t,\tau)$, которая определена и непрерывна на $[0,\pi]\times[0,T]\times[0,+\infty)$. Но для удобства изложения решения обратной задачи мы предпочитаем частное представление.

$\lhd$ Действительно, подставим (6) в систему (1) и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при степенях ω^0 и ω^{-1}, а затем применим операцию усреднения по $\tau = \omega t$. В итоге придем к следующим задачам:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + q(x)r_0(t), \\ u_0(x,0) = \varphi(x), \\ u_0(0,t) = u_0(\pi,t) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1(x,t,\tau)}{\partial \tau} = q(x)r_1(t,\tau), \\ \langle v_1(x,t,\tau)\rangle = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, \\ u_1(x,0) = -v_1(x,0,0), \\ u_1(0,t) = u_1(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда, с помощью метода Фурье, находим (учтем, что в силу условий согласования (4) $v_1(0,t,\tau) = v_1(\pi,t,\tau) = 0$):

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\varphi_n e^{-n^2\int_0^t k(s)\,ds} + \sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\int_0^t q_n(s)r_0(s)e^{-n^2\int_0^{t-s} k(\xi)\,d\xi}\,ds, \tag{11}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(y)\sin(ny)\,dy, \quad q_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi q(y)\sin(ny)\,dy, \tag{12}$$

$$v_1(x,t,\tau) = q(x)\left\{\int_0^\tau r_1(t,s)\,ds\right\}, \tag{13}$$

$$u_1(x,t) = \left\langle \int\limits_0^\tau r_1(0,s)\,ds \right\rangle \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) q_n e^{-n^2 \int\limits_0^t k(s)\,ds}. \tag{14}$$

Осталась задача для слагаемого W_ω:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_\omega(x,t)}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 W_\omega(x,t)}{\partial x^2} + \omega^{-1}\left[k(t)\frac{\partial^2 v_1(x,t,\omega t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t,\omega t)}{\partial t}\right], \\ W_\omega(x,0) = 0, \\ W_\omega(0,t) = W_\omega(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Решение задачи (15) имеет вид

$$W_\omega(x,t) = \frac{1}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\left[q_n^{(2)}\int\limits_0^t k(s)p_0(s,\omega s) e^{-n^2\int\limits_0^{t-s} k(\xi)\,d\xi} ds - \right.$$
$$\left. -q_n \int\limits_0^t \frac{\partial p_0(t,\omega s)}{\partial t}\bigg|_{t=s} e^{-n^2\int\limits_0^{t-s} k(\xi)\,d\xi} ds\right], \tag{16}$$

где

$$q_n^{(2)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{d^2 q(x)}{dx^2}\bigg|_{x=y}\sin(ny)\,dy, \quad p_0(t,\tau) = \left\{\int\limits_0^\tau r_1(t,s)\,ds\right\}. \tag{17}$$

Для доказательства теоремы 1 нам достаточно показать, что

$$\|W_\omega(x,t)\|_{C(S_0)} = o(\omega^{-1}) \tag{18}$$

при $\omega \to \infty$. Воспользуемся при доказательстве той же схемой, что и в работе [5], т. е. разобъем (16) на два ряда, получим оценки для коэффициентов Фурье, применим к каждому из рядов неравенство Коши — Буняковского и оценим интегралы в получившихся рядах.

В силу того, что $q(x) \in C^3([0,\pi])$, а также выполняются условия согласования (4) на концах отрезка $[0,\pi]$, то можем продолжить $\frac{d^2q}{dx^2}(x)$ нечетным 2π-периодическим образом с сохранением класса гладкости C^1 на всей вещественной прямой. Продолжение будем обозначать также, тогда

$$\frac{d^2 q(x)}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(2)}\sin(nx), \quad x \in R, \tag{19}$$

при этом

$$q_n^{(2)} = \frac{a_n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{20}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для самой функции $q(x)$.

В силу этих соображений и неравенства Коши — Буняковского теперь нам достаточно получить равномерную по $n \in \mathbb{N}$ оценку

$$\left\|\int\limits_0^t p(s,\omega s) e^{-n^2\int\limits_0^{t-s} k(\xi)\,d\xi} ds\right\|_{C([0,T])} = o(1), \quad \omega \to \infty, \tag{21}$$

где функция $p(t,\tau)$ является 2π-периодической по τ с нулевым средним по τ.

Оценку проведем в три этапа. Сначала возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$ и $\omega > 0$ выполняется

$$\left| \int_{t_0}^{t} p(s, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-s} k(\xi)\, d\xi} ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{22}$$

где $t_0 = \max(0, t - \delta)$. Далее, учитывая положительность $k(t)$, найдем такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$, $t > \delta$ и $\omega > 0$ имеет место

$$\left| \int_{0}^{t-\delta} p(s, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-s} k(\xi)\, d\xi} ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Наконец, разобъем отрезок $[0, t - \delta]$ для любого $t > \delta$ на m равных частей $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, m - 1$ и воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} &\int_{0}^{t-\delta} p(s, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-s} k(\xi)\, d\xi} ds \\ &\quad = \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} p(s, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-s} k(\xi)\, d\xi} ds - \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_j, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-t_j} k(\xi)\, d\xi} ds \right] \\ &\qquad + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_j, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-t_j} k(\xi)\, d\xi} ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Найдем такое $m \in \mathbb{N}$, что для всех $n \leqslant n_0$, $\omega > 0$ выполняется

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} p(s, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-s} k(\xi)\, d\xi} ds - \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_j, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-t_j} k(\xi)\, d\xi} ds \right] \right| < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{25}$$

Далее, учитывая равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_j, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-t_j} k(\xi)\, d\xi} ds \\ &\quad = \frac{1}{\omega} e^{-n^2 \int\limits_0^{t-t_j} k(\xi)\, d\xi} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_0^{\omega t_{j+1}} p(t_j, \tau)\, d\tau - \int_0^{\omega t_j} p(t_j, \tau)\, d\tau \right] \end{aligned} \tag{26}$$

и тот факт, что $p(t, \tau)$ имеет нулевое среднее по τ, найдем $\omega_0 > 0$ такое, что для всех $\omega > \omega_0$ и $n \leqslant n_0$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_j, \omega s) e^{-n^2 \int\limits_0^{t-t_j} k(\xi)\, d\xi} ds \right| < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{27}$$

Следовательно, имеет место и оценка (21). Теорема 1 доказана. $\triangleright$

2. Решение обратной задачи

Переходим к решению обратной задачи. Наша цель состоит в определении таких функций $k(t)$, $r(t,\tau)$ указанного выше класса, для которых решение $u_\omega(x,t)$ задачи (1) удовлетворяет условию:

$$\|u_\omega(x_0,t) - \psi(t,\omega t)\|\|_{C([0,T])} = o(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty, \tag{28}$$

где

$$\psi(t,\tau) = \varphi_0(t) + \frac{1}{\omega}(\varphi_1(t) + \psi_1(t,\tau)). \tag{29}$$

Здесь $x_0 \in (0,\pi)$ — точка, в которой $q(x_0) \neq 0$, а $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t,\tau)$ — известные функции, причем $\varphi_0(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_0(0) = \varphi(x_0)$, а $\psi_1(t,\tau)$ — 2π-периодическая с нулевым средним по τ, кроме того, $\psi_1(t,\tau) \in C^{1+\gamma,1}(S_1)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Ay(t) = \varphi_1(t), \tag{30}$$

где

$$Ay(t) = \left\langle \int_0^\tau r_1(0,s)ds \right\rangle \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(nx_0) e^{-n^2 \int_0^t y(s)\,ds}. \tag{31}$$

Предположим, что оно имеет единственное решение.

Теорема 2. *Для любого набора функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t,\tau)$ и точки x_0, удовлетворяющих указанным выше условиям, существует единственная пара функций $k(t)$, $r(t,\tau)$ указанных выше классов, для которой решение задачи* (1) *удовлетворяет условиям* (28), (29).

Замечание 3. Если уравнение (30) разрешимо и выполняется условие $\frac{d^2q(x)}{d^2x} > 0$ ($\frac{d^2q(x)}{d^2x} < 0$) для всех $x \in [0,\pi]$, то, согласно работе [1], оно имеет единственное решение. Отмечу, что в работе [1] также приведены необходимые условия разрешимости и некоторые примеры разрешимых уравнений.

$\triangleleft$ Из теоремы 1 следует, что при заданных функциях $k(t)$, $r(t,\tau)$ указанных выше классов задача (1) имеет единственное классическое решение, представимое в виде (6).

Пусть пара $k(t)$, $r(t,\tau)$ является решением обратной задачи и u_ω — отвечающее ему решение задачи (1). В силу теоремы 1, условий обратной задачи, (6), (7), (28) и (29) имеем при $\omega \gg 1$ равномерно по $t \in [0,T]$:

$$u_0(x_0,t) + \omega^{-1}\left[u_1(x_0,t) + v_1(x_0,t,\omega t)\right] = \varphi_0(t) + \omega^{-1}\left[\varphi_1(t) + \psi_1(t,\omega t)\right] + o(\omega^{-1}). \tag{32}$$

Приравнивая в (32) коэффициенты при одинаковых степенях ω, проводя затем усреднение по τ, получаем

$$u_0(x_0,t) = \varphi_0(t), \tag{33}$$

$$u_1(x_0,t) = \varphi_1(t), \tag{34}$$

$$v_1(x_0,t,\tau) = \psi_1(t,\tau). \tag{35}$$

В силу (14), после подстановки $x = x_0$, и (34) получаем задачу для $k(t)$ — нелинейное операторное уравнение

$$Ak(t) = \varphi_1(t). \tag{36}$$

По условию оно однозначно разрешимо и мы находим $k(t)$.

Функция $u_0(x,t)$ согласно п. 1 определяется равенством (11), продифференцировав по t которое и подставив $x = x_0$, получим

$$\frac{\partial u_0(x_0,t)}{\partial t} = f(t) + q(x_0)r_0(t) + \int\limits_0^t K(t,s)r_0(s)\,d\xi, \tag{37}$$

где

$$K(t,s) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 k(t-s) q_n e^{-n^2 \int\limits_0^{t-s} k(\xi)\,d\xi} \sin(nx_0), \tag{38}$$

$$f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 k(t) \varphi_n e^{-n^2 \int\limits_0^{t} k(\xi)\,d\xi} \sin(nx_0). \tag{39}$$

Теперь, учитывая (33), получаем уравнение Вольтерра II рода для неизвестной $r_0(t)$:

$$q(x_0,t)r_0(t) + \int\limits_0^t K(t,s)r_0(s)\,d\xi = \frac{d\varphi_0(t)}{dt} - f(t). \tag{40}$$

В силу условий, наложенных в п. 1 на функции $q(x)$ и $\varphi(x)$, $K(t,s)$ и $f(t)$ непрерывны, и, как следствие, уравнение (40) имеет единственное непрерывное решение $r_0(t)$.

Наконец, из (9), после подстановки $x = x_0$, и (35) находим

$$q(x_0)r_1(t,\tau) = \frac{\partial \psi_1(t,\tau)}{\partial \tau}, \tag{41}$$

следовательно $r_1(t,\tau) = \frac{\partial \psi_1(t,\tau)}{\partial \tau}/q(x_0)$.

Так как найденные функции $r(t,\tau) = r_0(t) + r_1(t,\tau)$ и $k(t,\tau)$ удовлетворяют условиям п. 1, то для них имеет место теорема 1, и, в частности, решение задачи (1) представимо в виде (6), (7). Покажем, что для функции $u_\omega(x,t)$ будут выполнены условия (28), (29). Для этого достаточно установить равенства (33)–(35).

Из предыдущей части доказательства теоремы 2 нам известно, что функция $k(t)$ является решением уравнения (36), учитывая (14), (36), получаем $u_1(x_0,t) = \varphi_1(t)$. Функция $r_0(t)$ является решением уравнения (40), из (37), (40) следует равенство $\frac{\partial u_0(x_0,t)}{\partial t} = \frac{d\varphi_0(t)}{dt}$. Учитывая, что $u_0(x_0,0) = \varphi_0(0) = \varphi(x_0)$, получаем $u_0(x_0,t) = \varphi_0(t)$. Функция r_1 определяется равенством (41). В силу (9), (41) и учитывая, что функции $\psi_1(t,\tau)$ и $v_1(x,t,\tau)$ являются 2π-периодическими с нулевым средним по τ, получаем $v_1(x_0,t,\tau) = \psi_1(t,\tau)$. Теорема 2 доказана. $\triangleright$

Заключение

Решена задача об одновременном восстановлении коэффициента температуропроводности и высокочастотного коэффициента при источнике в одномерной начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности с краевыми условиями Дирихле и неоднородным начальным условием по некоторым сведениям о частичной асимптотике его решения. Показано, что коэффициенты удается полностью восстановить по определенным данным о неполной асимптотике решения. Предварительно построена и обоснована асимптотика решения исходной начально-краевой задачи.

Литература

1. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач: Учеб. пособие.—М.: Изд-во МГУ, 1994.—208 с.
2. *Денисов А. М.* Обратные задачи для нелинейного одномерного стационарного уравнения теплопроводности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2000.—Т. 40, № 11.—С. 1725–1738.
3. *Денисов А. М.* Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2016.—Т. 56, № 10.—С. 1754–1759. DOI: 10.7868/S0044466916100069.
4. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms // Asymptotic Analysis.—2016.—Vol. 97.—P. 329–336. DOI: 10.3233/ASY-161356.
5. *Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П.* Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2017.—Т. 7, № 12.—С. 1955–1965. DOI: 10.7868/S0044466917120079.
6. *Левенштам В. Б.* Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи // Матем. заметки.—2020.—Т. 107, № 3.—С. 412–425. DOI: 10.4213/mzm12245.
7. *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ.—1966.—№ 5.—С. 51–55.
8. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Матем. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 2.—С. 236–253.
9. *Левенштам В. Б.* Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. матем. журн.—1996.—Т. 37, № 5.—С. 1103–1116.
10. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2000.—Т. 40, № 9.—С. 1416–1424.

Статья поступила 22 октября 2022 г.

Ишмеев Марат Рашидович
АО «Тинькофф Банк»,
руководитель отдела проектирования интерфейсных решений
РОССИЯ, 127287, Москва, ул. Хуторская 2-я, д. 38 А, стр. 26;
Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),
заведующий кафедрой финансовых технологий
РОССИЯ, 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9
E-mail: marat.ishmeev@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-3597-5962

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 50–57

INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH TWO UNKNOWN COEFFICIENTS

Ishmeev, M. R.[1,2]
[1] AO “Tinkoff bank”,
38 A, 26 Bldg., Hutorskaya 2-ya St., Moscow 127287, Russia;
[2] Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy pereulok, Dolgoprudny 141701, Russia
E-mail: marat.ishmeev@yandex.ru

Abstract. In this paper, the problem of the simultaneous recovery of the thermal diffusivity coefficient and the rapidly oscillating by time source coefficient in the one-dimensional initial-boundary problem with Dirichlet boundary conditions and the inhomogeneous initial condition for the heat equation is solved using some information on the partial asymptotics of its solution. It is shown that the coefficients can be restored from certain data on the incomplete asymptotics of the solution. The asymptotics of the solution of the direct initial-boundary value problem is preliminarily constructed and substantiated. This paper was stimulated by A. M. Denisov research works, in which a number of different inverse coefficient problems for parabolic equations were investigated, but without considering high-frequency oscillations. And it also continues the research begun by V. B. Levenshtam and his students, in which inverse problems for parabolic equations with high-frequency coefficients were considered for the first time and the methodology for solving such problems was developed. In contrast to this study, where only the source function or its multiplicators are unknown, in this paper, we assume that the thermal diffusivity coefficient and the source function multiplicator are simultaneously unknown. Note that problems with rapidly oscillating in time data simulate a number of physical phenomena and processes related with high frequency impact.

Keywords: inverse problem, heat equation, rapidly oscillating coefficients, asymptotics.

AMS Subject Classification: 35K05, 35C20, 35R30.

For citation: *Ishmeev, M. R.* Inverse Problem for the Heat Equation with Two Unknown Coefficients, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 50–57 (in Russian). DOI: 10.46698/l6995-7714-5336-s.

References

1. *Denisov, A. M. Elements of the Theory of Inverse Problems*, Utrecht, VSP, 1999. DOI: 10.1515/9783110943252.
2. *Denisov, A. M.* Inverse Problems for a Nonlinear One-Dimensional Time-Independent Heat Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 11, pp. 1655–1668.
3. *Denisov, A. M.* Uniqueness and Nonuniqueness of the Solution to the Problem of Determining the Source in the Heat Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1737–1742. DOI: 10.1134/S0965542516100067.
4. *Babich, P. V. and Levenshtam, V. B.* Direct and Inverse Asymptotic Problems with High-Frequency Terms, *Asymptotic Analysis*, 2016, vol. 97, no. 3–4, pp. 329–336. DOI: 10.3233/ASY-161356.
5. *Babich, P. V., Levenshtam, V. B. and Prika, S. P.* Recovery of a Rapidly Oscillating Source in the Heat Equation from Solution Asymptotics, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1908–1918. DOI: 10.1134/S0965542517120065.
6. *Levenshtam,V. B.* Parabolic Equations with Large Parameter. Inverse Problems, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, no. 3, pp. 452–463. DOI: 10.1134/S0001434620030098.
7. *Zenkovskaya, S. M. and Simonenko, I. B.* Effect of High Frequency Vibration on Convection Initiation, *Fluid Dyn.*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 35–37. DOI: 10.1007/BF01022147
8. *Simonenko, I. B.* A Justification of the Averaging Method for a Problem of Convection in a Field of rapidly Oscillating Forces and for Other Parabolic Equations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 16, no. 2, pp. 245–263. DOI: 10.1070/SM1972v016n02ABEH001424.
9. *Levenshtam, V. B.* The Averaging Method in the Convection Problem with High-Frequency Oblique Vibrations, *Siberian Mathematical Journal*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 970–982. DOI: 10.1007/BF02110727.
10. *Levenshtam, V. B.* Asymptotic Expansion of the Solution of a Problem of Vibrational Convection, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1357–1365.

Received October 22, 2023

Marat R. Ishmeev
AO “Tinkoff bank”,
38 A, 26 Bldg., Hutorskaya 2-ya St., Moscow 127287, Russia,
Head of Interface Design Department;

Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy pereulok, Dolgoprudny 141701, Russia,
Head of Financial Technologies Department
E-mail: `marat.ishmeev@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-3597-5962