Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 4, С. 19–29

УДК 517.9
DOI 10.46698/p3569-9057-4562-o

ОБ АЛГЕБРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ВОЛЬТЕРРОВСКИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[#]

О. Г. Авсянкин[1,2], Г. А. Каменских[1]

[1] Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: ogavsyankin@sfedu.ru, gaga-kamenskih99@mail.ru

Аннотация. В пространствах Лебега рассматриваются вольтерровские многомерные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами. При этом предполагается, что ядро интегрального оператора однородно степени $(-n)$, инвариантно относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет некоторому условию суммируемости, которое обеспечивает ограниченность оператора. Основным объектом исследования в работе является банахова алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная всеми операторами указанного выше типа и тождественным оператором. Алгебра $\mathfrak{A}$ некоммутативна, и для ее исследования авторы переходят к фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, где $\mathfrak{T}$ — совокупность всех компактных операторов. Показано, что алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ является коммутативной, что позволяет применить к ней общие методы исследования коммутативных банаховых алгебр. В частности, дано описание пространства максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ и найден критерий обратимости элементов из этой алгебры. На основе этого для банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ построено символическое исчисление, то есть каждому оператору из этой алгебры поставлена в соответствие некоторая непрерывная функция, названная символом оператора. В терминах символа получены необходимые и достаточные условия нетеровости оператора из алгебры $\mathfrak{A}$, а также формула для вычисления индекса.

Ключевые слова: интегральный оператор, однородное ядро, символ, нетеровость, индекс, банахова алгебра.

AMS Subject Classification: 47G10, 47L15.

Образец цитирования: *Авсянкин О. Г., Каменских Г. А.* Об алгебре, порожденной вольтерровскими интегральными операторами с однородными ядрами и непрерывными коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 19–29. DOI: 10.46698/p3569-9057-4562-o.

Интегральные операторы с однородными ядрами играют заметную роль в математике и приложениях. В наши дни для многомерных интегральных операторов, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$, имеется весьма развитая теория. Для таких операторов были получены критерии обратимости и нетеровости, исследованы порождаемые этими операторами банаховы алгебры, найдены условия применимости проекционного метода (см., например, [1–7] и библиографию в них). Однако вольтерровские интегральные операторы с однородными ядрами исследованы очень мало. Можно упомянуть лишь работы [4] и [7], посвященные

[#]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2021-1386.

вольтерровскому случаю. Между тем именно операторы вольтерровского типа часто возникают в приложениях, например, в задачах механики (см. [8, с. 60–64]).

Данная работа посвящена изучению банаховой алгебры, порожденной вольтерровскими многомерными интегральными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, и операторами умножения на непрерывные функции. Для этой алгебры построено символическое исчисление, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия нетеровости операторов и формула для вычисления индекса. Отметим, что применяемая нами методика исследования аналогична той, которая использовалась в работе [4].

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$; $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$; $x'=\frac{x}{|x|}$; $x\cdot y=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$; $\mathbb{B}_n=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|\leqslant 1\}$; $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathscr{L}(X)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m)=(n+2m-2)\frac{(n+m-3)!}{m!(n-2)!}.$$

1. Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x)=\int\limits_{|y|\leqslant|x|}k(x,y)\varphi(y)\,dy,\quad x\in\mathbb{B}_n, \tag{1}$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ (здесь и далее $n\geqslant 2$), измерима и удовлетворяет следующим условиям:

1°. однородность степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x,\alpha y)=\alpha^{-n}k(x,y)\quad(\forall\,\alpha>0);$$

2°. инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x),\omega(y))=k(x,y)\quad(\forall\,\omega\in SO(n));$$

3°. суммируемость, т. е.

$$\kappa:=\int\limits_{\mathbb{B}_n}|k(e_1,y)||y|^{-\frac{n}{p}}\,dy<\infty,\quad e_1=(1,0,\ldots,0).$$

Из [1, Теорема 6.4] следует, что оператор K ограничен в $L_p(\mathbb{B}_n)$, причем $\|K\|\leqslant\kappa$.

Обозначим через M_a оператор умножения на функцию $a\in C(\mathbb{B}_n)$. Очевидно, что этот оператор ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

Рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор

$$A=\lambda I+M_aK+T, \tag{2}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$, I — тождественный оператор, $a\in \mathrm{C}(\mathbb{B}_n)$, K — оператор вида (1), T — компактный в $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор.

Обозначим через $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$ компактификацию локально компактного топологического пространства $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой. Назовем символом оператора A функцию $\sigma_A(m,\xi)$, которая задается на компакте $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$ формулой

$$\sigma_A(m,\xi)=\lambda+a(0)\int\limits_{\mathbb{B}_n}k(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-\frac{n}{p}+i\xi}\,dy,\quad(m,\xi)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R},\quad\sigma_A(\infty)=\lambda. \tag{3}$$

Здесь $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, которые определяются равенством

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ \frac{m!(n-3)!}{(m+n-3)!} C_m^{\frac{n-2}{2}}(t), & n \geqslant 3, \end{cases}$$

где $C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

Теорема 1. *Оператор A вида (2) нетеров в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sigma_A(m, \xi) \neq 0 \quad (\forall\, (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}). \tag{4}$$

Если условие (4) выполнено, то индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind} A = -\sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \sigma_A(m, \xi), \tag{5}$$

где $\operatorname{ind}_\xi \sigma_A(m, \xi)$ — индекс функции $\sigma_A(m, \xi)$ по переменной ξ при фиксированном значении m.

$\lhd$ Представим оператор A в виде

$$A = \lambda I + a(0)K + M_{(a-a(0))}K + T.$$

Так как $\lim_{x\to 0}(a(x) - a(0)) = 0$, то оператор $M_{(a-a(0))}K$ является компактным [1, с. 380]. Тогда

$$A = \lambda I + a(0)K + T_1, \tag{6}$$

где T_1 — компактный оператор. Из равенства (6) следует, что оператор A нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор $\lambda I + a(0)K$. Заметим, что символом оператора $\lambda I + a(0)K$ является функция $\sigma_A(m, \xi)$ вида (3). Тогда в силу теоремы 6.12 из [1] условие (4) является необходимым и достаточным для нетеровости оператора $\lambda I + a(0)K$, а значит и для нетеровости оператора A.

Далее, если условие (4) выполнено, то индекс оператора $\lambda I + a(0)K$ равен правой части формулы (5) (см. [1, с. 78]). Так как $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind}(\lambda I + a(0)K)$, то индекс оператора A вычисляется по формуле (5). $\rhd$

Замечание. Подчеркнем, что начиная с некоторого номера m_0 выполняется равенство $\operatorname{ind}_\xi \sigma_A(m, \xi) = 0$. Поэтому правая часть формулы (5) фактически представляет собой конечную сумму.

Формулу (5) можно переписать в другом виде. Действительно, из условия 3° легко следует, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_A(m, \xi)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$. Обозначим через $\mathscr{N}_m$ число нулей аналитической функции $\sigma_A(m, z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда

$$\operatorname{ind}_\xi \sigma_A(m, \xi) = -\mathscr{N}_m.$$

Подставляя в формулу (5), получим

$$\operatorname{ind} A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \mathscr{N}_m.$$

2. Перейдем к изучению композиций операторов вида (2).

Лемма 1. *Пусть* A_1 *и* A_2 *— операторы вида* (2). *Тогда оператор* $A = A_1A_2$ *также является оператором вида* (2).

$\lhd$ Непосредственно проверяется, что если K_1 и K_2 — операторы вида (1) с ядрами $k_1(x,y)$ и $k_2(x,y)$ соответственно, то оператор K_1K_2 есть оператор вида (1), ядром которого является функция

$$k(x,y) = \int\limits_{|y|\leqslant|t|\leqslant|x|} k_1(x,t)k_2(t,y)\,dt. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что функция $k(x,y)$ удовлетворяет условиям 1°–3°.

Далее, согласно формуле (6) оператор A_j вида (2) представим в виде $A_j = \lambda_j I + a_j(0)K_j + T_j$, где $j = 1,2$. Тогда $A_1A_2 = \lambda_1\lambda_2 I + \widetilde{K} + \widetilde{T}$, где

$$\widetilde{K} = a_1(0)a_2(0)K_1K_2 + a_2(0)\lambda_1K_2 + a_1(0)\lambda_2K_1,$$

$$\widetilde{T} = \lambda_1T_2 + \lambda_2T_1 + a_1(0)K_1T_2 + a_2(0)T_1K_2 + T_1T_2.$$

Очевидно, что $\widetilde{K}$ есть оператор вида (1), а $\widetilde{T}$ — компактный оператор. Таким образом, оператор A_1A_2 есть оператор вида (2). $\rhd$

Лемма 2. *Пусть* A_1 *и* A_2 *— операторы вида* (2). *Тогда коммутатор* $A_1A_2 - A_2A_1$ *является компактным оператором.*

$\lhd$ Так как $A_j = \lambda_j I + a_j(0)K_j + T_j$, где T_j — компактный оператор ($j = 1,2$), то

$$A_1A_2 - A_2A_1 = a_1(0)a_2(0)(K_1K_2 - K_2K_1) + T,$$

где

$$T = a_1(0)K_1T_2 - a_1(0)T_2K_1 + a_2(0)T_1K_2 - a_2(0)K_2T_1.$$

Так как $K_1K_2 = K_2K_1$ (см. [9, с. 96]) и T — компактный оператор, то коммутатор $A_1A_2 - A_2A_1$ является компактным оператором. $\rhd$

3. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{B}_n))$, содержащую все операторы A вида (2). Она представляет собой замыкание в равномерной операторной топологии множества

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{ \sum_i \prod_j A_{ij} \right\},$$

где A_{ij} — оператор вида (2), а суммы и произведения конечны. Из леммы 1 вытекает, что множество $\mathfrak{A}_0$ есть совокупность всех операторов A вида (2).

Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество всех компактных операторов, действующих в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$. Ясно, что $\mathfrak{T}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Заметим, что множество $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0 = \{A + \mathfrak{T}\}$, где A — оператор вида (2), всюду плотно в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$.

Заметим, что фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ коммутативна. Действительно, из леммы 2 следует, что элементы из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ коммутируют между собой. Для произвольных элементов из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ коммутативность проверяется с помощью приближения элементами из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$.

Построим для алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ символическое исчисление. Сначала определим символ для элементов из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$. Назовем символом фактор-класса $A+\mathfrak{T}$, где A — оператор вида (2), функцию $\sigma_{[A]}(m,\xi)$, которая определяется равенством

$$\sigma_{[A]}(m,\xi)=\sigma_A(m,\xi),$$

где $\sigma_A(m,\xi)$ задается формулой (3).

Лемма 3. *Для любых элементов $A_1+\mathfrak{T}$ и $A_2+\mathfrak{T}$, где A_1, A_2 — операторы вида* (2), *выполняются равенства*

$$\sigma_{[A_1+A_2]}(m,\xi)=\sigma_{[A_1]}(m,\xi)+\sigma_{[A_2]}(m,\xi), \quad \sigma_{[A_1A_2]}(m,\xi)=\sigma_{[A_1]}(m,\xi)\sigma_{[A_2]}(m,\xi).$$

$\lhd$ Доказательство осуществляется непосредственной проверкой. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть $\sigma_{[A]}(m,\xi)$ — символ фактор-класса $A+\mathfrak{T}$, где A — оператор вида* (2). *Тогда справедливо неравенство*

$$\|\sigma_{[A]}\|_{C(\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R})}\leqslant\|A+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}. \tag{8}$$

$\lhd$ Пусть $\alpha=\|\sigma_{[A]}\|_{C(\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R})}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется точка $(m_0,\xi_0)\in\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$ такая, что $|\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)|>\alpha-\varepsilon$. Рассмотрим элемент

$$(A+\mathfrak{T})-\big(\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)I+\mathfrak{T}\big)=A-\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)I+\mathfrak{T},$$

символом которого является функция $\sigma_{[A]}(m,\xi)-\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)$. Поскольку эта функция обращается в ноль в точке (m_0,ξ_0), то в силу теоремы 1 оператор $A-\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)I$ не нетеров. Тогда фактор-класс $A-\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)I+\mathfrak{T}$ не обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Следовательно, число $\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)$ принадлежит спектру элемента $A+\mathfrak{T}$. Тогда

$$\alpha-\varepsilon<\big|\sigma_{[A]}(m_0,\xi_0)\big|\leqslant\operatorname{Spr}(A+\mathfrak{T}),$$

где $\operatorname{Spr}(A+\mathfrak{T})$ — спектральный радиус элемента $A+\mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. В силу произвольности ε заключаем, что $\alpha\leqslant\operatorname{Spr}(A+\mathfrak{T})$. Учитывая, что $\operatorname{Spr}(A+\mathfrak{T})\leqslant\|A+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}$, получаем неравенство (8). $\rhd$

Используя лемму 4, определим символ для элементов из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})\backslash(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$. Пусть $B+\mathfrak{T}\in(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})\backslash(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$. Тогда найдется последовательность $\{A_s+\mathfrak{T}\}\subset(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ такая, что

$$\|(B+\mathfrak{T})-(A_s+\mathfrak{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}\to 0$$

при $s\to\infty$. В силу неравенства (8) последовательность $\{\sigma_{[A_s]}(m,\xi)\}$ символов элементов $A_s+\mathfrak{T}$ сходится по норме пространства $C(\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R})$ к некоторой функции $\sigma_{[B]}(m,\xi)\in C(\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R})$, которую будем называть *символом* фактор-класса $B+\mathfrak{T}$. Оценка (8) распространяется по непрерывности на всю алгебру $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, т. е. для любого элемента $B+\mathfrak{T}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ справедливо неравенство

$$\|\sigma_{[B]}\|_{C(\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R})}\leqslant\|B+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}. \tag{9}$$

Из леммы 3, с учетом плотности множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, следует, что сумме и произведению любых двух элементов из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ соответствует сумма и произведение их символов.

Обозначим через $\mathscr{W}(\mathbb{R})$ алгебру Винера, т. е. совокупность функций вида $c+\widehat{f}(\xi)$, где $c\in\mathbb{C}$, а $\widehat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{R})$. Множество $\mathscr{W}(\mathbb{R})$, снабженное поточечными операциями и нормой

$$\big\|c+\widehat{f}\big\|_{\mathscr{W}(\mathbb{R})}=|c|+\|f\|_1,$$

является коммутативной банаховой алгеброй. Известно, что пространство максимальных идеалов $\mathscr{M}(\mathscr{W}(\mathbb{R}))$ алгебры $\mathscr{W}(\mathbb{R})$, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\dot{\mathbb{R}}$.

Теорема 2. *Пространство максимальных идеалов $\mathscr{M}(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})$ алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$. При соответствующем отождествлении пространств $\mathscr{M}(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})$ и $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$ преобразование Гельфанда элемента $B+\mathfrak{T}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ совпадает с его символом $\sigma_{[B]}(m,\xi)$.*

$\lhd$ Доказательство разобьем на три этапа.

1) Пусть (m_0,ξ_0) — произвольная точка компакта $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$. Покажем, что множество $\mathscr{M}_{(m_0,\xi_0)}$ всех элементов алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, символы которых обращаются в нуль в точке (m_0,ξ_0), является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Для этого определим на алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ функционал $f_{(m_0,\xi_0)}$ равенством

$$f_{(m_0,\xi_0)}(B+\mathfrak{T})=\sigma_{[B]}(m_0,\xi_0).$$

Нетрудно видеть, что функционал $f_{(m_0,\xi_0)}$ является характером алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Тогда ядро этого функционала

$$\operatorname{Ker} f_{(m_0,\xi_0)}=\bigl\{B+\mathfrak{T}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{T}:\ \sigma_{[B]}(m_0,\xi_0)=0\bigr\}=\mathscr{M}_{(m_0,\xi_0)}$$

является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$.

2) Покажем, что максимальными идеалами указанного типа исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$.

Обозначим через $\mathscr{S}$ совокупность всех функций из $C(\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R})$, являющихся символами операторов из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Относительно поточечных алгебраических операций и нормы, определяемой формулой

$$\bigl\|\sigma_{[B]}\bigr\|_{\mathscr{S}}=\|B+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}},$$

множество $\mathscr{S}$ образует коммутативную банахову алгебру. Отображение

$$s\colon \mathfrak{A}/\mathfrak{T}\to\mathscr{S},\quad B+\mathfrak{T}\to\sigma_{[B]}(m,\xi)$$

является изометрическим изоморфизмом. Пусть $\mathscr{S}^0$ — множество функций $\sigma(m,\xi)\in\mathscr{S}$ таких, что $\sigma(m,\xi)\in\mathscr{W}(\mathbb{R})$ при любом фиксированном $m\in\mathbb{Z}_+$. Из результатов раздела 6.4 книги [1] следует, что символ фактор-класса $\lambda I+K+\mathfrak{T}$ принадлежит множеству $\mathscr{S}^0$. Верно и обратное. Таким образом, функции из множества $\mathscr{S}^0$, и только они, являются символами элементов вида $\lambda I+K+\mathfrak{T}$.

Пусть $\mathscr{M}$ — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ и $f_{\mathscr{M}}$ — соответствующий ему характер. Тогда $s(\mathscr{M})$ является максимальным идеалом алгебры $\mathscr{S}$. Учитывая структуру пространства максимальных идеалов алгебры $\mathscr{W}(\mathbb{R})$, получаем, что все функции из множества $s(\mathscr{M})\cap\mathscr{S}^0$ обращаются в нуль в некоторой фиксированной точке (m_0,ξ_0) компакта $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$. Таким образом, для любого элемента $\lambda I+K+\mathfrak{T}\in\mathscr{M}$ справедливо равенство

$$0=f_{\mathscr{M}}(\lambda I+K+\mathfrak{T})=\sigma_{[\lambda I+K]}(m_0,\xi_0).$$

Возьмем теперь произвольный элемент $\lambda I+K+\mathfrak{T}$ из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Тогда

$$f_{\mathscr{M}}(\lambda I+K+\mathfrak{T})=\sigma_{[\lambda I+K]}(m_0,\xi_0),\tag{10}$$

где (m_0, ξ_0) — точка, определенная выше. Действительно, положим

$$f_{\mathscr{M}}(\lambda I + K + \mathfrak{T}) = z_0,$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$, и рассмотрим элемент $D+\mathfrak{T} = \lambda I+K+\mathfrak{T}-(z_0 I+\mathfrak{T})$. Поскольку $f_{\mathscr{M}}(D+\mathfrak{T}) = 0$, то $D + \mathfrak{T} \in \mathscr{M}$. Тогда по доказанному выше $\sigma_{[\lambda I+K]}(m_0, \xi_0) - z_0 = 0$, т. е. имеет место равенство (10).

Таким образом, доказано, что существует точка $(m_0, \xi_0) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ такая, что для любого элемента $\lambda I + K + \mathfrak{T}$ выполнено равенство (10). Так как множество $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, то для любого элемента $B + \mathfrak{T} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ справедливо равенство

$$f_{\mathscr{M}}(B + \mathfrak{T}) = \sigma_{[B]}(m_0, \xi_0). \tag{11}$$

Отсюда следует, что $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{(m_0,\xi_0)}$.

3) Выше мы показали, что отображение

$$\pi\colon \mathscr{M}(\mathfrak{A}/\mathfrak{T}) \to \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}, \quad \mathscr{M}_{(m,\xi)} \to (m, \xi)$$

является биективным. Учитывая определение топологии Гельфанда (см., например, [10, с. 36]), заключаем, что это отображение является гомеоморфизмом.

Далее, преобразование Гельфанда элемента $B + \mathfrak{T}$ — это функция $\widehat{B + \mathfrak{T}}$, определяемая на пространстве $\mathscr{M}(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})$ равенством

$$\widehat{B + \mathfrak{T}}(\mathscr{M}_{(m,\xi)}) = f_{\mathscr{M}_{(m,\xi)}}(B + \mathfrak{T}),$$

где $f_{\mathscr{M}_{(m,\xi)}}$ — характер, соответствующий максимальному идеалу $\mathscr{M}_{(m,\xi)}$. Отождествив пространства $\mathscr{M}(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})$ и $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$, и учитывая (11), получаем равенство

$$\widehat{B + \mathfrak{T}}(m, \xi) \equiv \sigma_{[B]}(m, \xi). \ \triangleright$$

Следствие 1. *Для того чтобы элемент $B + \mathfrak{T} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ был обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию*

$$\sigma_{[B]}(m, \xi) \neq 0 \quad (\forall\, (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}). \tag{12}$$

$\triangleleft$ Условие (12) необходимо и достаточно для того, чтобы элемент $B + \mathfrak{T}$ не принадлежал ни одному максимальному идеалу алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Это равносильно обратимости элемента $B + \mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. $\triangleright$

4. Построим символическое исчисление для алгебры $\mathfrak{A}$. Назовем символом оператора $B \in \mathfrak{A}$ функцию $\sigma_B(m, \xi)$, являющуюся символом фактор-класса $B + \mathfrak{T}$, т. е.

$$\sigma_B(m, \xi) = \sigma_{[B]}(m, \xi). \tag{13}$$

Таким образом, все операторы, принадлежащие одному фактор-классу, имеют один и тот же символ.

Теорема 3. *Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Для того чтобы оператор B являлся нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию*

$$\sigma_B(m, \xi) \neq 0 \quad (\forall\, (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}). \tag{14}$$

Если условие (14) *выполнено, то индекс оператора* B *вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind} B = -\sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \sigma_B(m,\xi). \tag{15}$$

$\lhd$ *Необходимость.* Для операторов из множества $\mathfrak{A}_0$ необходимость условия (14) установлена в теореме 1.

Пусть теперь $B \in \mathfrak{A}\backslash\mathfrak{A}_0$. Предположим, что $\sigma_B(m_0,\xi_0) = 0$, где (m_0,ξ_0) — некоторая точка компакта $\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$. Так как оператор B нетеров, то найдется такое $\delta > 0$, что все операторы из δ-окрестности оператора B являются нетеровыми. Подберем оператор $B_0 \in \mathfrak{A}_0$ такой, что $\|B - B_0\| < \frac{\delta}{2}$. Тогда применяя неравенство (9), получим

$$|\sigma_{B_0}(m_0,\xi_0)| = |\sigma_B(m_0,\xi_0) - \sigma_{B_0}(m_0,\xi_0)| \leqslant \|B - B_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Рассмотрим оператор $D_0 = B_0 - \sigma_{B_0}(m_0,\xi_0)I \in \mathfrak{A}_0$. Поскольку

$$\|B - D_0\| \leqslant \|B - B_0\| + |\sigma_{B_0}(m_0,\xi_0)| < \delta,$$

то оператор D_0 нетеров. С другой стороны, символом оператора D_0 является функция $\sigma_{B_0}(m,\xi) - \sigma_{B_0}(m_0,\xi_0)$, которая обращается в нуль в точке (m_0,ξ_0). Но тогда по теореме 1 оператор D_0 не является нетеровым. Полученное противоречие завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть выполнено условие (14). Тогда в силу равенства (13) выполняется условие (12). Тогда по следствию 1 элемент $B + \mathfrak{T}$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ и тем более обратим в фактор-алгебре $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{B}_n))/\mathfrak{T}$. Следовательно, оператор B нетеров.

Теперь докажем, что если выполнено условие (14), то индекс оператора B вычисляется по формуле (15). Для операторов из множества $\mathfrak{A}_0$, т. е. для операторов вида (2), формула (15) совпадает с формулой (5). Пусть $B \in \mathfrak{A}\backslash\mathfrak{A}_0$. Рассмотрим последовательность $\{A_s\} \subset \mathfrak{A}_0$, сходящуюся к оператору A в равномерной операторной топологии. Тогда $\operatorname{ind} B = \lim_{s\to\infty} \operatorname{ind} A_s$, причем числовая последовательность $\{\operatorname{ind} A_s\}_{s=1}^{\infty}$ стабилизируется, начиная с некоторого значения s_1. Из неравенства (9) следует, что при $s \to \infty$

$$\sup_{\mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}} |\sigma_B(m,\xi) - \sigma_{A_s}(m,\xi)| \to 0.$$

Но тогда

$$\operatorname{ind}_\xi \sigma_B(m,\xi) = \lim_{s\to\infty} \operatorname{ind}_\xi \sigma_{A_s}(m,\xi),$$

причем существует такое число s_2, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ числовая последовательность $\{\operatorname{ind}_\xi \sigma_{A_s}(m,\xi)\}_{s=1}^{\infty}$ стабилизируется, начиная с s_2. Пусть $s' = \max\{s_1, s_2\}$. Тогда, используя формулу (5), имеем

$$\operatorname{ind} B = \operatorname{ind} A_{s'} = -\sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \sigma_{A_{s'}}(m,\xi) = -\sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \sigma_B(m,\xi). \rhd$$

Литература

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators.—Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
2. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 6.—С. 1199–1216.

3. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 727–728.
4. *Авсянкин О. Г.* Об интегральных операторах типа Вольтерра с однородными ядрами в весовых L_p–пространствах // Изв. вузов. Математика.—2017.—№ 11.—С. 3–12.
5. *Авсянкин О. Г.* Об обратимости многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами // Мат. заметки.—2020.—Т. 108, вып. 2.—С. 291–295. DOI: 10.4213/mzm12680.
6. *Авсянкин О. Г.* Об интегральных операторах с однородными ядрами и тригонометрическими коэффициентами // Изв. вузов. Математика.—2021.—№ 4.—С. 3–10. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-4-3-10.
7. *Умархаджиев С. М.* Односторонние интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 3.—С. 70–82.
8. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.—Душанбе: Труды АН Тадж. ССР, 1963.—183 с.
9. *Авсянкин О. Г.* Развитие теории многомерных интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами: Дисс. . . . д.ф.-м.н.—Ростов н/Д: Южный федеральный университет, 2009.—277 с.
10. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.—М.: Физматгиз, 1960.—315 с.

Статья поступила 2 ноября 2021 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ,
заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `ogavsyankin@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0001-9091-417X

Каменских Галина Александровна
Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ,
аспирант
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `gaga-kamenskih99@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-1138-5116

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 4, P. 19–29

ON THE ALGEBRA GENERATED BY VOLTERRA INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS KERNELS AND CONTINUOUS COEFFICIENTS

Avsyankin, O. G.[1,2] and Kamenskikh, G. A.[1]
[1] Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science SFU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Regional Mathematical Center SFU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: ogavsyankin@sfedu.ru, gaga-kamenskih99@mail.ru

Abstract. We consider Volterra multidimensional integral operators with continuous coefficients in Lebesgue spaces. It is assumed that the kernel of the integral operator is homogeneous of degree $(-n)$, invariant under the rotation group $SO(n)$ and satisfies a certain summability condition that ensures the boundedness of the operator. In this paper, the main object of research is the Banach algebra $\mathfrak{A}$ generated by all operators of the above type and the identity operator. The algebra $\mathfrak{A}$ is noncommutative, and for its study we turn to the quotient algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, where $\mathfrak{T}$ is the set of all compact operators. It is shown that the algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ is commutative, which makes it possible to apply the general methods for studying commutative Banach algebras. In particular, a description of the maximal ideals space of the algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ is given and a criterion for the invertibility of elements from this algebra is found. Based on this, we construct a symbolic calculus for the Banach algebra $\mathfrak{A}$ that is, each operator from this algebra is assigned a certain continuous function. This function is called the symbol of the operator. In terms of the symbol, we obtained necessary and sufficient conditions for the Fredholm property of an operator from $\mathfrak{A}$, as well as an index formula.

Key words: integral operator, homogeneous kernel, symbol, Fredholmness, index, Banach algebra.

AMS Subject Classification: 47G10, 47L15.

For citation: *Avsyankin, O. G. and Kamenskikh, G. A.* On the Algebra Generated by Volterra Integral Operators with Homogeneous Kernels and Continuous Coefficients, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 19–29 (in Russian). DOI: 10.46698/p3569-9057-4562-o.

References

1. *Karapetiants, N. and Samko, S. Equations with Involutive Operators*, Boston, Basel, Berlin, Birkhäuser, 2001, 427 p.
2. *Avsyankin, O. G. and Karapetyants, N. K.* On the Pseudospectra of Multidimensional Integral Operators with Homogeneous Kernels of Degree $-n$, *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, no. 6, pp. 935–950. DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000007469.86630.6b.
3. *Avsyankin, O. G.* On the C^*-Algebra Generated by Multidimensional Integral Operators with Homogeneous Kernels and Multiplicative Translations, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 77, no. 2, pp. 298–299. DOI: 10.1134/S106456240802035X.
4. *Avsyankin, O. G.* Volterra Type Integral Operators with Homogeneous Kernels in Weighted L_p-Spaces, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 11, pp. 1–9. DOI: 10.3103/S1066369X17110019.
5. *Avsyankin, O. G.* Invertibility of Multidimensional Integral Operators with Bihomogeneous Kernels, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, no. 2, pp. 277–281. DOI: 10.1134/S0001434620070287.
6. *Avsyankin, O. G.* On Integral Operators with Homogeneous Kernels and Trigonometric Coefficients, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 4, pp. 1–7. DOI: 10.3103/S1066369X21040010.
7. *Umarkhadzhiev, S. M.* One-Sided Integral Operators with Homogeneous Kernels in Grand Lebesgue Spaces, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2017, vol. 19, no. 3, pp. 70–82 (in Russian).
8. *Mikhailov, L. G. New Class of Singular Integral Equations and Its Application to Differential Equations with Singular Coefficients*, Dushanbe, Tr. Akad. Nauk Tadzhik. SSR, 1963, vol. 1, 183 p. (in Russian).

9. *Avsyankin, O. G. Development of the Theory of Multidimensional Integral Operators with Homogeneous and Bihomogeneous Kernels*: Dr. Science Thesis, Rostov-on-Don, South Federal University, 2009, 277 p. (in Russian).
10. *Gelfand, I. M., Raikov, D. A. and Shilov, G. E. Commutative Normed Rings*, Moscow, Fizmatgiz, 1960, 315 p. (in Russian).

Received November 2, 2021

Oleg G. Avsyankin
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science SFU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of the Department of Differential and Integral Equations
Regional Mathematical Center SFU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Chief Researcher
E-mail: `ogavsyankin@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0001-9091-417X

Galina A. Kamenskikh
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science SFU,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Postgraduate Student
E-mail: `gaga-kamenskih99@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-1138-5116