Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 92–103

УДК 517.98
DOI 10.46698/d4799-1202-6732-b

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

З. А. Кусраева[1,2]**, С. Н. Сиукаев**[3]

[1]Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ,
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Большая садовая, 105/42;
[2]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
[3]Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, Ватутина, 44;
E-mail: `zali13@mail.ru`

Посвящается профессору
Кутателадзе Семену Самсоновичу
по случаю 75-летнего юбилея

Аннотация. Пусть E и F — банаховы решетки, а $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ и $\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ обозначают соответственно пространства непрерывных и регулярных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов, действующих между банаховыми решетками E и F. Основные результаты статьи таковы.
Теорема 3.4. *Пусть $s\in\mathbb{N}$ and $(E,\|\cdot\|)$ — порядково σ-полная s-выпуклая банахова решетка. Равносильны следующие утверждения:* (1) *$\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ для любого AM-пространства F;* (2) *$\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)=\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ для любого AM-пространства F;* (3) *$\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)=\mathscr{P}^r_o({}^sE,c_0)$;* (4) *$\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)\equiv\mathscr{P}^r_o({}^sE,c_0)$;* (5) *$E$ дискретна и порядково непрерывна.*
Теорема 4.3. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем E s-выпукла для некоторого натурального $s\in\mathbb{N}$. Тогда равносильны следующие утверждения:* (1) *$\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ — векторная решетка и регулярная норма. $\|\cdot\|_r$ on $\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ на ней порядково непрерывна.* (2) *Каждый положительный s-однородный ортогонально аддитивный полином из E в F является L- и M-слабо компактным.*
Теорема 4.6. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем F обладает положительным свойством Шура, а E s-выпукла для некоторого $s\in\mathbb{N}$. Тогда равносильны утверждения:* (1) *$(\mathscr{P}^r_o({}^sE,F),\|\cdot\|_r)$ является KB-пространством.* (2) *Регулярная норма $\|\cdot\|_r$ пространства $\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ порядково непрерывна.* (3) *E не содержит подрешеток, изоморфных l^s.*

Ключевые слова: банахова решетка, AM-пространство, KB-пространство, однородный полином, ортогональная аддитивность, регулярная норма, порядковая непрерывность.

Mathematical Subject Classification (2010): 46A16, 46B42, 46G25, 47H60, 47L22.

Образец цитирования: *Кусраева З. А., Сиукаев С. Н.* Некоторые свойства ортогонально аддитивных полиномов в банаховых решетках // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 92–103. DOI: 10.46698/d4799-1202-6732-b.

1. Введение

В последнее десятилетие значительно возрос интерес к исследованию порядковых свойств полиномов в бесконечномерных функциональных решетках. Это связано с тем, что многие важные свойства полиномов зависят от естественного отношения порядка в пространствах, в которых они действуют. Кроме того классы полиномов между банаховыми решетками, выделяемые комбинированными метрическими и порядковыми свойствами, имеют богатую структуру и интересные взаимосвязи.

В то время как алгебраические и линейно-топологические свойства полиномов, как и взаимосвязи с геометрией банаховых пространств, имеют давнюю историю и хорошо освещены в литературе (см., например, [1]), изучение порядковых свойство полиномов в векторных и банаховых решетках начато сравнительно недавно: в качестве двух стартовых точек можно указать работы Сандаресана [2] и Греку и Ряна [3] (см. также первые три диссертации на эту тему [4–6]). Последующее развитие отражено в источниках [7–13]; см. также указанную в них литературу.

Традиционной для теории линейных регулярных операторов в банаховых решетках является проблема: как влияют на строение того или иного класса линейных операторов свойства банаховых решеток, в которых действуют рассматриваемые операторы [14, 15]. В настоящей работе рассмотрены два вопроса в классе ортогонально аддитивных однородных полиномов: при каких условиях каждый ограниченный по норме полином является регулярным и является ли регулярная норма на пространстве всех таких полиномов порядково нерперывной?

Структура работы такова. Для каждой равномерно полной векторной решетки E и фиксированного натурального числа s существует s-однородный *канонический полином*, действующий из E в s-вогнутизацию $E_{(s)}$ решетки E, такой, что широкий класс ортогонально аддитивных полиномов допускает представление в виде композиции канонического полинома с линейным оператором, определенном на $E_{(s)}$. Этот результат вместе с необходимыми для дальнейшего определениями и обозначениями приводится во втором параграфе. В третьем параграфе обсуждается вопрос о том, когда каждый ограниченный по норме ортогонально аддитивный однородный полином является регулярным. Показано, что линеаризация с помощью канонического полинома позволяет переносить на ортогонально аддитивные полиномы реультаты, полученные для линейных операторов. В четвертом параграфе указаны условия, при которых регулярная норма в пространстве регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов является порядково непрерывной.

Банахова решетка E — это банахово простарнство $(E, \|\cdot\|)$, являющееся одновременно векторной решеткой с монотонной нормой, т. е. для $x, y \in E$ неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$, где $|x| = x \vee (-x) = \sup\{x, -x\}$. Норму в банаховой решетке E (а также саму банахову решетку) называют *порядково непрерывной*, если для всякой убывающей сети (x_α) в E из $\inf_\alpha x_\alpha = 0$ следует $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = 0$. Банахово двойственное пространство E', снабженное двойственной нормой и двойственным порядком, также является банаховой решеткой. Используются стандартные обозначения и терминология теории банаховых решеток из книг Алипрантиса и Бёркиншо [16] и Мейер-Ниберга [17], а также теории полиномов из книги Дайнина [1]. Всюду в тексте := означает «равняется по определению», а $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуральных и действительных чисел.

2. Предварительные сведения

В этом параграфе собраны необходимые для дальнейшего сведения об однородных полиномах и степени банаховой решетки.

Определение 2.1. Возьмем натуральне число $s \in \mathbb{N}$ и векторные пространства E и F. Отображение $P : E \to F$ называют *однородным полиномом степени* s (или s-*однородным полиномом*), если существует s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что $P = \varphi \circ \Delta_s$, где $\Delta_s : E \to E^s$ — *дигональное отображение* $\Delta_s : x \mapsto (x, \dots, x) \in E^s$. Существует единственный симметричный s-линейный оператор φ, для которого $P = \varphi \circ \Delta_s$; последний обозначается символом $\check{P}$, так что $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ для всех $x \in E$. Напомним, что s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ симметричен, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s)})$ для любой перестановки σ множества индексов $\{1, \dots, n\}$.

Непрерывность s-однородного полинома P между нормированными пространствами E и F равносильна его ограниченности (на единичном шаре). Норма ограниченного полинома P определяется формулой

$$\|P\| = \sup\big\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\big\} = \inf\big\{C > 0 : \|P(x)\| \leqslant C\|x\|^s,\ x \in E\big\}, \tag{1}$$

следовательно, $\|P(x)\| \leqslant \|P\|\|x\|^s$ $(x \in E)$. Векторное пространство всех непрерывных s-однородных полиномов из E в F, снабженное нормой (1), обозначается символом $\mathscr{P}({}^sE, F)$. При $s = 1$ получаем пространство линейных непрерывных операторов $\mathscr{L}(E, F) := \mathscr{P}({}^1E, F)$.

Определение 2.2. Однородный полином P из векторной решетки E в векторное просторанство Y называют *ортогонально аддитивным*, если $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x+y) = P(x)+P(y)$ для всех $x, y \in E$. В случае, когда Y — также векторная решетка, P называют *положительным*, если $\check{P}(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ для всех $x_1, \dots, x_n \in E_+$, и *орторегулярным*, если P представим в виде разности двух положительных ортогонально аддитивных однородных полиномов.

Обозначим через $\mathscr{P}_o({}^sE, F)$ пространство непрерывных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов, действующих между векторными решетками E и F. Пусть $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ — часть $\mathscr{P}_o({}^sE, F)$, состоящая из регулярных полиномов. Отношение порядка в $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ вводится, как обычно, с помощью конуса положительных полиномов: $P \leqslant Q$ тогда и только тогда, когда $0 \leqslant Q - P$. *Регулярная норма* $\|\cdot\|_r$ на $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ вводится формулой

$$\|P\|_r := \inf\big\{\|Q\| : \pm P \leqslant Q \in \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)\big\}. \tag{2}$$

Для положительного полинома $Q \in \mathscr{P}^r({}^sE, F)$ имеет место равенство

$$\|Q\|_r = \|Q\| = \sup\big\{\|Q(x)\| : 0 \leqslant x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\big\}. \tag{3}$$

Возьмем банахову решетку E и вещественное число $0 < p < \infty$. Используя однородное функциональное исчисление, можно определить новую структуру векторной решетки на E, сохранив тот же порядок и определив новые операции векторного пространства.

Определение 2.3. Введем сложение $\oplus$ и умножение на скаляры $\circledast$ в банаховой решетке E формулами $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$ и $\lambda \circledast x = \lambda^{1/p}x$, где $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $E_{(p)} := (E, \oplus, \circledast, \leqslant)$ — векторная решетка. Обозначим символом ι_p тождественное отображение на $(E, \leqslant)$, рассматриваемое как оператор из E на $E_{(p)}$. Определим также функцию $\|\cdot\|_{(p)} : E_{(p)} \to \mathbb{R}$ формулой $\|\iota_p(x)\|_{(p)} := \|x\|^p$ $(x \in E)$. Векторную решетку $E_{(p)}$ вместе с квазинормой $\|\cdot\|_{(p)}$ называют p-*вогнутизацией* решетки E (см. книгу Линденштрауса и Цафрири [18]).

Если $s \in \mathbb{N}$, то приняты также обозначения $E^{s\odot} := E_{(s)}$ и $x^{s\odot} := \iota_s(x)$ (см. Булабиар и Бускес [19]). При этом существует единственное симметричное s-линейное отображение $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ такое, что $\odot_s(x, \dots, x) = \iota_s(x)$ для всех $x \in E_+$. Соответствующий s-однородный полином из E в $E^{s\odot}$ называют *каноническим полиномом* банаховой решетки E и обозначают символом $\jmath_s$, подробности см. в [20].

В следующем предложении собраны основные факты об операторе ι_p [20].

Предложение 2.1. *Нелинейное отображение $\iota_p : E \to E_{(p)}$ обладает свойствами:*

(1) *ι_p — порядковый изоморфизм и гомеоморфизм между E и $E_{(p)}$;*

(2) *ι_p нечетно и сохраняет модуль: $\iota_p(-x) = -\iota_p(x)$ и $|\iota_p(x)| = \iota_p(|x|)$ для всех $x \in E$;*

(3) *ι_p ортогонально аддитивен и сохраняет дизъюнктность: $\iota_p(x+y) = \iota_p(x) + \iota_p(x)$ и $x \perp y$ влечет $\iota_p(x) \perp \iota_p(x)$ для всех $x, y \in E$;*

(4) *$\iota_p\big((x^p + y^p)^{1/p}\big) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y)$ и $\iota_p(\lambda^{1/p}x) = \lambda \circledast \iota_p(x)$ для всех $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(5) *$(E_{(p)})_{(q)} = (E_{(q)})_{(p)} = E_{(qp)}$ и $\iota_p \circ \iota_q = \iota_q \circ \iota_p = \iota_{qp}$, в частности, $\iota_{1/s} = \iota_s^{-1}$;*

(6) *если $p \in \mathbb{N}$, то $\jmath(x) = \iota_p(x^+) + (-1)^p \iota_p(x^-)$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Все утверждения следуют непосредственно из определения ι_p и конструкции $E_{(p)}$. $\rhd$

Вообще говоря, $\|\cdot\|_{(p)}$ не является нормой, так как вместо неравенства треугольника выполняется $\|x \oplus y\|_{(p)} \leqslant 2^{|1-1/p|}(\|x\|_{(p)} + \|y\|_{(p)})$. Чтобы гарантировать неравенство треугольника, нужно дополнительное предположение о выпуклости E.

Определение 2.4. Банахову решетку E называют *p-выпуклой,* $0 < p < \infty$, если существует постоянная C такая, что

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant C \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_m\}$ in E [18].

Лемма 2.1. *Пусть $0 < p$, $q < \infty$. Вогнутизация $E_{(p)}$ банаховой решетки E будет q-выпуклой в том и только в том случае, когда E (pq)-выпукла. В частности, $E_{(p)}$ — банахова решетка лишь в том случае, когда E r-выпукла для некоторого $p \leqslant r < \infty$.*

$\lhd$ См. [20, следствие 3.12]. $\rhd$

При довольно общих условиях для s-однородного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ существует единственный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to Y$ такой, что

$$P(x) = T(x^{s\odot}), \quad x \in E. \tag{5}$$

Теорема 2.1. *Пусть E — банахова решетка, Y — векторное пространство и $P : E \to Y$ — ортогонально аддитивный s-однородный полином. Тогда P допускает представление (5) в каждом из следующих случаев:*

(1) *Y — нормированное пространство и P непрерывен по норме;*

(2) *Y — нормированная решетка и P регулярен.*

Более того, отображение $T \mapsto T \circ \jmath_s$ осуществляет соответственно изометрический изоморфизм нормированных пространств $\mathscr{L}(E^{s\odot}, Y)$ и $\mathscr{P}_o(^sE, Y)$ и порядковый и изометрический изоморфизм упорядоченных нормированных пространств $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, Y)$ и $\mathscr{P}_o^r(^sE, Y)$.

$\lhd$ См. теорему 2.10 и следствия 2.11 и 2.12 в [20]. $\rhd$

Замечание 2.1. Теорема 2.1 лежит в основе *метода линеаризации* изучения ортогонально аддитивных полиномов. В наиболее общем виде она предложена в [13] и уточнена в [7]. Примеры применения метода рассмотрены в [4, 20, 21].

3. Характеризация дискретных порядково непрерывных банаховых решеток

Дискретные порядково непрерывные банаховы решетки играют важную роль в различных вопросах теории операторов (см., например, [14] и [15]). Уолш [22, теорема 1] дал внутреннее описание этого класса пространств как класса банаховых решеток с компактными по норме порядковыми интервалами, а Ван Рой [23, теорема 10.2] установил, что банахова решетка E дискретна и поряково непрерывна тогда и только тогда, когда для любой банаховой решетки F упорядоченное пространство регулярных операторов из E в F является векторной решеткой. Внук [24] получил другую характеризацию дискретных порядково непрерывных банаховых решеток, для формулировки которой нужны следующие обозначения. Равенство $\mathscr{P}_o({}^sE,F)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ означает, что каждый непрерывный ортогонально аддтивный s-однородный полином из E в F регулярен. Если же, сверх того, $\|P\|=\|P\|_r$ для всех $P\in\mathscr{P}_o({}^sE,F)$, то будем писать $\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$. При $s=1$ приняты обозначения: $\mathscr{L}(E,F):=\mathscr{P}_o({}^1E,F)$ и $\mathscr{L}^r(E,F):=\mathscr{P}_o^r({}^1E,F)$.

Теорема 3.1. *Для порядково σ-полной банаховой решетки E равносильны утверждения:*

(1) *E дискретна и порядково непрерывна;*

(2) $\mathscr{L}(E,c_0)=\mathscr{L}^r(E,c_0)$;

(3) $\mathscr{L}(E,c_0)\equiv\mathscr{L}^r(E,c_0)$.

Для того чтобы получить вариант этой теоремы для ортогонально аддитивных полиномов, нам потребуются два вспомогательных результата.

Лемма 3.1. *s-выпуклая банахова решетка E дискретна* (*порядково непрерывна, обладает свойством Леви или Фату*) *тогда и только тогда, когда таковой является банахова решетка $E_{(s)}$.*

$\lhd$ Доказательство следует непосредственно из определений и леммы 2.1. Нужно лишь заметить, что в силу предложения 2.1 (1) отображения ι_s и ι_s^{-1} сохраняют дискретные элементы, порядково ограниченные множества, точные границы, монотонные последовательности и направленнные сети, а ввиду s-однородности ι_s (предложение 2.1 (4)), сохраняют также и ограниченность по норме. $\rhd$

Теорема 3.2. *Пусть E — банахова решетка,* $\mathrm{at}_1(E)$ *— множество дискретных элементов единичной нормы в E, а F — AM-пространство. Если линейная оболочка* $\mathrm{at}_1(E)$ *плотна в E, то $\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$.*

$\lhd$ Для $s=1$ этот факт установил Хун Юнь Сюн [25, теорема 2.2]. В общем случае работают аналогичные соображения. Пусть $A:=\mathrm{at}_1(E)$ и линейная оболочка $E_0:=\mathrm{Lin}(A)$ плотна в E. Тогда E_0 — подрешетка в E и отображение $P\mapsto P_0:=P|_{E_0}$ представляет собой изометрический решеточный изоморфизмом из $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ на $\mathscr{P}_o({}^sE_0,F)$, так как каждый полином из $\mathscr{P}_o({}^sE_0,F)$ допускает единственное продолжение на все E с сохранением нормы. Заметим, что A — базис Гамеля пространства E_0 и произвольный $x\in E_0$ может быть представлен в виде $x=\sum_{k=1}^n\lambda_ka_k$, где $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ и $A(x):=\{a_1,\dots,a_n\}\subset A$. Таким образом, полином $P\in\mathscr{P}_o(E,F)$ однозначно определяется своими значениями на подрешетке E_0, причем для $x\in E_0$ имеем $P_0(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_k^sP(a_k)$ в силу ортогональной аддитивности и s-однородности P. Если $x_1,\dots,x_s\in E_0$, то $x_j=\sum_{k=1}^n\lambda_{jk}a_{jk}$ для всех $j=1,\dots,s$, так как, добавляя в сумму нулевые члены, можно считать $A(x_i)=A(x_j)$. Используя ортосимметричность $\check{P}$, выводим

$$\check{P}_0(x_1,\dots,x_s)=\sum_{k=1}^n\lambda_{1k}\cdots\lambda_{sk}P(a_k).$$

Отсюда видно, что $P \geqslant 0$ в том и только в том случае, когда $P_0 \geqslant 0$, в то время как последнее означает, что $P(a) = P_0(a) \geqslant 0$ для всех $a \in A$. Определим полином $Q_0 : E_0 \to F$ формулой $Q_0(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^s |P(a_k)|$. Как видно, Q_0 будет s-однородным полиномом, порождающий s-линейный, полилинейный оператор которого имеет вид $\check{Q}_0(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k=1}^n \lambda_{1k} \cdots \lambda_{sk} |P(a_k)|$. Так как различные $a_1, \dots, a_n$ попарно дизъюнктны, то

$$|x| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| a_k = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\lambda_k) \lambda_k a_k = \bigvee_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k a_k \right|.$$

Теперь, принимая во внимание, что E является AM-пространством, приходим к оценкам

$$\|Q_0(x)\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^n \left|\lambda_k^s P(x_k)\right| \right\| = \left\| \bigvee_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k^s P(a_k) \right\|$$
$$= \bigvee_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left\| P\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k a_k \right) \right\| \leqslant \|P\| \, \|x\|^s.$$

В силу сказанного выше существует единственный полином $Q \in \mathscr{P}_o({}^sE, F)$ такой, что $Q(x) = Q_0(x)$ для всех $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \in E_0$, причем $Q \geqslant \pm P$, так как $Q(a) \geqslant \pm P(a)$ для всех $a \in A$. Следовательно, $Q \in \mathscr{P}^r({}^sE, F)$ и $\|P\|_r \leqslant \|Q\|$. С другой стороны, $\|Q\| = \|Q_0\| \leqslant \|P\|$, поэтому $\|P\|_r = \|P\|$. $\triangleright$

Теорема 3.3. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $(E, \|\cdot\|)$ — порядково σ-полная s-выпуклая банахова решетка. Равносильны следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{P}_o({}^sE, F) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *для любого AM-пространства F;*

(2) $\mathscr{P}_o({}^sE, F) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *для любого AM-пространства F;*

(3) $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$;

(4) $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$;

(5) *E дискретна и порядково непрерывна.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидны. Заметим, что $E^{s\odot}$ — банахова решетка в силу леммы 2.1. Если $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$, то по теореме 2.1 имеем $\mathscr{L}(E^{s\odot}, c_0) = \mathscr{L}^r(E^{s\odot}, c_0)$, следовательно, $\mathscr{L}(E^{s\odot}, c_0) \equiv \mathscr{L}^r(E^{s\odot}, c_0)$ и, кроме того, $E^{s\odot}$ дискретна и порядкво непрерывна ввиду теоремы 3.1. Повторное применение теоремы 2.1 дает $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$, а на основании леммы 3.1 заключаем, что E дискретна и порядково непрерывна. Таким образом, (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5). Оставшаяся импликация (5) $\Longrightarrow$ (1) следует из теоремы 3.2. $\triangleright$

Замечание 3.1. Импликацию (5) $\Longrightarrow$ (1) в теореме 3.3 можно вывести из теоремы 2.1 не обращаясь к теореме 3.2. Однако, теорема 3.2 имеет самостоятельный интерес, так как она утверждает справедливость этой импилкации при более слабых предположениях. Нам неизвестно, верно ли обращение теоремы 3.2.

Рассмотрим еще два результата о регулярности ограниченных по норме полиномов, хорошо известных в линейном случае. Всякое дискретное AL-пространство изометрически и решеточно изоморфно $l^1(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ. В то же время, дискретное AL-пространство является единственной с точностью до решеточного изоморфизма банаховой решетки E, для которой выполняется равенство $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}^r(E, F)$ [15, теорема 2.4].

Теорема 3.4. *Для банаховой решетки E равносильны следующие утверждения:*

(1) *E решеточно изоморфна $l^s(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ;*

(2) $\mathscr{P}_o({}^sE, F) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *для любой банаховой решетки* F*;*

(3) $\mathscr{P}_o({}^sE, F)$ *— векторная решетка для любой банаховой решетки* F*.*

$\lhd$ При $s = 1$ требуемое — это теорема 2.4 из [15]. Общий случай легко выводится по изложенному образцу с использованием теоремы 2.1. Нужно только заметить, что если E решеточно изоморфна $l^s(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ, то $E^{s\odot}$ решеточно изоморфна $l^1(\Gamma)$. $\rhd$

Напомним, что AL^s*-пространством* называют банахову решетку $(E, \|\cdot\|)$, норма которой удовлетворяет равенству $\|x+y\|^s = \|x\|^s + \|y\|^s$ для любой пары дизъюнктных элементов $x, y \in E_+$.

Теорема 3.5. *Для банаховой решетки* F *равносильны следующие утрверждения:*

(1) F *обладает свойством Леви;*

(2) $\mathscr{P}_o({}^sE, F) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *для любой банаховой решетки* E*, изоморфной некоторому* AL^s*-пространству;*

(3) $\mathscr{P}_o({}^sE, F)$ *является решеткой для любой банаховой решетки* E*, изоморфной некоторому* AL^s*-пространству.*

$\lhd$ При $s = 1$ требуемое — это теорема 2.8 из [15]. Далее работают те же соображения, что и выше. $\rhd$

4. Порядковая непрерывность регулярной нормы

В работе трех авторов Цзы Ли Чен, Ин Фэн и Джин Си Чен [26, теоремы 2 и 4] найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространство линейных регулярных операторов между банаховыми решетками является порядково непрерывной решеткой или же KB-пространством. В данном параграфе приводятся аналогичные результаты для пространства регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов. Предварительно введем несколько определений.

Определение 4.1. Полином $P : E \to F$ называют *M-слабо компактынм*, если $\|P(x_n)\| \to 0$ для каждой дизъюнктной последовательноси $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в B_E, и *L-слабо компактным*, если $P(B_E)$ — L-слабо компактное множество в F, т. е. $\|y_n\| \to 0$ для любой дизъюнктной последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, содержащейся в солидной оболочке множества $P(B_E)$. Здесь B_X обозначает единичный шар банахова пространства X, а солидная оболочка $\mathrm{sol}(A)$ множества A определяется формулой $\mathrm{sol}(A) := \bigcup\{[-|x|, |x|] : x \in A\}$.

Как видно, при $s = 1$ получаем определения L- и M-слабо компактных линейных операторов [17, определения 3.6.1 и 3.6.9]. Теперь сформулируем теорему о порядковой непрерывности регулярной нормы в пространстве линейных регуляных операторов.

Теорема 4.1. *Для пары банаховых решеток* E *и* F *равносильны следующие условия:*

(1) $\mathscr{L}^r(E, F)$ *— векторная решетка и регулярная норма* $\|\cdot\|_r$ *на ней порядково непрерывна;*

(2) *каждый положительный оператор из* E *в* F *является* L*- и* M*-слабо компактным.*

$\lhd$ Этот результат установлен в [27, теорема 2]. $\rhd$

Теорема 4.2. *Пусть* E *и* F *— банаховы решетки, причем* E s*-выпукла для некоторого натурального* $s \in \mathbb{N}$*. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *— векторная решетка и регулярная норма* $\|\cdot\|_r$ *на ней порядково непрерывна;*

(2) *каждый положительный* s*-однородный ортогонально аддитивный полином из* E *в* F *является* L*- и* M*-слабо компактным.*

$\lhd$ В силу теоремы 2.1 отображение $T \mapsto P = T \circ \jmath$ осуществляет сохраняющий регулярную норму порядковый изоморфизм упорядоченных нормированных пространств $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$ и $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$. Следовательно, эти пространства одновременно являются или нет векторными решетками, а также регулярные нормы в них одновременно будут или нет порядково непрерывными. Отсюда видно, что утверждения 4.2 (1) и 4.1 (1) равносильны при условии s-выпуклости E. Далее, последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дизъюнктна и содержится в B_E тогда и только тогда, когда последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $y_n = \iota_s(x_n)$, дизъюнктна и содержится в $B_{E^{s\odot}}$. Так как при этом $P(x_n) = T(y_n)$, то P и T одновременно будут или нет M-слабо компактными. Аналогичное утверждение относительно L-слабой компактности очевидно, так как $P(B_E) = T(B_{E^{s\odot}})$. Таким образом, утверждения 4.2 (2) и 4.1 (2) равносильны (также при условии s-выпуклости E) и требуемое вытекает из теоремы 4.1. $\rhd$

Теорема 4.3. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем E s-выпукла для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ является KB-пространством;*

(2) *F — KB-пространство и регулярная норма на $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ порядково непрерывна;*

(3) *F — KB-пространство и каждый положительный s-однородный ортогонально аддитивный полином из E в F является M-слабо компактным.*

$\lhd$ Здесь работают те же соображения, что и при доказательстве теоремы 4.2. Нужно только сослаться на [27, теоремы 4] и принять во внимание, что $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ будет KB-пространством тогда и только тогда, когда таковым является упорядоченное нормированное пространство $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$. $\rhd$

Определение 4.2. Говорят, что банахова решетка E обладает *положительным свойством Шура*, если любая последовательность положительных элементов в E, слабо сходящаяся к нулю, сходится к нулю по норме.

Теорема 4.4. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем F обладает положительным свойством Шура, а E s-выпукла для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Тогда равносильны утверждения:*

(1) *$(\mathscr{P}_o^r({}^sE, F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством;*

(2) *регулярная норма $\|\cdot\|_r$ пространства $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ порядково непрерывна;*

(3) *E не содержит подрешеток, изоморфных l^s.*

$\lhd$ Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидна. По теореме 2.1 утверждение (2) равносильно порядковой непрерывности регулярной нормы пространства $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$. Чен установил в [27, теорема 3.3], что последнее равносильно порядковой непрерывности $(E^{s\odot})'$. В то же время, порядковая непрерывность сопряженного пространства $(E^{s\odot})'$ равносильна тому, что $E^{s\odot}$ не содержит подрешеток, решеточно изоморфных l^1 [17, теорема 2.4.14]. Последнее означает, что E не содержит подрешеток, решеточно изоморфных l^s [21]. Таким образом, утверждения (2) и (3) равносильны. Чтобы убедиться в справедливости оставшейся импликации (3) $\Longrightarrow$ (1), достаточно применить к банаховым решеткам $E^{s\odot}$ и F теорему 13 из [26], утверждающую, что если F обладает положительным свойством Шура, то $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$ будет KB-пространством тогда и только тогда, когда сопряженная банахова решетка $(E^{s\odot})'$ порядково непрерывна. $\rhd$

Определение 4.3. Пусть $1 \leqslant \infty$. Говорят, что норма банаховой решетки E *p-супераддитивна* или *p-субаддитивна*, если, соответственно, $(\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \leqslant \|x + y\|$ или $\|x + y\| \leqslant (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$ для любых дизъюнктных $x, y \in E_+$ (см. [17, p. 138] или [28, определение 7.7]). Точную нижнюю (верхнюю) границу чисел $p \geqslant 1$, для которых E допускает эквивалентную p-супераддитивную (p-субаддитивную) норму, называют соотвественно *верхним индексом* (*нижним индексом*) E и обозначают символом $d(E)$ (символом $t(E)$) [28, определение 8.7].

Известно, что $1 \leqslant d(E) \leqslant t(E) \leqslant \infty$ для любой банаховой решетки E; если $t(E) < \infty$, то E порядково непрерывна, а если $d(E) > 1$, то E' порядково нерпрерывна, см. [28, предложение 8.11], а также [29]. В упомянутой выше работе [26] установлено, что если $d(E) > t(F)$, то $(\mathscr{L}^r(E,F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством. Чтобы получть аналогичный результат для пространства регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов, необходим следующий вспомогательный факт.

Лемма 4.1. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}$. Для произвольной банаховой решетки E выполняются равенства $s \cdot d(E) = d(E^{s\odot})$ и $s \cdot t(E) = t(E^{s\odot})$.*

$\lhd$ Если $1 \leqslant p < \infty$, то для любой пары дизъюнктрых элементов $x, y \in E_+$ равносильны неравенства $\|\iota_s(x) + \iota_s(y)\| \leqslant (\|\iota_s(x)\|^p + \|\iota_s(x)\|^p)^{1/p}$ и $\|x+y\|^s \leqslant (\|x\|^{ps} + \|y\|^{ps})^{1/p}$ ввиду ортогональной аддитивности ι_s и равенства $\|\iota_s(x)\| = \|x\|^s$. Отсюда вытекает $s \cdot t(E) = t(E^{s\odot})$. Аналогично выводится второе равенство. $\rhd$

Теорема 4.5. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем E s-выпукла. Если $d(E) > t(F)$, то упорядоченное нормированное пространство $(\mathscr{P}_o^r(^sE, F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством.*

$\lhd$ Линейный случай $s = 1$ обоснован в [26, теорема 14]. Общий случай сводится к линейному с помощью теоремы 2.1: если $d(E^{s\odot}) > t(F^{s\odot})$, то $(\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F), \|\cdot\|_r)$ будет KB-пространством. В частности, при этих условиях F будет KB-пространством (см. доказательство теоремы 14 в [26]). В то же время, неравенства $d(E^{s\odot}) > t(F^{s\odot})$ и $d(E) > t(F)$ равносильны ввиду леммы 4.1. Следовательно, $d(E) > t(F)$ влечет, что банахова решетка $(\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F), \|\cdot\|_r)$, а также извометрически и порядково изоморфная ей банахова решетка $(\mathscr{P}_o^r(^sE, F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством. $\rhd$

Благодарность. Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту, замечание и предложения которого позволили устранить ряд неточностей и опечаток.

Литература

1. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.
2. *Sundaresan K.* Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices // Appl. Geometry and Discrete Math. DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.—Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1991.—P. 571–586.
3. *Grecu B. C., Ryan R. A.* Polynomials on Banach spaces with unconditional bases // Proc. Amer. Math. Soc.—2005.—Vol. 133, № 4.—P. 1083–1091. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07738-X.
4. *Kusraeva Z. A.* Orthogonally additive polynomials on vector lattices // Thesis, Sobolev Inst. of Math. of the Sib. Branch of the RAS.—Novosibirsk, 2013.
5. *Linares P.* Orthogonal additive polynomials and applications // Thesis, Departamento de Analisis Matematico. Universidad Complutense de Madrid.—2009.
6. *Loane J.* Polynomials on Riesz spaces // Thesis, Department of Math. Nat. Univ. of Ireland.—Galway, 2007.
7. *Ben Amor F.* Orthogonally additive homogenous polynomials on vector lattices // Commun. Algebra.—2015.—Vol. 43, № 3.—P. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
8. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469. DOI: 10.1112/s0024609306018364.
9. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 388, № 2.—P. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
10. *Cruickshank J., Loane J., Ryan R. A.* Positive polynomials on Riesz spaces // Positivity.—2017.—Vol. 21, № 3.—P. 885–895. DOI: 10.1007/s11117-016-0439-8.
11. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces // Rev. Mat. Complut.—2012.—Vol. 25.—P. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.

12. *Kusraev A. G., Kusraeva Z. A.* Monomial decomposition of homogeneous polynomials in vector lattices // Adv. Oper. Theory.—2019.—Vol. 4, № 2.—P. 428–446. DOI: 10.15352/aot.1807-1394.
13. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
14. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 1 / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—Elsevier, 2001.—P. 85–122.
15. *Wickstead A. W.* Regular operators between Banach lattices // Positivity, Trends in Mathematics.—Basel: Birkhäuser.—2007.—P. 255–279. DOI: 10.1007/978-3-7643-8478-4_9.
16. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
17. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.
18. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
19. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, №4.—P. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
20. *Kusraeva Z. A.* Powers of quasi-Banach lattices and orthogonally additive polynomials // J. Math. Anal. Appl.—2018.—Vol. 458, № 1.—P. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.
21. *Кусраева З. А.* О компактной мажорации однородных ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2016.—Т. 57, № 3.—P. 658–665. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.313.
22. *Walsh B.* On characterising Kothe sequence spaces as vector lattices // Math. Ann.—1968.—Vol. 175.—P. 253–256. DOI: 10.1007/BF02063211.
23. *Van Rooij A. C. M.* When do the regular operators between two Riesz spaces form a Riesz space? // Technical Report 8410.—Nijmegen: Katholieke Universiteit, 1984.
24. *Wnuk W.* Characterization of discrete Banach lattices with order continuous norms // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—Vol. 104, № 1.—P. 197–200. DOI: 10.1090/S0002-9939-1988-0958066-0.
25. *Hong-Yun Xiong.* On whether or not $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}^r(E,F)$ for some classical Banach lattices E and F // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.—1984.—Vol. 46, № 3.— P. 267–282. DOI: 10.1016/1385-7258(84)90027-1.
26. *Zi li Chen, Ying Feng, Jin Xi Chen.* The Order Continuity of the Regular Norm on Regular Operator Spaces // Abstract and Applied Analysis.—2013.—Vol. 2013, article ID 183786.—6 p. DOI: 10.1155/2013/183786.
27. *Zi li Chen.* On the order continuity of the regular norm // Proceedings Positivity IV — Theory and Applications.—Dresden, 2006.—P. 45–51.
28. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.
29. *Dodds P. G., Fremlin D. H.* Compact operators in Banach lattices // Israel J. Math.—1979.—Vol. 34, № 4.—P. 287–320. DOI: 10.1007/BF02760610.

Статья поступила 13 мая 2020 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Региональный научно-образовательный математический
центр ЮФУ, *ведущий научный сотрудник*
РОССИЯ, 344006, Ростов-на-Дону, Большая садовая, 105/42;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Сиукаев Сергей Николаевич
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *доцент*
РОССИЯ, 362019, Владикавказ, Ватутина, 44

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 92–103

SOME PROPERTIES OF ORTHOGONALLY ADDITIVE HOMOGENEOUS POLYNOMIALS ON BANACH LATTICES

Kusraeva, Z. A.[1,2] and Siukaev, S. N.[3]

[1]Regional Mathematical Center of Southern Federal University,
105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344006, Russia;
[2]Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[3]North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: zali13@mail.ru

Abstract. Let E and F be Banach lattices and let $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ stand for the space of all norm bounded orthogonally additive s-homogeneous polynomial from E to F. Denote by $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ the part of $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ consisting of the differences of positive polynomials. The main results of the paper read as follows.
Theorem 3.4. *Let $s \in \mathbb{N}$ and $(E, \|\cdot\|)$ is a σ-Dedekind complete s-convex Banach lattice. The following are equivalent:* (1) $\mathscr{P}_o({}^sE,F) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *for every AM-space F.* (2) $\mathscr{P}_o({}^sE,c_0) = \mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *for every AM-space F.* (3) $\mathscr{P}_o({}^sE,c_0) = \mathscr{P}_o^r({}^sE,c_0)$. (4) $\mathscr{P}_o({}^sE,c_0) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE,c_0)$. (5) *$E$ is atomic and order continuous.*
Theorem 4.3. *For a pair of Banach lattices E and F the following are equivalent:* (1) *$\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ is a vector lattice and the regular norm $\|\cdot\|_r$ on $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ is order continuous.* (2) *Each positive orthogonally additive s-homogeneous polynomial from E to F is L- and M-weakly compact.*
Theorem 4.6. *Let E and F be Banach lattices. Assume that F has the positive Schur property and E is s-convex for some $s \in \mathbb{N}$. Then the following are equivalent:* (1) *$(\mathscr{P}_o^r({}^sE,F), \|\cdot\|_r)$ is a KB-space.* (2) *The regular norm $\|\cdot\|_r$ on $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ is order continuous.* (3) *E does not contain any sulattice lattice isomorphc to l^s.*

Key words: Banach lattice, AM-space, KB-space, homogeneous polynomial, orthogonal additivity, regular norm, order continuity.

Mathematical Subject Classification (2010): 46A16, 46B42, 46G25, 47H60, 47L22.

For citation: *Kusraeva, Z. A. and Siukaev, S. N.* Some Properties of Orthogonally Additive Homogeneous Polynomials on Banach Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 92–103 (in Russian). DOI: 10.46698/d4799-1202-6732-b.

References

1. *Dineen, S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Berlin, Springer, 1999.
2. *Sundaresan, K.* Geometry of Spaces of Homogeneous Polynomials on Banach Lattices, *Applied Geometry and Discrete Mathematics, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1991, pp. 571–586.
3. *Grecu, B. C. and Ryan, R. A.* Polynomials on Banach Spaces with Unconditional Bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 133, no. 4, pp. 1083–1091. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07738-X.
4. *Kusraeva, Z. A.* Orthogonally Additive Polynomials on Vector Lattices, *Thesis, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of RAS*, Novosibirsk, 2013.
5. *Linares, P.* Orthogonal Additive Polynomials and Applications *Thesis, Departamento de Analisis Matematico, Universidad Complutense de Madrid*, 2009.
6. *Loane, J.* Polynomials on Riesz Spaces, *Thesis, Department of Mathematics National Univercity of Ireland*, Galway, 2007.
7. *Ben Amor, F.* Orthogonally Additive Homogenous Polynomials on Vector Lattices, *Communications in Algebra* , 2015, vol. 43, no. 3, pp. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
8. *Benyamini, Y., Lassalle, S. and Llavona, J. G.* Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials on Banach Lattices, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2006, vol. 38, no. 3, pp. 459–469. DOI: 10.1112/s0024609306018364.

9. *Bu, Q. and Buskes, G.* Polynomials on Banach Lattices and Positive Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 388, no. 2, pp. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
10. *Cruickshank, J., Loane, J. and Ryan, R. A.* Positive Polynomials on Riesz Spaces, *Positivity*, 2017, vol. 21, no. 3, pp. 885–895. DOI: 10.1007/s11117-016-0439-8.
11. *Ibort, A., Linares, P. and Llavona, J. G.* A Representation Theorem for Orthogonally Additive Polynomials on Riesz Spaces, *Revista Matematica Complutense*, 2012, vol. 25, no. 1, pp. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.
12. *Kusraev, A G. and Kusraeva, Z. A.* Monomial Decomposition of Homogeneous Polynomials in Vector Lattices, *Advances in Operator Theory*, 2019, vol. 4, no. 2, pp. 428–446. DOI: 10.15352/aot.1807-1394.
13. *Kusraeva, Z. A.* Representation of Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no 2, pp. 248–255. DOI: 10.1134/S003744661102008X.
14. *Abramovich, Y. A. and Aliprantis, C. D.* Positive Operators, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 1, eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, Elsevier, 2001, pp. 85–122.
15. *Wickstead, A. W.* Regular Operators Between Banach Lattices, *Positivity, Trends in Mathematics*, Basel, Birkhäuser, 2007, pp. 255–279. DOI: 10.1007/978-3-7643-8478-4_9.
16. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, London etc., Academic Press Inc., 1985, xvi+367 p.
17. *Meyer-Nieberg, P. Banach Lattices*, Berlin etc., Springer-Verlag, 1991.
18. *Lindenstrauss, J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces, vol. 2, Function Spaces*, Berlin etc., Springer-Verlag, 1979, 243 p.
19. *Boulabiar, K. and Buskes, G.* Vector Lattice Powers: f-Algebras and Functional Calculus, *Communications in Algebra* , 2006, vol. 34, no. 4, pp. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
20. *Kusraeva, Z. A.* Powers of Quasi-Banach Lattices and Orthogonally Additive Polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 458, no. 1, pp. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.
21. *Kusraeva, Z. A.* On Compact Domination of Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 519–524. DOI: 10.1134/S0037446616030137.
22. *Walsh, B.* On Characterising Kothe Sequence Spaces as Vector Lattices, *Mathematische Annalen*, 1968, vol. 175, pp. 253–256. DOI: 10.1007/BF02063211.
23. *Van Rooij, A. C. M. When do the Regular Operators Between Two Riesz Spaces Form a Riesz Space? Technical Report 8410*, Nijmegen, Catholic University, 1984.
24. *Wnuk, W.* Characterization of Discrete Banach Lattices with Order Continuous Norms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1988, vol. 104, no. 1, pp. 197–200. DOI: 10.1090/S0002-9939-1988-0958066-0.
25. *Hong-Yun Xiong.* On Whether or Not $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}^r(E,F)$ for Some Classical Banach Lattices E and F, *Indagationes Mathematicae* (*Proceedings*), 1984, vol. 87, no. 3, pp. 267–282. DOI: 10.1016/1385-7258(84)90027-1.
26. *Zi li Chen, Ying Feng and Jin Xi Chen.* The Order Continuity of the Regular Norm on Regular Operator Spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013, article ID 183786, 6 p. DOI: 10.1155/2013/183786.
27. *Chen, Z. L.* On the Order Continuity of the Regular Norm, *Proceedings Positivity IV — Theory and Applications*, Dresden, 2006, pp. 45–51.
28. *Schwarz, H.-V.*, *Banach Lattices and Operators*, Leipzig, Teubner, 1984.
29. *Dodds, P. G. and Fremlin, D. H.* Compact Operators in Banach Lattices, *Israel Journal of Mathematics*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 287–320. DOI: 10.1007/BF02760610.

Received May 13, 2020

Zalina A. Kusraeva
Regional Mathematical Center of Southern Federal University,
105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344006, Russia,
Leading Researcher
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher
E-mail: zali13@mail.ru

Sergei N. Siukaev
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia, *University Lecturer*