Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 34–47

УДК 517.98
DOI 10.46698/k4355-6603-4655-y

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. А. Нурмагомедов[1]

[1] Дагестанский государственный аграрный университет,
Россия, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180
E-mail: alimn@mail.ru

Аннотация. В данной работе для произвольной непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$ в случае целых положительных α и β построены дискретные суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ по системе многочленов $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, образующих ортонормированную систему на неравномерных сетках $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1,1]$ с весом типа Якоби. Исследуются аппроксимативные свойства построенных частных сумм $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ порядка $n \leqslant N-1$ в пространстве непрерывных функциий $C[-1,1]$. А именно, получена двусторонняя поточечная оценка для функции Лебега $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ рассматриваемых дискретных сумм Фурье при $n = O\big(\delta_N^{-1/(\lambda+3)}\big)$, $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $\delta_N = \max_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta t_j$. Соответственно, исследован также вопрос сходимости $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ к $f(x)$. В частности, получена оценка отклонения частичной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ от $f(x)$ при $n = O\big(\delta_N^{-1/(\lambda+3)}\big)$, которая также зависит от n и положения точки $x \in [-1,1]$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, асимптотическая формула, суммы Фурье, функция Лебега.

Mathematical Subject Classification (2010): 42C10.

Образец цитирования: *Нурмагомедов А. А.* Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 34–47. DOI: 10.46698/k4355-6603-4655-y.

1. Введение

В различных прикладных и теоретических задачах, связанных с обработкой, сжатием и передачей дискретной информации, вопросы приближения функций, заданных на дискретных системах точек (сетках), часто решаются с помощью рядов Фурье по соответствующей системе ортонормированных на этих сетках многочленов. Как известно, решение этой же задачи сводится к оценке функции Лебега рассматриваемых сумм Фурье. И здесь следует отметить, что эти задачи были предметом исследования в работах многих авторов, среди которых мы укажем лишь те работы, которые посвящены изучению функции Лебега сумм Фурье — Якоби, сходимости рядов Фурье Якоби и их дискретных аналогов [1–16].

В первую очередь отметим, из рассуждений, содержащихся в [1, 9.3], легко следует, что на отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, функция Лебега сумм Фурье — Якоби есть $O(\ln n)$.

Далее, Г. Рау установил [2], что в точках $x=-1$ и $x=1$ функция Лебега сумм Фурье — Якоби имеет порядок $n^{\beta+\frac{1}{2}}$ и $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ соответственно. Для многочленов Лежандра Т. Гронуоллом было показано [3], что функция Лебега принимает наибольшее значение на концах отрезка ортогональности. Такое же утверждение справедливо и при целых, полуцелых и равных друг другу α и β. Далее, в работе [5] при $\alpha,\beta>-\frac{1}{2}$ получен точный порядок роста функции Лебега сумм Фурье — Якоби, что уточняет более раннюю оценку тех же авторов [4]:

$$L_n^{\alpha,\beta}(x)\leqslant c(\alpha,\beta)\left\{\ln(n+1)+\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}+\frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right\},$$

$x\in[-1,1]$, $n=1,2,\ldots$

В работе [6] И. И. Шарапудиновым исследован вопрос о сходимости частных сумм Фурье — Чебышева $S_{n,N}(f)=S_{n,N}(f,x)$ порядка $n\leqslant N-1$ по многочленам Чебышева $\{\tau_{n,N}(x)\}_{n=0}^{N-1}$, образующим ортонормированную систему с весом $\mu_N(x)=2/N$ на множестве $\Omega=\{-1+2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ к функции $f\in C[-1,1]$. А именно, доказано, что при $n=O(N^{\frac{1}{2}})$ норма оператора $S_{n,N}=S_{n,N}(f)$ в $C[-1,1]$ имеет порядок $\| S_{n,N} \|=O(n^{\frac{1}{2}})$.

И по аналогии с этими работами мы также исследовали аппроксимативные свойства частных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках отрезка $[-1,1]$ (см. [7–10]).

Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $\Omega=\{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1]$, $-1=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N=\{x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где

$$x_j=\frac{t_j+t_{j+1}}{2},\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

Через

$$\hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)=\hat p_k^{\alpha,\beta}(x;\Omega_N)\quad(k=0,1,\ldots,N-1)\tag{1.1}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в следующем смысле $(0\leqslant n,m\leqslant N-1)$:

$$\left(\hat p_{n,N}^{\alpha,\beta},\hat p_{m,N}^{\alpha,\beta}\right)=\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\hat p_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat p_{m,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j=\delta_{nm},\tag{1.2}$$

где $\Delta t_j=t_{j+1}-t_j, j=0,1,\ldots,N-1$.

Далее, пусть

$$\delta_N=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta t_j,\tag{1.3}$$

$æ_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В. А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$ (см. [17, 18]):

$$\int\limits_{-1}^{1}|q_n''(x)|\,dx\leqslant æ_2 n^4\int\limits_{-1}^{1}|q_n(x)|\,dx,$$

$\widehat P_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортонормированный многочлен Якоби, $C[-1,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|=\|f\|_{C[-1,1]}=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$,

$\mathscr{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени не выше n, $E_n(f) = \min_{l_n \in \mathscr{P}_n} \|f - l_n\|_{C[-1,1]}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n.

Здесь и далее через c, $c(a,b)$, $c(\alpha,\beta,a,b)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, разные в разных местах.

Через $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ обозначим частную сумму n-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, т. е.

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} \hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x),$$

где $\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta f(x_j)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j$.

Как известно, задача об оценке отклонения частной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ ряда Фурье функции $f \in C[-1,1]$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $x \in [-1, 1]$ посредством неравенства Лебега

$$\left| f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) \right| \leqslant (1 + L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x))E_n(f) \tag{1.4}$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left| K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j) \right| \Delta t_j, \tag{1.5}$$

где

$$K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j) = \sum_{k=0}^{n} \hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j). \tag{1.6}$$

Отметим, что полученные нами в данной работе оценки функции (1.5) и разности $|f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)|$ также учитывают величину номера n и положение точки $x \in [-1,1]$.

2. Вспомогательные утверждения

Здесь мы, в первую очередь, приведем ранее полученные нами результаты [11], которые необходимы для дальнейшего исследования.

Теорема 2.1. *Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$ и $1 \leqslant n \leqslant a\delta_N^{-\frac{1}{2}}$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x), \tag{2.1}$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ которой справедлива оценка

$$\left| v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}} \left[\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{1+x} + \frac{1}{n}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. *Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$, $1 \leqslant n \leqslant a\delta_N^{-\frac{1}{2}}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда существует постоянная $c(\alpha,\beta,a,b) > 0$ такая, что*

$$\left| \hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b) \left(\delta_N n^{\frac{5}{2}} + 1\right) \left[\sqrt{1-x} + \frac{1}{n}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{1+x} + \frac{1}{n}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Далее, в качестве следствий выше приведенных теорем отметим следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть* α, β — *целые неотрицательные числа,* $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$ *и* $n = O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\right)$, $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x), \tag{2.4}$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ *которой справедлива оценка*

$$\left|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| = O(1). \tag{2.5}$$

Следствие 2.2. *Пусть* α, β — *целые неотрицательные числа,* $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$ *и* $n = O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\right)$, $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{\beta+\frac{1}{2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant -1 + cn^{-2}, \tag{2.6}$$

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad 1 - cn^{-2} \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.7}$$

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - cn^{-2}, \tag{2.8}$$

$$\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}, \quad -1 + cn^{-2} \leqslant x \leqslant 0. \tag{2.9}$$

Пользуясь аналогичными рассуждениями [11, п. 2, лемма 2.2], нетрудно показать, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $\alpha, \beta > -1$, $\delta_N \leqslant cn^{-2}$, $t_p = \min\{-1 + cn^{-2} \leqslant t_j \leqslant 1 - cn^{-2}\}$, $t_{q+1} = \max\{-1 + cn^{-2} \leqslant t_j \leqslant 1 - cn^{-2}\}$, $x_1^* = (t_p + t_{p+1})/2$, $x_2^* = (t_q + t_{q+1})/2$. *Тогда для ортонормированного многочлена Якоби* $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ *имеет место формула*

$$\sum_{x_1^* \leqslant x_j \leqslant x_2^*} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left(\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2 \Delta t_j = 1 - r_{n,N},$$

в которой

$$|r_{n,N}| \leqslant c(\alpha,\beta)\left[\delta_N^2 n^3 + n^{-1} + \left(\delta_N + n^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Далее, приведем без доказательства следующее утверждение [12, § 2, лемма 1].

Лемма 2.2. *Пусть функция* $f(t)$ *непрерывна и неотрицательна на промежутке* $[a_1, b_1]$ *и* $\{t_j\}_{j=0}^m$ — *сетка такая, что* $a_1 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < b_1$. *Пусть* $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ *и* $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. *Тогда, если*

1) $f(t)$ *монотонно возрастает на* $[a_2, b_2]$, *то*

$$\sum_{a_2 \leqslant t_j \leqslant b_2} f(t_j)\Delta t_j \leqslant \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(b_2)\Delta^*, \tag{2.10}$$

2) $f(t)$ *монотонно убывает на* $[a_2, b_2]$, *то*

$$\sum_{a_2 \leqslant t_j \leqslant b_2} f(t_j)\Delta t_j \leqslant \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(a_2)\Delta^*, \tag{2.11}$$

где $\Delta^* = \max_j \Delta t_j$.

3. Некоторые свойства многочленов Якоби

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби [1, 13]. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(n=0,1,2,\dots)$ с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{k(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{k(x)\sigma^n(x)\},$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\sigma(x)=1-x^2$, $k(x)=k(x;\alpha,\beta)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Если $\alpha,\beta>-1$, то многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом $k(x)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1}k(x)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx=h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где $h_n^{\alpha,\beta}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta}\asymp n^{-1}$, $n=1,2,\dots$

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби:

1) весовая оценка $(-1\leqslant x\leqslant 1)$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\leqslant c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac12}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac12}; \tag{3.1}$$

в частности,

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\leqslant c(\alpha,\beta)\,(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\quad\left(0\leqslant x\leqslant 1-n^{-2}\right); \tag{3.2}$$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\leqslant c(\alpha,\beta)n^{\alpha+\frac12}\quad\left(1-n^{-2}\leqslant x\leqslant 1\right); \tag{3.3}$$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\leqslant c(\alpha,\beta)\,(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac14}\quad\left(-1+n^{-2}\leqslant x\leqslant 0\right); \tag{3.4}$$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\leqslant c(\alpha,\beta)n^{\beta+\frac12}\quad\left(-1\leqslant x\leqslant -1+n^{-2}\right); \tag{3.5}$$

2) равенство

$$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)=\frac{n+\alpha+1}{n+1}P_n^{\alpha,\beta}(x)-\frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)}(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x). \tag{3.6}$$

4. Сходимость сумм Фурье по многочленам $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $f\in C[-1,1]$, α, β — целые положительные числа, $\lambda=\max\{\alpha,\beta\}$, $n=O\big(\delta_N^{-1/(\lambda+3)}\big)$, $0<b<1$, $0<a\leqslant\left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac14}$. Тогда справедливо неравенство $(-1\leqslant x\leqslant 1)$*

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right].$$

$\lhd$ Чтобы оценить функцию $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, мы рассмотрим два случая [13, 14]:

1) $0\leqslant x\leqslant 1-4n^{-2}$;

2) $1-4n^{-2}\leqslant x\leqslant 1$.

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1 - 4n^{-2}$. Сумму в правой части равенства (1.5) представим по следующей схеме:

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant \sum_{-1<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j$$
$$+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j$$
$$+ \sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant \tau_2} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j$$
$$+ \sum_{\tau_2\leqslant x_j< 1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4, \quad (4.1)$$

где $\tau_1 = x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$, $\tau_2 = x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$.

В первую очередь покажем, если $k_{n,N}^{\alpha,\beta}$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, то множитель $\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}}$ в формуле Кристоффеля — Дарбу ($n \leqslant N-2$)

$$\sum_{k=0}^{n} \hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j) = \frac{k_{n,N}}{k_{n+1,N}} \frac{\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j) - \hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j} \quad (4.2)$$

есть величина ограниченная.

В действительности, с одной стороны, в силу [11, лемма 3.4] мы находим

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \geqslant \frac{1}{4(1+c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^3)}.$$

А с другой стороны, посредством аналогичных рассуждений, содержащихся в [15, § 3, 1.3.6], имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\, x_j \hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j$$
$$= \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j$$
$$+ \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{q}_{n,N}(x_j)\Delta t_j,$$

где $\hat{q}_{n,N}(x_j)$ — многочлен степени не выше n. В силу (1.2) вторая сумма в последнем равенстве равна нулю. После, применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left|\hat{p}_{n+1,N}(x_j)\right|\left|x_j\hat{p}_{n,N}(x_j)\right|\Delta t_j$$
$$\leqslant \max\{|x_0|,|x_{N-1}|\}\left(\sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\left(\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\frac{1}{4(1+c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^3)} \leqslant \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,N}^{\alpha,\beta}} \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Оценим σ_1. В силу (4.2), (4.3), (2.6), (2.9) и (2.10) находим

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = &\sum_{-1<x_j\leqslant -1+4n^{-2}} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right| \Delta t_j \\
&+ \sum_{-1+4n^{-2}<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right| \Delta t_j \\
&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right) \\
&\times\left[n^{-\beta+\frac{1}{2}} \sum_{-1<x_j\leqslant -1+4n^{-2}} \Delta t_j + \sum_{-1+4n^{-2}<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}\Delta t_j\right] \\
&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right)\left[n^{-\beta-\frac{3}{2}} + \int\limits_{-1+4n^{-2}}^{-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}d\xi + 2^{-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\delta_N\right] \\
&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Теперь оценим σ_2. В силу (2.1), (4.2) и (4.3) получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_2 \leqslant \Bigg\{ &\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j) - \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \\
&+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \\
&+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j)\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \\
&+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \\
&+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \\
&+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x_j)\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \\
&+ \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\frac{\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\upsilon_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \Bigg\} \\
&= \sigma_{21}+\sigma_{22}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+\sigma_{25}+\sigma_{26}+\sigma_{27}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Займемся σ_{21}. Пользуясь тождеством (3.6)

$$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x_j)-P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x_j)$$
$$=\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\left[(1-x_j)P_n^{\alpha+1,\beta}(x_j)P_n^{\alpha,\beta}(x)-(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x_j)\right],$$

имея в виду, что

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)=\{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-\frac12}P_n^{\alpha,\beta}(x),$$

и в силу (2.8), (2.9) находим

$$\begin{aligned}\sigma_{21}&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}(1-x_j)^{\alpha}(1+x_j)^{\beta}\\&\times\left|\frac{(1-x_j)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x_j)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)-(1-x)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j\\&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}}{x-x_j}\Delta t_j\\&+c(\alpha,\beta,a,b)\left|(1-x)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x)\right|\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}}{x-x_j}\Delta t_j=\sigma_{21}^{(1)}+\sigma_{21}^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Далее, учитывая известное неравенство

$$|\mu+\nu|^{\gamma}\leqslant c(\gamma)\left[|\mu|^{\gamma}+|\nu|^{\gamma}\right],\quad \gamma>0,\tag{4.7}$$

и (2.10), (2.11), получаем $\left(n=O\left(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\right)\right)$:

$$(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}\leqslant c(\alpha)\left[(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}+(x-x_j)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}\right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_{21}^{(1)}&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_j}+\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{-\frac12\leqslant x_j\leqslant\tau_1}(x-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac34}\Delta t_j\right]\\&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\int_{-\frac12}^{\tau_1}\frac{d\zeta}{x-\zeta}+\delta_N n^2+\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\left(\int_{-\frac12}^{\tau_1}(x-\xi)^{\frac{\alpha}{2}-\frac34}d\xi+\delta_N n^{\alpha+\frac52}\right)\right]\\&\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\right].\end{aligned}$$

Отсюда, в силу следствия 2.1, имеем

$$\sigma_{21}^{(1)}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right].\tag{4.8}$$

Далее, находим

$$\sigma_{21}^{(2)}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^2(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\alpha+\frac52}\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{-\frac12}.$$

Отсюда и из (4.6), (4.8) находим

$$\sigma_{21} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.9}$$

В силу (2.2), (2.10), (2.11), (3.2) и (4.7) при $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\Big)$ получаем

$$\sigma_{22} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1} \frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x-x_j}\Delta t_j$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_j}+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}(x-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}\Delta t_j\right]$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\tau_1}\frac{d\zeta}{x-\zeta}+\delta_N n^2\right)\right. \tag{4.10}$$
$$\left.+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\tau_1}(x-\xi)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}d\xi+\delta_N n^{\alpha+\frac{5}{2}}\right)\right]$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\frac{5}{2}}\left[n\ln(n+1)+n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right] \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N n^{\alpha+3} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b),$$

$$\sigma_{2i} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b) \quad (i=3,5,6). \tag{4.11}$$

Кроме того, посредством аналогичных рассуждений также устанавливаем, что

$$\sigma_{24} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^5(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\tau_1}\frac{(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x-x_j}\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^5$$
$$\times\left[n\ln(n+1)+n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right] \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\delta_N^2 n^{\alpha+\frac{11}{2}} \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{-\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{4.12}$$

Такую же оценку допускает и σ_{27}. Отсюда и из (4.5), (4.9)–(4.12) получаем

$$\sigma_2 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.13}$$

Точно также получим и оценку

$$\sigma_4 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.14}$$

Перейдем к оценке σ_3. В силу (1.6), (2.8) мы имеем

$$\sigma_3 = \sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant\tau_2}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant\tau_2}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right|\Delta t_j$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\sum_{\tau_1\leqslant x_j\leqslant\tau_2}(1-x_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\Delta t_j \tag{4.15}$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|(1-\tau_1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(\tau_2-\tau_1) < c(\alpha,\beta,a,b).$$

Собираем оценки (4.4), (4.13), (4.14), (4.15) и, сопоставляя их с (4.1), находим

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \tag{4.16}$$

где $0 \leqslant x \leqslant 1-4n^{-2}$, $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\Big)$.

Перейдем к случаю, когда $1-4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1$. Чтобы оценить $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $1-4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1$, разобьем сумму в правой части равенства (1.5) по следующей схеме:

$$\begin{aligned} L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{-1<x_j\leqslant -\frac{1}{2}} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\ &+ \sum_{-\frac{1}{2}<x_j\leqslant 1-n^{-2}} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j \\ &+ \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j)\right|\Delta t_j = \omega_1+\omega_2+\omega_3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения для оценки сумм σ_1, σ_2 и σ_3, можно показать, что при $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\Big)$

$$\omega_1 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \tag{4.18}$$

$$\omega_2 \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right]. \tag{4.19}$$

Что касается ω_3, то воспользовавшись оценкой (2.7), имеем

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \sum_{1-n^{-2}<x_j<1} (1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left|\sum_{k=0}^{n}\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\right|\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^{-2\alpha} \\ &\times \sum_{1-n^{-2}<x_j<1}\left|\sum_{k=0}^{n} k^{2\alpha+1}\right|\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)n^2 \sum_{1-n^{-2}<x_j<1}\Delta t_j \leqslant c(\alpha,\beta,a,b). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Из (4.17)–(4.20) получаем

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \quad 1-4n^{-2} \leqslant x \leqslant 1.$$

Отсюда и из (4.16) находим

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1)+\left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|+\left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4.21}$$

Далее, посредством аналогичных рассуждений, эту же оценку можно получить и для случая, когда $-1 \leqslant x \leqslant 0$. После, обозначив через $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, убеждаемся в справедливости теоремы 4.1. $\rhd$

Теперь остается рассмотреть вопрос о точности полученной оценки для $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$. Для этого воспользуемся аналогичными рассуждениями [16].

Очевидно, что

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \geqslant S_{n,N}^{\alpha,\beta}(1;x) = 1. \tag{4.22}$$

Далее, положив $n+2 \leqslant N-1$, рассмотрим частную сумму $(n+2)$-го порядка ортонормированного многочлена Якоби $\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x)$ по системе (1.1). При этом

$$S_{n-1,N}^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta};x) = S_{n+2,N}^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta};x) - \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{n+2,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{n+2,N}^{\alpha,\beta}(x)\Delta t_j - \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\Delta t_j - \sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\Delta t_j. \qquad (4.23)$$

Затем, в силу неравенства Коши — Буняковского и леммы 2.1 ($i = n, n+1, n+2$) получаем

$$\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x_j)\hat{p}_{i,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j \leqslant \left(\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \left(\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x_j)\right)^2\Delta t_j\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{j=0}^{N-1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \hat{p}_{i,N}^{2}(x_j)\Delta t_j\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Далее, поскольку $S_{n+2,N}^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta};x) = \widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x)$, то из (4.23) получаем

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \geqslant \left|S_{n-1,N}^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta};x)\right| \geqslant \left|\widehat{P}_{n+2}^{\alpha,\beta}(x)\right| - \left|\hat{p}_{n+2,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| - \left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| - \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|. \qquad (4.24)$$

Кроме того, в частности, можно показать, что

$$\sigma_{21} = c(\alpha,\beta)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2n+2}\right)\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1}(1-x_j)^\alpha(1+x_j)^\beta \times \left|\frac{(1-x_j)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x_j)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) - (1-x)\widehat{P}_n^{\alpha+1,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x_j)}{x-x_j}\right|\Delta t_j \geqslant c(\alpha,\beta)\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant \tau_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_j} = c(\alpha,\beta)\sum_{-\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant y_1}\frac{\Delta t_j}{x-x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{x-x_j} \geqslant c(\alpha,\beta)\left(1-\frac{\delta_N}{2}\right)\big[\ln(n+1)-\ln 2\big]. \qquad (4.25)$$

Сопоставляя (4.22)–(4.25) и воспользовавшись следствием 2.1, подберем такую константу $c > 0$, что при всех $x \in [-1,1]$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \geqslant c\left[\ln(n+1) + \left|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| + \left|\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)\right|\right],$$

из которого и следует неулучшаемость по порядку полученной оценки сверху для константы Лебега. $\triangleright$

Кроме того отметим, что при условии $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\alpha+3)}}\Big)$ для $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, допустима оценка

$$|\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}.$$

Очевидно, что такая оценка справедлива и для $\hat{p}_{n+1,N}^{\alpha,\beta}(x)$. Следовательно, для $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет место оценка

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1}\right]$$
$$\leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1} + \frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right].$$

Проводя аналогичные рассуждения и для $-1 \leqslant x \leqslant 0$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, α, β *— целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{\frac{1}{4}}$. *Тогда справедливо неравенство* $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)\left[\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1} + \frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right].$$

Далее, из (1.4) и теоремы 4.2 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, α, β *— целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $n = O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, $0 < b < 1$, $0 < a \leqslant \{(1-b)/(2æ_2)\}^{\frac{1}{4}}$. *Тогда равномерно относительно* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left|f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\right| \leqslant c(\alpha,\beta,a,b)E_n(f)$$
$$\times\left[\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1} + \frac{n^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right].$$

Литература

1. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
2. *Rau H.* Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen nach Jacobischen Polynomen // Journ. fur Math.—1929.—№ 161.—С. 237–254.
3. *Gronwall T.* Uber die Laplacische Reihe // Math. Ann.—1913.—№ 74.—С. 213–270.
4. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Приближение функций суммами Фурье — Якоби // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 166, № 1.—С. 9–10.
5. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функция Лебега сумм Фурье — Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та.—1968.—Т. 1.—С. 11–23.
6. *Шарапудинов И. И.* О сходимости метода наименьших квадратов // Мат. заметки.—1993.—Т. 53, № 3.—С. 131–143.
7. *Нурмагомедов А. А.* Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2011.—Т. 11, вып. 3, ч. 2.—С. 29–42. DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-29-42.
8. *Нурмагомедов А. А.* Сходимость сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Изв. вузов. Математика.—2012.—№ 7.—С. 60–62.

9. *Нурмагомедов А. А., Расулов Н. К.* Двусторонняя оценка функции Лебега сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2018.—Т. 5, № 63, вып. 3.—С. 417–431. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.306.
10. *Нурмагомедов А. А., Нурмагомедов И. А.* О сходимости дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы.—Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва.—2019.—Т. 57.—С. 254–257.
11. *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2010.—Т. 10, № 2.—С. 10–19. DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-10-19.
12. *Коркмасов Ф. М.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 2.—С. 334–355.
13. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.—276 с.
14. *Шарапудинов И. И.* Об ограниченности в $C[-1,1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Чебышева // Мат. сб.—1996.—Т. 187, № 1.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm105.
15. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов.—М.: Изд. иностр. лит., 1963.—369 с.
16. *Бадков В. М.* Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах.—Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.—С. 31–45.
17. *Даугавет И. К., Рафальсон С. З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестн. Ленингр. ун-та.—1974.—№ 19.—С. 18–24.
18. *Симонов И. Е.* Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_p, L_1 на отрезке // Тр. ин-та. матем. и механ. УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 3.—С. 282–290.

Статья поступила 23 декабря 2019 г.

Нурмагомедов Алим Алаутдинович
Дагестанский государственный аграрный университет,
доцент кафедры информатики и цифровых технологий
РОССИЯ, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180
E-mail: alimn@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 34–47

APPROXIMATION PROPERTIES OF DISCRETE FOURIER SUMS IN POLYNOMIALS ORTHOGONAL ON NON-UNIFORM GRIDS

Nurmagomedov, A. A.[1]

[1] Dagestan State Agrarian University,
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russian,
E-mail: alimn@mail.ru

Abstract. Given two positive integers α and β, for arbitrary continuous function $f(x)$ on the segment $[-1,1]$ we construct disrete Fourier sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ on system polynomials $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ forming an orthonormals system on any finite non-uniform set $\Omega_N=\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ of N points from segment $[-1,1]$ with Jacobi type weight. The approximation properties of the corresponding partial sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ of order $n\leqslant N-1$ in the space of continuous functions $C[-1,1]$ are investigated. Namely, for a Lebesgue function in $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, a two-sided pointwise estimate of discrete Fourier sums with $n=O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, $\lambda=\max\{\alpha,\beta\}$, $\delta_N=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\Delta t_j$ is obtained. The problem of convergence of $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ to $f(x)$ is also investigated. In particular, an estimate is obtained of the deviation of the partial sum $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ from $f(x)$ for $n=O\Big(\delta_N^{-\frac{1}{(\lambda+3)}}\Big)$, depending on n and the position of a point x in $[-1,1]$.

Key words: polynomial, orthogonal system, net, weight, asymptotic formula, Fourier sum, Lebesgue function.

Mathematical Subject Classification (2010): 42C10.

For citation: *Nurmagomedov, A. A.* Approximation Properties of Discrete Fourier Sums in Polynomials Orthogonal on Non-Uniform Grids, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 34–47 (in Russian). DOI: 10.46698/k4355-6603-4655-y.

References

1. *Szego, G. Orthogonal Polynomials*, New York, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1939, 440 p.
2. *Rau, H.* Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen Nach Jacobischen Polynomen, *Journ. fur Math.*, 1929, no. 161, pp. 237–254.
3. *Gronwall, T.* Uber die Laplacische Reihe, *Mathematische Annalen*, 1913, vol. 74, no. 2, pp. 213–270. DOI: 10.1007/BF01456041.
4. *Agakhanov, S. A.* and *Natanson, G. I.* Approximation of Functions by Fourier–Jacobi Sums, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1966, no. 166, pp. 9–10 (in Russian).
5. *Agakhanov, S. A.* and *Natanson, G. I.* The Lebesgue Function for Fourier–Jacobi Sums, *Vestn. Leningr. Univ.*, 1968, no. 1, pp. 11–13 (in Russian).
6. *Sharapudinov, I. I.* Convergence of the Method Of Least Squares, *Math. Notes*, 1993, vol. 53, pp. 335–344. DOI: 10.1007/BF01207722.
7. *Nurmagomedov, A. A.* Polynomials, Orthogonal on Non-Uniform Grids, *Izv. Saratovsk. Univ. Nov. Ser. Matem., Mekhan., Informatika*, 2011, vol. 11, no. 3 (2), pp. 29–42 (in Russian).
8. *Nurmagomedov, A. A.* Convergence of Fourier Sums in Polynomials Orthogonal on Arbitrary Grids, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, pp. 52–54 DOI: 10.3103/S1066369X12070080.
9. *Nurmagomedov, A. A.* and *Rasulov, N. K.* Two-Sided Estimates of Fourier Sums Lebesgue Functions with Respect to Polynomials Orthogonal on Nonuniform Grids, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2018, vol. 51, no. 3, pp. 249–259. DOI: 10.3103/S1063454118030068.
10. *Nurmagomedov, A. A.* and *Nurmagomedov, I. A.* Obout Convergence of Fourier Sums on Polynomials Orthogonal on Arbitrary Grids, *Theory of Functions, its Applications and Related Matters*, Kazan, 2019, vol. 57, pp. 254–257 (in Russian).
11. *Nurmagomedov, A. A.* Asymptotic Properties of Polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, Orthogonal on any Sets in the Case of Integers α and β, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 10–19 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-10-19.
12. *Korkmasov, F. M.* Approximate Properties of the de la Vallee Poussin Means for the Discrete Fourier–Jacobi Sums, *Siberian Mathematical Journal*, 2004, vol. 45, pp. 273–293. DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000021284.60159.bd.
13. *Sharapudinov, I. I. Smeshannye ryady po ortogonal'nym polinomam. Teoriya i prilozheniya* [Mixed Series of Orthogonal Polynomials. Theory and Applications], Makhachkala, Daghestan Scientific Centre of RAS, 2004, 276 p. (in Russian).
14. *Sharapudinov, I. I.* Boundednes in $C[-1,1]$ of the de la Vallee-Poussin Means for the Discrete Fourier–Jacobi Sums, *Sbornik: Mathematics*, 1996, vol. 187, no. 1, pp. 141–160. DOI: 10.1070/SM1996v187n01ABEH000105.
15. *Alexits, G. Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960.
16. *Badkov, V. M.* Two-Sided Estimations for the Lebesgue Function and the Remainder of the Fourier Series with Respect to Orthogonal Polynomials, *Approximation in Concrete and Abstract Banach Spaces*, Sverdlovsk, Akad. Nauk SSSR. Ural'sk. Nauchn. Tsentr, 1987, pp. 31–45 (in Russian).
17. *Daugavet, I. K.* and *Rafalson, S. Z.* About of Some Inequalities for Algebraic Polynomial, *Vestn. Leningr. Gos. Univ.*, 1974, no. 19, pp. 18–24 (in Russian).
18. *Simonov, I. E.* Sharp Markov Brothers Type Inequality in the Spaces L_p, L_1 on the a Closed Interval, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 282–290 (in Russian).

Received December 23, 2019

Alim A. Nurmagomedov
Dagestan State Agrarian University,
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russian,
Associate Professor
E-mail: alimn@mail.ru