Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 3, С. 62–86

УДК 517.518.82+519.117
DOI 10.23671/VNC.2019.3.36462

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ КОМБИНАТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ#

М. А. Петросова[1], И. В. Тихонов[2], В. Б. Шерстюков[3]

[1] Московский педагогический государственный университет;
Россия, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1;
[3] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: `petrosova05@mail.ru`, `ivtikh@mail.ru`, `shervb73@gmail.com`

Аннотация. Ставится вопрос о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна по степеням независимой переменной. Кратко обсуждается общая постановка задачи на произвольном отрезке $[a, b]$. Для полноты картины напоминаются формулы Вигерта, действующие для коэффициентов полиномов Бернштейна на стандартном отрезке $[0, 1]$. В центре внимания сейчас другой случай — симметричного отрезка $[-1, 1]$, что представляет несомненный интерес для теории аппроксимации. В работе найдены выражения, регулирующие образование коэффициентов полиномов Бернштейна на $[-1, 1]$. Для интерпретации ответа потребовалось ввести новые числовые объекты — специальные «трапеции Паскаля». Они строятся аналогично классическому треугольнику по своим «начальным» и «краевым» условиям. С трапециями Паскаля связаны разнообразные соотношения, во многом обобщающие привычные комбинаторные тождества. В работе проведено систематическое исследование подобных свойств; составлена сводка основных формул. Полученные результаты находят применение при изучении поведения коэффициентов полиномов Бернштейна на $[-1, 1]$. Так, например, оказывается, что есть универсальная связь двух коэффициентов $a_{2m,m}(f)$ и $a_{m,m}(f)$, действующая при всех $m \in \mathbb{N}$ для любой функции $f \in C[-1, 1]$. В итоге установлено существенное отличие картины на $[-1, 1]$ от случая стандартного отрезка $[0, 1]$. Намечен ряд перспективных тем для дальнейших исследований, часть из которых активно проводится в последнее время.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный отрезок, трапеции Паскаля, комбинаторные соотношения.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A10, 11B83, 05A10, 05A19.

Образец цитирования: *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 62–86. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36462.

1. Введение

Полиномы Бернштейна — известный объект анализа, играющий значимую роль в задачах аппроксимации. Базовые сведения по теории классических полиномов Бернштейна см. в [1–7]. Дополнительная информация, связанная с недавними исследованиями авторов, представлена в обзоре [8]. Традиционно полиномы Бернштейна рассматривают на стандартном отрезке $[0, 1]$. Считается, что переход к другому отрезку не несет ничего существенно нового. С точки зрения характера аппроксимации это действительно так:

#Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00236.

основные закономерности, регулирующие сходимость полиномов Бернштейна к порождающей их непрерывной функции, сохраняются на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с соответствующими техническими поправками. Однако, алгебраическая и комбинаторная информация, обильно заложенная в полиномах Бернштейна, может неожиданно трансформироваться при формальном переходе на другой отрезок. Помимо стандартного случая $[0, 1]$ естественно выделить симметричный отрезок $[-1, 1]$, на котором полиномы Бернштейна ранее почти не изучались. Ясно, что симметричный отрезок тесно связан с соображениями «четности» и «нечетности», принципиально важными для анализа, но не очень органичными на стандартном отрезке $[0, 1]$. В работе [9] авторы показали, какие изменения претерпевает формулировка так называемого «правила склеивания» при переходе к симметричному отрезку $[-1, 1]$.

Займемся теперь другим вопросом — о том, что произойдет с развернутой алгебраической записью полиномов по степеням переменной x, если рассматривать конструкцию Бернштейна на $[-1, 1]$. Оказывается, технические отличия от $[0, 1]$ будут весьма значительными — возникнут принципиально новые комбинаторные объекты в виде серии специальных «трапеций Паскаля», своеобразно обобщающих привычный треугольник.

Для традиционных биномиальных коэффициентов используем обозначение

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n; \quad C_0^0 = 1. \tag{1}$$

Основное тождество

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \tag{2}$$

выполненное при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1, \ldots, n$, будем называть *правилом Паскаля*.

Для того чтобы более отчетливо проследить связь новых результатов с тем, что известно для стандартного случая, целесообразно начать с общих положений и изложить фактуру с единой точки зрения.

2. Общее определение полиномов Бернштейна

Для функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, непрерывной на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *полиномы Бернштейна* вводят формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) C_n^k (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

с независимой переменной x и биномиальными коэффициентами (1). Формула (3) для полиномов $B_n(f, x) = B_n(f; a, b; x)$ «привязана» к выбранному отрезку $[a, b]$. Для упрощения записей не будем отмечать зависимость от отрезка в последующих обозначениях, ограничиваясь четким указанием на обсуждаемый случай.

Ясно, что любой полином $B_n(f, x)$ имеет степень, не большую собственного номера:

$$\deg B_n(f, x) \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому полиномы (3) допускают алгебраическую запись

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Числовые коэффициенты

$$a_{n,m}(f), \quad n \in \mathbb{N},\ m = 0, 1, \dots, n, \tag{5}$$

являются линейными комбинациями, составленными из значений функции f в точках соответствующей равномерной сетки на $[a,b]$, в том смысле, что

$$a_{n,m}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,m}^k \, f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},\ m = 0, 1, \dots, n. \tag{6}$$

Конкретные значения множителей $A_{n,m}^k \in \mathbb{R}$ зависят от выбора отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$, но не зависят от взятой функции $f \in C[a,b]$.

Если для некоторой функции $f \in C[a,b]$ каждое выражение (6) дает значение нуль, то все полиномы (4) тождественно равны нулю, и по аппроксимационной теореме Бернштейна функция $f(x)$ будет тождественно равна нулю на $[a,b]$, как предельная функция последовательности полиномов $B_n(f,x)$.

Другими словами, совокупность всех коэффициентов (5), возникающих на $[a,b]$ при алгебраической записи полиномов Бернштейна (3), образует тотальную систему линейных непрерывных функционалов в пространстве $C[a,b]$. Эта система является избыточной — в зависимости от выбора отрезка $[a,b]$ некоторые функционалы (5) могут линейно выражаться через другие. Например, на отрезке $[-1,1]$ возникает особая последовательность коэффициентов $a_{m,m}(f)$ и $a_{2m,m}(f)$, связанных друг с другом пропорциональным образом (см. теорему 5 ниже).

Как уже сказано, конструкцию Бернштейна обычно рассматривают на стандартном отрезке $[0,1]$. Напомним, как выглядит запись (4) и какие выражения получаются для коэффициентов (5) в этом каноническом случае.

3. Случай стандартного отрезка

Согласно общему определению (3) для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна имеют вид

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Непосредственно из (7) нетрудно получить несколько первых явных формул:

$$B_1(f,x) = f(0) + (f(1) - f(0))\, x,$$

$$B_2(f,x) = f(0) + 2\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right) x + \left(f(1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)\right) x^2,$$

$$B_3(f,x) = f(0) + 3\left(f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right) x + 3\left(f\left(\frac{2}{3}\right) - 2f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0)\right) x^2 + \left(f(1) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right) x^3,$$

$$B_4(f,x) = f(0) + 4\left(f\left(\frac{1}{4}\right) - f(0)\right) x + 6\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{4}\right) + f(0)\right) x^2 + 4\left(f\left(\frac{3}{4}\right) - 3f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f\left(\frac{1}{4}\right) - f(0)\right) x^3 + \left(f(1) - 4f\left(\frac{3}{4}\right) + 6f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f\left(\frac{1}{4}\right) + f(0)\right) x^4.$$

Вопрос об общей алгебраической записи (4) для стандартных полиномов (7) поставил и решил Вигерт [10]. Он показал, что коэффициенты (5) в этом случае выглядят так:

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, C_m^j \, f\left(\frac{m-j}{n}\right) = C_n^m \Delta_{1/n}^m f(0). \tag{8}$$

Здесь

$$\Delta_{1/n}^m f(0) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, C_m^j \, f\left(\frac{m-j}{n}\right)$$

есть конечная разность порядка m с шагом $1/n$, взятая от функции $f \in C[0,1]$ в выделенной точке $x = 0$. (Про конечные разности см. [11, с. 157–160].) Для сравнения с последующим напомним вывод результата (8) (см. также [5, с. 108–109], [7, с. 249–251]).

Определим стандартные *первичные полиномы Бернштейна*

$$P_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{9}$$

По формуле бинома запишем

$$P_{n,k}(x) = C_n^k x^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \, C_{n-k}^j \, x^j = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \, C_n^k C_{n-k}^j \, x^{k+j}.$$

Но

$$C_n^k C_{n-k}^j = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} = \frac{n!}{(k+j)!(n-k-j)!} \, \frac{(k+j)!}{k! \, j!} = C_n^{k+j} \, C_{k+j}^k.$$

Поэтому

$$P_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \, C_n^{k+j} C_{k+j}^k \, x^{k+j} = \{m = k+j\} = \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} C_n^m C_m^k \, x^m.$$

Итак, для первичных полиномов (9) получено представление

$$P_{n,k}(x) = \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} \, C_n^m C_m^k \, x^m. \tag{10}$$

После подстановки (10) в формулу (7) имеем

$$\begin{aligned} B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} C_n^m C_m^k \, x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} x^m C_n^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \, C_m^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) x^m, \end{aligned}$$

где

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) = \{j = m-k\} = C_n^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j \, f\left(\frac{m-j}{n}\right),$$

что и совпадает с указанным выше выражением (8).

Особо отметим «локальный» характер коэффициентов $a_{n,m}(f)$ на стандартном отрезке $[0,1]$. Действительно, в выражении (8) для конкретного коэффициента $a_{n,m}(f)$ участвуют значения функции f только из отрезка $[0,m/n]$. Но такие отрезки стягиваются к нулю, если зафиксировать $m \in \mathbb{N}$ и положить $n \to \infty$. Попросту говоря, коэффициенты $a_{n,m}(f)$ при любой выбранной степени x^m, начиная с соответствующего (достаточно большого) номера n, «чувствуют» значения функции лишь вблизи нуля — в малой окрестности $[0,\delta]$ и «нечувствительны» к изменениям $f(x)$ вне отрезка $[0,\delta]$.

Точнее, справедлив *принцип локализации*: если $f, g \in C[0,1]$, и $f(x) \equiv g(x)$ на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \delta$ с некоторым $\delta \in (0,1)$, то для коэффициентов (8) имеем совпадение

$$a_{n,m}(f) = a_{n,m}(g), \quad \forall\, n \geqslant \lceil m/\delta \rceil, \tag{11}$$

где $\lceil m/\delta \rceil$ — *потолок* числа m/δ по терминологии [12], т. е. наименьшее целое число, большее или равное m/δ.

Дополнительную информацию о поведении коэффициентов $a_{n,m}(f)$ в полиномах Бернштейна на стандартном отрезке $[0,1]$ см. в [10, 13].

4. Полиномы Бернштейна на симметричном отрезке

Изучим теперь правила, регулирующие алгебраическую запись (4) для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$. Краткое изложение полученных результатов дано нами в заметке [14]. Некоторые дополнительные сведения о полиномах Бернштейна на симметричном отрезке можно найти в [9, 15].

Согласно общему определению (3) для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна принимают вид

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Наряду с исходным определением (12) удобно использовать эквивалентную запись

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k (1-x)^k (1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

с суммированием от правой границы отрезка $[-1,1]$, а не от левой, как в формуле (12). Элементарный переход от (12) к (13) происходит с учетом равенства $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Прямые вычисления по формуле (12) (или (13)) дают следующие результаты:

$$B_1(f,x) = \frac{1}{2}\big(f(1) + f(-1)\big) + \frac{1}{2}\big(f(1) - f(-1)\big)x,$$

$$B_2(f,x) = \frac{1}{4}\big(f(1) + 2f(0) + f(-1)\big) + \frac{2}{4}\big(f(1) - f(-1)\big)x + \frac{1}{4}\big(f(1) - 2f(0) + f(-1)\big)x^2,$$

$$B_3(f,x) = \frac{1}{8}\left(f(1) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + f(-1)\right)$$
$$+ \frac{3}{8}\left(f(1) + f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) - f(-1)\right)x + \frac{3}{8}\left(f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) + f(-1)\right)x^2$$
$$+ \frac{1}{8}\left(f(1) - 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) - f(-1)\right)x^3,$$

$$B_4(f,x) = \frac{1}{16}\left(f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 6f(0) + 4f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1)\right) +$$
$$+\frac{4}{16}\left(f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(-1)\right)x$$
$$+\frac{6}{16}\left(f(1) - 2f(0) + f(-1)\right)x^2 + \frac{4}{16}\left(f(1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(-1)\right)x^3$$
$$+\frac{1}{16}\left(f(1) - 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 6f(0) - 4f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1)\right)x^4.$$

Некоторые дроби специально оставлены не сокращенными для лучшего наблюдения за действующими закономерностями.

Требуется найти общие правила, регулирующие образование коэффициентов в подобных формулах. Понятно, что комбинаторная природа возникающих соотношений здесь более сложная, чем в аналогичных примерах на $[0,1]$. Сразу обратим внимание на одну особенность первых полиномов $B_n(f,x)$, записанных для $[-1,1]$. Все суммы в скобках перед степенями x удобно начинать с $f(1)$, поскольку именно $f(1)$ всегда присутствует со знаком «плюс». Как выяснилось в процессе исследований, при выводе соответствующей общей формулы целесообразно исходить из представления (13), где суммирование также начинается с $f(1)$. Именно на (13) и будем основываться.

5. Первичные полиномы в симметричном случае

Согласно (13) *первичные полиномы Бернштейна* на $[-1,1]$ определим формулой

$$T_{n,k}(x) = \frac{1}{2^n}C_n^k(1-x)^k(1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\ldots,n. \tag{14}$$

Для разложения полинома $T_{n,k}(x)$ по степеням x надо перемножить два бинома, каждый из которых раскрывается со своим числом слагаемых. Перемножение упростится, если раскрывать биномы в виде бесконечных «рядов Лорана», стандартно расширив определение биномиальных коэффициентов (1) так, чтобы верхний индекс мог принимать любые целые значения.

При $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = 0, \quad k \in \{\ldots,-3,-2,-1\} \cup \{n+1,n+2,n+3,\ldots\}. \tag{15}$$

Это согласуется с известным свойством факториала

$$\frac{1}{(-m)!} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

и с общим подходом к биномиальным коэффициентам [12, с. 178–180]. Понятно, что правило Паскаля (2) сохранится при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Приняв соглашение (15), в формулах биномов можно перейти к бесконечным суммам:

$$(1-x)^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\, x^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j C_k^j\, x^j,$$

$$(1+x)^{n-k} = \sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l\, x^l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{n-k}^l\, x^l.$$

Формально перемножим получившиеся ряды Лорана:

$$(1-x)^k(1+x)^{n-k} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j C_k^j\, x^j\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{n-k}^l\, x^l\right)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j+l=m}(-1)^j C_k^j C_{n-k}^l\right)x^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m.$$

Отдельно рассмотрим возникшие свертки биномиальных коэффициентов

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j} \equiv \sum_j (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}. \tag{16}$$

Как обычно, суммирование без указания пределов означает, что сумма вычисляется по всем возможным ненулевым слагаемым. Для того чтобы j-е слагаемое в формуле (16) было отличным от нуля, должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant k, \\ 0 \leqslant m-j \leqslant n-k, \end{cases}$$

из которых следует, что $0 \leqslant m \leqslant n$. Поэтому при $m < 0$ и при $m > n$ все слагаемые в свертке (16) обращаются в нуль, и сама свертка тоже равна нулю. Оставляя лишь ненулевые свертки, приходим к формуле перемножения биномов

$$(1-x)^k(1+x)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_j (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m. \tag{17}$$

Подставим (17) в формулу (14). Получим

$$T_{n,k}(x) = \frac{1}{2^n}\, C_n^k \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_j (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_j (-1)^j C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m.$$

Заметим, что

$$C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j} = C_n^m C_m^j C_{n-m}^{k-j}, \tag{18}$$

ибо

$$C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\;\frac{k!}{j!(k-j)!}\;\frac{(n-k)!}{(m-j)!(n-k-m+j)!}$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\;\frac{m!}{j!(m-j)!}\;\frac{(n-m)!}{(k-j)!(n-m-k+j)!} = C_n^m C_m^j C_{n-m}^{k-j}.$$

Итак, для первичных полиномов (14) справедливы разложения

$$T_{n,k}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n} C_n^m\left(\sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}\right)x^m, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{19}$$

С помощью формулы (19) легко вывести явное алгебраическое представление по степеням переменной x для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке.

6. Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке

Основное утверждение состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле (13). Тогда коэффициенты полиномов $B_n(f,x)$ в алгебраической записи (4) выражаются в виде*

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k \, f\left(1 - \frac{2k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},\ m = 0,1,\ldots,n, \tag{20}$$

со значениями

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}. \tag{21}$$

$\lhd$ Согласно (13) имеем

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) T_{n,k}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

с первичными полиномами $T_{n,k}(x)$ из формулы (14). Воспользуемся разложениями (19) и получим

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(\sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \right) x^m$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \right) f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) x^m,$$

где

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \right) f\left(1 - \frac{2k}{n}\right).$$

Но это и есть запись (20) с числами $D_{n,m}^k$ из формулы (21). $\rhd$

Установленные формулы содержат богатую комбинаторную информацию. Раскроем арифметическую природу чисел $D_{n,m}^k$ и покажем, что их можно находить через весьма регулярные процедуры.

Наиболее простая ситуация со значениями $D_{n,0}^k$, отвечающими выбору $m = 0$. Эти числа фигурируют в записи свободного коэффициента $a_{n,0}(f)$ полинома $B_n(f,x)$. Согласно (21) имеем

$$D_{n,0}^k = \sum_j (-1)^j C_0^j C_n^{k-j} = C_0^0 C_n^k = C_n^k, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\ldots,n.$$

Поэтому формула (20) дает выражение

$$a_{n,0}(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(1 - \frac{2k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последнее полностью согласовано с равенством $a_{n,0}(f) = B_n(f,0)$, если вычислять значение $B_n(f,0)$, исходя из представления (13).

Итак, поскольку

$$D_{n,0}^k = C_n^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{22}$$

то числа $D_{n,0}^k$ находятся из обычного треугольника Паскаля, правда, со «срезанной» вершиной (ибо значение $D_{0,0}^0$ просто не нужно). Следующее утверждение показывает, что при любом другом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ числа $D_{n,m}^k$ с переменными n,k тоже образуют своеобразные «трапеции Паскаля», построенные по своим начальным и краевым условиям.

Теорема 2. *При любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ числа $D_{n,m}^k$, определенные по формуле* (21), *обладают свойствами:*

$$D_{m,m}^k = (-1)^k C_m^k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, m\}, \tag{23}$$

$$D_{n,m}^0 = 1, \quad D_{n,m}^n = (-1)^m, \quad n \in \{m, m+1, \ldots\}, \tag{24}$$

$$D_{n,m}^{k-1} + D_{n,m}^k = D_{n+1,m}^k, \quad n \in \{m, m+1, \ldots\},\ k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{25}$$

$\lhd$ Согласно (21) при $n = m$ имеем

$$D_{m,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_0^{k-j} = (-1)^k C_m^k,$$

так как единственное ненулевое слагаемое будет при $j = k$. Соотношение (23) доказано.

Оба соотношения в (24) следуют из схожих соображений:

$$D_{n,m}^0 = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{-j} = C_m^0 C_{n-m}^0 = 1,$$

$$D_{n,m}^n = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{n-j} = (-1)^m C_m^m C_{n-m}^{n-m} = (-1)^m,$$

поскольку в первом случае единственное ненулевое слагаемое встретится при $j = 0$, а во втором — при $j = m$.

Осталось доказать (25). Используя определение (21), запишем

$$\begin{aligned} D_{n,m}^{k-1} + D_{n,m}^k &= \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-1-j} + \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \\ &= \sum_j (-1)^j C_m^j \bigl(C_{n-m}^{k-j-1} + C_{n-m}^{k-j}\bigr) = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m+1}^{k-j} = D_{n+1,m}^k. \end{aligned}$$

Все заявленные факты установлены. $\rhd$

Свойства, отмеченные в теореме 2, позволяют организовать регулярный процесс вычисления значений $D_{n,m}^k$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$. Формулу (23) надо трактовать как начальное условие, а соотношения (24) — как краевые условия. Ключевое свойство (25) естественно считать *правилом Паскаля*, действующим при последовательном увеличении номера n. Вместо дальнейших объяснений проще перейти к наглядным иллюстрациям.

7. Трапеции Паскаля

Итак, при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ рассматриваем числа $D^k_{n,m}$, введенные в теореме 1. Они возникают в формуле (20), выражающей коэффициенты $a_{n,m}(f)$ перед выбранной степенью x^m в явной алгебраической записи (4) для полиномов Бернштейна (13). Используя свойства (23)–(25), будем записывать элементы $D^k_{n,m}$ в строки, каждая из которых соответствует своему номеру n в нумерации $n = m$, $n = m+1$, $n = m+2$ и так далее. Элементы фиксированной строки с номером n отвечают разным значениям k, взятым от 0 до n. Из-за сходства идеи с классической конструкцией будем называть возникающие таблицы *трапециями Паскаля*.

Напомним, что согласно (22) числам $D^k_{n,0}$ со значением $m = 0$ отвечает обычный набор биномиальных коэффициентов:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
\end{array}
$$

Приведены первые восемь строк, начиная с $n = 1$ и до $n = 8$. Ясно, что такую таблицу (как и все последующие) можно продолжать до бесконечности.

При $m = 1$ для чисел $D^k_{n,1}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & -1 & & & & & & & \\
1 & 0 & -1 & & & & & & \\
1 & 1 & -1 & -1 & & & & & \\
1 & 2 & 0 & -2 & -1 & & & & \\
1 & 3 & 2 & -2 & -3 & -1 & & & \\
1 & 4 & 5 & 0 & -5 & -4 & -1 & & \\
1 & 5 & 9 & 5 & -5 & -9 & -5 & -1 & \\
1 & 6 & 14 & 14 & 0 & -14 & -14 & -6 & -1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 1$ до $n = 8$.

При $m = 2$ для чисел $D^k_{n,2}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & -2 & 1 & & & & & & \\
1 & -1 & -1 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & -2 & 0 & 1 & & & & \\
1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & & & \\
1 & 2 & -1 & -4 & -1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 1 & -5 & -5 & 1 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 4 & -4 & -10 & -4 & 4 & 4 & 1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 2$ до $n = 8$.

При $m = 3$ для чисел $D^k_{n,3}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -3 \quad 3 \quad -1 \\
1 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\
1 \quad -1 \quad -2 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \\
1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \\
1 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \quad -1 \quad -1 \\
1 \quad 2 \quad -2 \quad -6 \quad 0 \quad 6 \quad 2 \quad -2 \quad -1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 3$ до $n = 8$.

При $m = 4$ для чисел $D^k_{n,4}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \\
1 \quad -3 \quad 2 \quad 2 \quad -3 \quad 1 \\
1 \quad -2 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \\
1 \quad -1 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \quad -3 \quad -1 \quad 1 \\
1 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 4$ до $n = 8$.

При $m = 5$ для чисел $D^k_{n,5}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -5 \quad 10 \quad -10 \quad 5 \quad -1 \\
1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \quad -5 \quad 4 \quad -1 \\
1 \quad -3 \quad 1 \quad 5 \quad -5 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \\
1 \quad -2 \quad -2 \quad 6 \quad 0 \quad -6 \quad 2 \quad 2 \quad -1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 5$ до $n = 8$.

При $m = 6$ для чисел $D^k_{n,6}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -6 \quad 15 \quad -20 \quad 15 \quad -6 \quad 1 \\
1 \quad -5 \quad 9 \quad -5 \quad -5 \quad 9 \quad -5 \quad 1 \\
1 \quad -4 \quad 4 \quad 4 \quad -10 \quad 4 \quad 4 \quad -4 \quad 1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 6$ до $n = 8$.

Дальнейший процесс понятен. Используя такие таблицы и формулу (20) из теоремы 1, легко получить развернутую алгебраическую запись для любого полинома $B_n(f, x)$, по крайней мере, при не слишком больших значениях $n \in \mathbb{N}$ (ср. с примерами из п. 4 выше).

Разумеется, возникающие линейные комбинации (20) могут весьма нетривиально вычисляться даже для простых функций $f(x)$, когда требуется привести ответ (алгебраическую запись полиномов Бернштейна) к упрощенному «завершенному» виду. Но с теоретической точки зрения полезно иметь в распоряжении общие формулы, раскрывающие внутренний закон образования коэффициентов.

Заметим, между прочим, что большинство элементов в трапециях Паскаля заведомо отлично от нуля, хотя отдельные нули все же встречаются. Но тогда по формуле (20) при увеличении номера n вычисление коэффициентов $a_{n,m}(f)$ неизбежно «размазывается» по всему отрезку $[-1, 1]$, не локализуясь в меньшие промежутки. Другими словами, в отличие от стандартного случая, на симметричном отрезке $[-1, 1]$ не действует принцип локализации: если вычислять коэффициенты полиномов Бернштейна по формуле (20), фиксируя $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то из совпадения двух функций f и g на каком-нибудь отдельном промежутке $[\delta_1, \delta_2] \subsetneqq [-1, 1]$ не следует совпадение значений $a_{n,m}(f)$ и $a_{n,m}(g)$ при всех достаточно больших номерах n (ср. с правилом (11) для коэффициентов (8)).

Систематическое изучение трапеций Паскаля обнаруживает множество закономерностей. Некоторые базовые факты полезно отметить сразу для применения в последующих исследованиях. Начнем с простых соображений «четности» и «нечетности».

8. По поводу четности и нечетности

Непосредственно из приведенных выше трапеций видно, что в распределении чисел $D^k_{n,m}$ есть естественная симметрия при четных m и антисимметрия при нечетных m. Точное правило в зависимости от $m \in \mathbb{N}$ можно сформулировать так:

$$D^{n-k}_{n,m} = (-1)^m D^k_{n,m}, \quad n \geqslant m, \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Действительно, по определению (21) имеем

$$D^{n-k}_{n,m} = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{n-k-j}_{n-m} = (-1)^m \sum_j (-1)^{m-j} C^{m-j}_m C^{k-(m-j)}_{n-m}$$
$$= (-1)^m \sum_l (-1)^l C^l_m C^{k-l}_{n-m} = (-1)^m D^k_{n,m},$$

что и требовалось показать. Понятно, что общее правило (26) распадается на два случая.

При $m = 2q$, где $q \in \mathbb{N}$, получаем *соотношение симметрии*

$$D^{n-k}_{n,2q} = D^k_{n,2q}, \quad n \geqslant 2q, \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{27}$$

При $m = 2q - 1$, где $q \in \mathbb{N}$, получаем *соотношение антисимметрии*

$$D^{n-k}_{n,2q-1} = -D^k_{n,2q-1}, \quad n \geqslant 2q - 1, \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Как обычно, из (28) следует равенство

$$D^j_{2j,2q-1} = 0, \quad j = q, \, q+1, \, q+2, \ldots, \tag{29}$$

что также непосредственно наблюдается в трапециях с нечетными номерами.

Используя соотношения (27)–(29), можно отдельно упростить выражения для полиномов Бернштейна от четных и нечетных функций. Опустим элементарные обоснования и сразу приведем окончательный результат.

Итак, рассматриваем четную или нечетную функцию $f \in C[-1, 1]$ и ее полиномы Бернштейна (13), для которых ставится вопрос о явной алгебраической записи (4). В зависимости от характера функции f имеем один из следующих ответов.

Если функция f является четной на $[-1, 1]$, то $B_1(f, x) \equiv f(1)$ (константа), а затем

$$B_{2p}(f, x) = \sum_{q=0}^{p} a_{2p,2q}(f) x^{2q}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

где

$$a_{2p,2q}(f) = \frac{1}{2^{2p}} C^{2q}_{2p} \left[D^p_{2p,2q} \, f(0) \ + \ 2 \sum_{k=1}^{p} D^{p-k}_{2p,2q} \, f\left(\frac{k}{p}\right) \right], \tag{31}$$

и

$$B_{2p+1}(f,x)=\sum_{q=0}^{p} a_{2p+1,2q}(f)x^{2q}, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{32}$$

где

$$a_{2p+1,2q}(f)=\frac{1}{2^{2p}}C_{2p+1}^{2q}\sum_{k=0}^{p} D_{2p+1,2q}^{p-k}\, f\left(\frac{2k+1}{2p+1}\right). \tag{33}$$

Числа $D_{n,m}^k$ в формулах (31) и (33) определены по правилу (21).

Если функция f является нечетной на $[-1,1]$, то $B_1(f,x)=f(1)x$, а затем

$$B_{2p}(f,x)=\sum_{q=1}^{p} a_{2p,2q-1}(f)\, x^{2q-1}, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{34}$$

где

$$a_{2p,2q-1}(f)=\frac{1}{2^{2p-1}}C_{2p}^{2q-1}\sum_{k=1}^{p} D_{2p,2q-1}^{p-k}\, f\left(\frac{k}{p}\right), \tag{35}$$

и

$$B_{2p+1}(f,x)=\sum_{q=0}^{p} a_{2p+1,2q+1}(f)x^{2q+1}, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{36}$$

где

$$a_{2p+1,2q+1}(f)=\frac{1}{2^{2p}}C_{2p+1}^{2q+1}\sum_{k=0}^{p} D_{2p+1,2q+1}^{p-k}\, f\left(\frac{2k+1}{2p+1}\right). \tag{37}$$

Числа $D_{n,m}^k$ в формулах (35) и (37) также определены по правилу (21).

По формулам (30), (32) и (34), (36) полиномы Бернштейна имеют ту же четность, что и порождающая их функция $f\in C[-1,1]$. Этот элементарный факт очевидно связан с соотношениями симметрии и антисимметрии в трапециях Паскаля, но может быть легко доказан и другим, совсем простым способом (см., например, [9]).

Обсудим теперь закономерности иного характера. Краткое изложение последующих результатов дано нами в заметке [16].

9. Алгебраические тождества в трапециях Паскаля

Сравнивая определение (21) для чисел $D_{n,m}^k$ с формулой перемножения биномов (17), замечаем связь этих соотношений. После элементарных переобозначений в (17) получим тождество

$$(1-x)^m(1+x)^{n-m}=\sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k\, x^k, \quad m,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant m, \tag{38}$$

с числами $D_{n,m}^k$ из формулы (21). Отсюда делаем вывод: каждая трапеция Паскаля с выбранным номером m совпадает с таблицей коэффициентов для выражений

$$R_{n,m}(x)=(1-x)^m(1+x)^{n-m}, \tag{39}$$

раскрываемых при фиксированном m и последовательном увеличении значения $n\geqslant m$.

Всюду в данном пункте полагаем, что $m,n\in\mathbb{N}$ и $n\geqslant m$. Разумеется, формула (38) и ряд последующих соотношений (но не все!) будут справедливы также при $m=0$ со значениями $D^k_{n,0} = C^k_n$ (см. (22)). Но поскольку свойства биномиальных коэффициентов хорошо изучены, исключим из рассмотрения этот случай, считая везде, что $m \geqslant 1$.

Выражение $R_{n,m}(x)$ вида (39) будем называть *двойным биномом* или *бибиномом*, а формулу разложения (38) — *формулой бибинома*. Фактически бибином (39), взятый при фиксированных n, m, можно рассматривать как производящую функцию для n-й строки в m-й трапеции Паскаля. Подробнее про производящие функции для числовых последовательностей см. [12, гл. 5 и 7].

Из формулы бибинома (38) элементарно следуют все соотношения для чисел $D^k_{n,m}$, отмеченные в теореме 2 выше. Действительно, ввиду (38) свойства (23), (24) очевидны, а правило Паскаля (25) получается естественной индукцией по n, проводимой при последовательном умножении $(1-x)^m$ на $(1+x)$, затем снова на $(1+x)$, и снова на $(1+x)$, и т. д.

Как всегда, при наличии хороших производящих функций можно установить много полезных фактов про коэффициенты, возникающие в разложениях. Отметим наиболее простые, базовые соотношения.

Теорема 3. *Числа $D^k_{n,m}$, определенные по формуле (21), обладают свойствами:*

$$\sum_{k=0}^{n} D^k_{n,m} = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{40}$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k D^k_{m,m} = 2^m, \quad m \geqslant 1, \tag{41}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k_{n,m} = 0, \quad n > m \geqslant 1, \tag{42}$$

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} D^{2j}_{n,m} = 0, \qquad \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} D^{2j+1}_{n,m} = 0, \quad n > m \geqslant 1, \tag{43}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k D^k_{n,m} = (-1)^m 3^{n-m}, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{44}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k D^k_{n,m} = (-1)^{n-m} 3^m, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{45}$$

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} 2^{2j} D^{2j}_{n,m} = \frac{(-1)^m 3^{n-m} + (-1)^{n-m} 3^m}{2}, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{46}$$

$$\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} 2^{2j+1} D^{2j+1}_{n,m} = \frac{(-1)^m 3^{n-m} - (-1)^{n-m} 3^m}{2}, \quad n \geqslant m \geqslant 1. \tag{47}$$

$\triangleleft$ Используем формулу бибинома (38) и краткое обозначение $R_{n,m}(x)$, введенное в (39). При подстановке в (38) значения $x = 1$ получаем тождество (40), ибо $R_{n,m}(1) = 0$. Если $n = m$, то при подстановке в (38) значения $x = -1$ получим тождество (41), ибо $R_{m,m}(-1) = 2^m$. Если же $n > m$, то при подстановке в (38) значения $x = -1$ получим тождество (42), ибо тогда $R_{n,m}(-1) = 0$. Соотношения (43) получаются как сумма и разность тождеств (40) и (42). Соотношения (44) и (45) возникают при подстановке в (38) значений $x = 2$ и $x = -2$. Сумма и разность соотношений (44) и (45) дают соответственно (46) и (47). Доказательство завершено. $\triangleright$

Другие полезные формулы можно установить при последовательном дифференцировании базового тождества (38).

Теорема 4. *Числа $D_{n,m}^k$, определенные по формуле* (21), *обладают свойствами:*

$$\sum_{k=1}^{n} kD_{n,1}^k = -2^{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{n} kD_{n,m}^k = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 2. \tag{49}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)D_{n,1}^k = -(n-1)2^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{50}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)D_{n,2}^k = 2^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{51}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)D_{n,m}^k = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 3. \tag{52}$$

Общая формула, верная при любом фиксированном $p \in \mathbb{N}$, выглядит так:

$$\sum_{k=p}^{n} (k)_p D_{n,m}^k = \begin{cases} (-1)^m (p)_m (n-m)_{p-m}\, 2^{n-p}, & n \geqslant p \geqslant m, \\ 0, & n \geqslant m \geqslant p+1, \end{cases} \tag{53}$$

где $(\alpha)_j$ — символ Похгаммера (убывающий факториал), определенный для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ по правилу: $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_1 = \alpha$, $(\alpha)_2 = \alpha(\alpha-1)$, $(\alpha)_j = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 3$. В частности, в дополнение к (48) и (50) имеем

$$\sum_{k=p}^{n} k(k-1)\dots(k-p+1)D_{n,1}^k = -p(n-1)\dots(n-p+1)\, 2^{n-p}, \quad n \geqslant p, \tag{54}$$

для любого $p \geqslant 3$.

$\lhd$ Нетрудно убедиться, что все соотношения (48)–(52) и (54) являются частными случаями общей формулы (53). Сама же формула (53) получается p-кратным дифференцированием базового тождества (38) с последующей подстановкой в результат значения $x = 1$. Так как бибином $R_{n,m}(x)$ в (38) имеет степень n, то требование $n \geqslant p$ нужно для содержательности задачи. Затем, поскольку $x = 1$ является для $R_{n,m}(x)$ корнем кратности m, то $R_{n,m}^{(p)}(1) = 0$ всякий раз, когда $m > p$, т. е. когда $m \geqslant p+1$. Отсюда следует второе (нижнее) соотношение в (53) при $n \geqslant m \geqslant p+1$. Для доказательства первого тождества при $n \geqslant p \geqslant m$ воспользуемся правилом Лейбница, согласно которому

$$\sum_{k=p}^{n} (k)_p D_{n,m}^k = R_{n,m}^{(p)}(1) = \big((1-x)^m (1+x)^{n-m}\big)^{(p)} \Big|_{x=1}$$

$$= \sum_{j=0}^{p} C_p^j \big((1-x)^m\big)^{(j)} \big((1+x)^{n-m}\big)^{(p-j)} \Big|_{x=1} = C_p^m \big((1-x)^m\big)^{(m)} \big((1+x)^{n-m}\big)^{(p-m)} \Big|_{x=1}$$

$$= C_p^m\, m!\, (-1)^m\, (n-m)(n-m-1)\dots(n-p+1)\, 2^{n-p} = (-1)^m (p)_m (n-m)_{p-m}\, 2^{n-p},$$

что и утверждается в (53). Теорема доказана. $\rhd$

Установленные соотношения позволяют получить такие тождества

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,1}^k = -n2^{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{55}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,2}^k = 2^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{56}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,m}^k = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 3, \tag{57}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,1}^k = -(3n^2+3n-2)2^{n-3}, \quad n \geqslant 1, \tag{58}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,2}^k = 3n \cdot 2^{n-2}, \quad n \geqslant 2, \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,3}^k = -3 \cdot 2^{n-2}, \quad n \geqslant 3, \tag{60}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,m}^k = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 4, \tag{61}$$

и так далее. Подобные соотношения получаются как линейные комбинации соответствующих тождеств из теоремы 4. Например, для доказательства (55) воспользуемся тождествами (48) и (50), рассуждая по схеме

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,1}^k = \sum_{k=1}^{n} (k(k-1)+k) D_{n,1}^k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) D_{n,1}^k + \sum_{k=1}^{n} k D_{n,1}^k$$
$$= -(n-1)2^{n-1} - 2^{n-1} = -n2^{n-1}.$$

Аналогичный прием действует в остальных примерах (56)–(61).

Еще одна любопытная формула обнаруживается при интегрировании бибинома. Речь идет о соотношении

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{1}{2j+1} D_{n,m}^{2j} = \frac{2^n}{(n+1)C_n^m}, \quad n \geqslant m \geqslant 1. \tag{62}$$

Действительно, согласно (38) имеем

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^m (1+x)^{n-m}\, dx = \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k \int_{-1}^{1} x^k\, dx = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{2}{2j+1} D_{n,m}^{2j}$$

при $m, n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m$. Интеграл в левой части с помощью подстановки $x = 2t-1$ сводится к эйлеровой бета-функции:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^m (1+x)^{n-m}\, dx = 2^{n+1} \int_{0}^{1} t^{n-m}\, (1-t)^m\, dt = \frac{2^{n+1}}{(n+1)C_n^m},$$

что верно, поскольку

$$\int\limits_0^1 t^p(1-t)^q\,dt = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} = \frac{1}{(p+q+1)C_{p+q}^q}, \quad p,q \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Из полученных выражений следует нужное тождество (62).

Формула (62) при $m=0$ переходит в известную сумму

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{1}{2j+1} C_n^{2j} = \frac{2^n}{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Отметим, что внешне «более простые» суммы

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} D_{n,m}^k, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} C_n^k,$$

по-видимому, не имеют универсальных замкнутых выражений.

10. Комбинации с элементами из разных трапеций

Все перечисленные до сих пор соотношения «не перемешивали» элементы из разных трапеций Паскаля: в каждом отдельно взятом тождестве фигурировали числа $D_{n,m}^k$, выбранные из одной трапеции с фиксированным значением $m \in \mathbb{N}$. Впрочем, не подлежит сомнению, что разные трапеции сочетаются друг с другом многими связями.

Для примера отметим, что

$$C_n^m D_{n,m}^k = C_n^k D_{n,k}^m, \quad n \in \mathbb{N},\ k,m \in \{0,1,\ldots,n\}. \tag{63}$$

Действительно, используя определение (21) и тождество (18), имеем

$$C_n^m D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_n^m C_m^j C_{n-m}^{k-j} = \sum_j (-1)^j C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j} = C_n^k D_{n,k}^m,$$

что и требовалось показать.

Полезно сравнить (63) с выражениями (20) для коэффициентов в алгебраической записи (4) полиномов Бернштейна (13). Полученное означает, что при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ вклад от значения $f\left(1-\frac{2k}{n}\right)$ в коэффициент $a_{n,m}(f)$ при x^m будет ровно тот же, что и вклад от значения $f\left(1-\frac{2m}{n}\right)$ в коэффициент $a_{n,k}(f)$ при x^k (под «вкладом» мы понимаем множитель, стоящий в коэффициентах $a_{n,m}(f)$ и $a_{n,k}(f)$ при указанных выше значениях). Это своеобразное *правило баланса* действует для коэффициентов полиномов Бернштейна именно на $[-1,1]$.

Отметим также формулу

$$D_{n,m}^k = (-1)^k D_{n,n-m}^k, \quad n \in \mathbb{N},\ k,m \in \{0,1,\ldots,n\}, \tag{64}$$

связывающую n-е строки в двух трапециях с номерами m и $n-m$ (эти номера очевидно различны при $n \neq 2m$). Соотношение (64) следует напрямую из (21), поскольку

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} = \sum_l (-1)^{k-l} C_m^{k-l} C_{n-m}^l = \sum_l (-1)^{k-l} C_{n-m}^l C_m^{k-l}$$
$$= (-1)^k \sum_l (-1)^l C_{n-m}^l C_{n-(n-m)}^{k-l} = (-1)^k D_{n,n-m}^k.$$

В частности, при $n = m$ из (64) получаем $D^k_{m,m} = (-1)^k D^k_{m,0} = (-1)^k C^k_m$, что совпадает с прежней формулой (23).

Приведем еще одно соотношение

$$D^{k+1}_{n+1,m+1} = D^{k+1}_{n,m} - D^k_{n,m}, \quad n \in \mathbb{N},\ k, m \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{65}$$

связывающее элементы из «соседних» трапеций Паскаля. Действительно, выкладка

$$D^{k+1}_{n,m} - D^k_{n,m} = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k+1-j}_{n-m} - \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k-j}_{n-m}$$
$$= \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k+1-j}_{n-m} - \sum_j (-1)^{j-1} C^{j-1}_m C^{k+1-j}_{n-m}$$
$$= \sum_j (-1)^j \bigl(C^j_m + C^{j-1}_m\bigr) C^{k+1-j}_{n-m} = \sum_j (-1)^j C^j_{m+1} C^{k+1-j}_{n-m} = D^{k+1}_{n+1,m+1}$$

сразу дает нужный результат. При $k = n$ в формуле (65) принято соглашение $D^{n+1}_{n,m} = 0$. С учетом него $D^{n+1}_{n+1,m+1} = -D^n_{n,m}$, что согласуется со вторым условием в (24).

Обсудим теперь другое специальное свойство трапеций Паскаля, которое влечет весьма неожиданное следствие для коэффициентов полиномов Бернштейна.

11. Универсальная связь двух коэффициентов

Непосредственно изучая трапеции Паскаля, можно заметить одну закономерность: в m-й по счету трапеции с фиксированным $m \in \mathbb{N}$ строка с номером $n = 2m$ выглядит так же, как строка с номером $n = m$, только «прореженная» нулями. Аналитически этот факт выражается в виде

$$D^{2j}_{2m,m} = (-1)^j C^j_m = D^j_{m,m}, \quad m \in \mathbb{N},\ j = 0, \ldots, m, \tag{66}$$

$$D^{2j-1}_{2m,m} = 0, \quad m \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, m. \tag{67}$$

Для обоснования соотношений (66), (67) подставим $n = 2m$ в формулу (38). Получим

$$(1-x)^m (1+x)^m = \sum_{k=0}^{2m} D^k_{2m,m} x^k, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

С другой стороны, по традиционной формуле бинома

$$(1-x)^m (1+x)^m = (1-x^2)^m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C^j_m x^{2j}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Сравнивая (68) и (69), а затем учитывая (23), приходим к соотношениям (66), (67). Отметим, что (67) следует также из (64), если подставить туда $n = 2m$ и $k = 2j - 1$.

Обнаруженная закономерность позволяет установить следующее правило, связывающее коэффициенты $a_{m,m}(f)$ и $a_{2m,m}(f)$ в алгебраической записи полиномов Бернштейна на $[-1, 1]$.

Теорема 5. *Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле* (13)*. Тогда в алгебраической записи* (4) *для этих полиномов действует правило*

$$a_{2m,m}(f) = 2^{-m} C^m_{2m}\, a_{m,m}(f), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{70}$$

$\lhd$ По формуле (20) имеем выражения

$$a_{m,m}(f) = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{m} D^j_{m,m}\; f\left(1 - \frac{2j}{m}\right), \tag{71}$$

$$a_{2m,m}(f) = \frac{1}{2^{2m}} C^m_{2m} \sum_{k=0}^{2m} D^k_{2m,m}\; f\left(1 - \frac{k}{m}\right). \tag{72}$$

Используем в (72) соотношения (66), (67). Получим

$$a_{2m,m}(f) = \frac{1}{2^{2m}} C^m_{2m} \sum_{j=0}^{m} D^{2j}_{2m,m}\; f\left(1 - \frac{2j}{m}\right) = \frac{1}{2^{2m}} C^m_{2m} \sum_{j=0}^{m} D^j_{m,m}\; f\left(1 - \frac{2j}{m}\right).$$

Сравнивая результат с (71), приходим к равенству (70). $\rhd$

Подчеркнем, что правило (70) носит универсальный характер: оно связывает центральный коэффициент $a_{2m,m}(f)$ полинома $B_{2m}(f,x)$ со старшим коэффициентом $a_{m,m}(f)$ полинома $B_m(f,x)$ для любой функции $f \in C[-1,1]$ при любом выборе $m \in \mathbb{N}$. Отмеченное свойство не имеет аналогов на стандартном отрезке $[0,1]$.

Обратим также внимание на то, что множитель $2^{-m} C^m_{2m}$ в формуле (70) быстро увеличивается с ростом m. По формуле Стирлинга имеем

$$2^{-m} C^m_{2m} \sim \frac{2^m}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \to \infty. \tag{73}$$

Используя асимптотику (73) и связь (70) между коэффициентами $a_{m,m}(f)$ и $a_{2m,m}(f)$, нетрудно обосновать экспоненциальный рост при $m \to \infty$ коэффициента $a_{2m,m}(f)$ на единичном шаре в пространстве $C[-1,1]$. Данный факт представляет интерес не только «сам по себе», но и в связи с вопросом о скорости роста коэффициентов в равномерных полиномиальных аппроксимациях (см. [17–19]).

12. Заключительные замечания

Итак, трапеции Паскаля полезны для теории полиномов Бернштейна и, кроме того, обладают богатым внутренним математическим содержанием. В связи с этим укажем несколько перспективных тем для дальнейших исследований.

1) Распределение нулей в трапециях Паскаля при различных $m \in \mathbb{N}$. Частотность и регулярность встречающихся нулей. Группы «очевидных» регулярных нулей описаны правилами (29) и (67). Есть ли какие-то содержательные дополнения к этим случаям?

2) Потенциальная скорость роста элементов в трапециях Паскаля при том или ином значении $m \in \mathbb{N}$. Требуется дать оценки для величин

$$\mu_{n,m} \equiv \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|D^k_{n,m}\right|, \quad \eta_{n,m} \equiv \sum_{k=0}^{n} \left|D^k_{n,m}\right| \tag{74}$$

при увеличении номера $n \geqslant m$ с фиксированным $m \in \mathbb{N}$.

3) Рекуррентные соотношения, связывающие элементы из разных трапеций Паскаля. Типичным примером такого соотношения служит формула (65) выше.

4) Простые выражения для элементов $D^k_{n,m}$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ (наподобие известной формулы биномиальных коэффициентов). Возможно, что эта проблема имеет лишь частные решения, полезные при малых значениях m.

Так, для элементов первой трапеции имеем представление

$$D_{n,1}^k = C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - 2C_{n-1}^{k-1} = \frac{n-2k}{n} C_n^k, \quad n \geqslant 1,\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

легко выводимое из определения (21). Последующая серия выглядит так:

$$D_{n,2}^k = C_n^k - 4C_{n-2}^{k-1}, \quad n \geqslant 2,$$

$$D_{n,3}^k = C_n^k - 6C_{n-3}^{k-1} - 2C_{n-3}^{k-3}, \quad n \geqslant 3,$$

$$D_{n,4}^k = C_n^k - 8C_{n-4}^{k-1} - 8C_{n-4}^{k-3}, \quad n \geqslant 4,$$

$$D_{n,5}^k = C_n^k - 10C_{n-5}^{k-1} - 20C_{n-5}^{k-3} - 2C_{n-5}^{k-5}, \quad n \geqslant 5,$$

при $k = 0, 1, \ldots, n$ с учетом соглашения (15). Перечисленные формулы проще исходного определения (21). Они являются частными проявлениями универсального правила

$$D_{n,m}^k = C_n^k - 2 \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} C_m^{2j+1} C_{n-m}^{k-2j-1}, \quad m, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant m, \tag{75}$$

верного при $k = 0, 1, \ldots, n$. Для вывода (75) надо вспомнить (см. [12, с. 195–196]) известную *свертку Вандермонда*

$$C_n^k = \sum_l C_m^l C_{n-m}^{k-l}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

и применить ее в исходном определении (21) по схеме

$$\begin{aligned} D_{n,m}^k = \sum_l (-1)^l C_m^l C_{n-m}^{k-l} = \sum_l C_m^l C_{n-m}^{k-l} + \sum_l ((-1)^l - 1) C_m^l C_{n-m}^{k-l} \\ = C_n^k - 2 \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} C_m^{2j+1} C_{n-m}^{k-2j-1}. \end{aligned}$$

Использованный прием сократил количество слагаемых примерно в два раза.

И, наконец, последнее. Весьма перспективным представляется операторный анализ формул (20), (21), полученных на отрезке $[-1, 1]$ для коэффициентов $a_{n,m}(f)$. Напомним (см. п. 3 выше), что в случае стандартного отрезка $[0, 1]$ ответ записывается через оператор конечной разности. В случае симметричного отрезка $[-1, 1]$ картина оказывается более сложной — помимо оператора разности приходится привлекать еще оператор суммы.

Действительно, следуя классическому трактату Нёрлунда [20] (но видоизменяя его обозначения), введем парные *операторы разности* и *суммы*

$$\delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \sigma_h f(x) = \frac{f(x+h) + f(x)}{2}, \tag{76}$$

вычисляемые от функции f в допустимой точке $x \in \mathbb{R}$ с фиксированным шагом $h > 0$. Нетрудно убедиться (эти соображения отсутствуют в [20]), что последовательные композиции операторов (76) записываются через элементы трапеций Паскаля.

Точнее, при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и последовательном увеличении значения n ($n = m$, $n = m+1$, $n = m+2$, ...) получаются формулы

$$\sigma_h^{n-m} \delta_h^m f(x) = \frac{1}{2^{n-m} h^m} \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k f(x + (n-k)h) \tag{77}$$

с числами $D_{n,m}^k$, взятыми из m-й трапеции Паскаля. Сравнивая (77) с основной формулой (20), устанавливаем операторное представление

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{n^m} C_n^m \, \sigma_{2/n}^{n-m} \, \delta_{2/n}^m f(-1), \quad n \in \mathbb{N}, \ m = 0, 1, \ldots, n. \tag{78}$$

Аккуратное обоснование (78) и разбор возникающих следствий лучше провести отдельно.

Авторы признательны Д. Г. Цветкович за техническую помощь и проверку многих полученных соотношений.

Добавление к заключению. Почти весь предыдущий текст был подготовлен и сдан в печать в 2016 г., но его издание несколько затянулось. В связи с этим полезно отметить следующее. В недавней работе авторов [21] дано применение изложенной выше теории к задаче о скорости роста коэффициентов полиномов Бернштейна на симметричном отрезке. Некоторые из результатов [21] оказались весьма неожиданными (см., в частности, явные выражения и асимптотики для величины $\eta_{n,m}$ из формулы (74), указанные в [21] при малых значениях $m \in \mathbb{N}$).

Кроме того, в самое последнее время мы обнаружили, что объекты, родственные числам $D_{n,m}^k$, активно используются в теории вероятностей, криптографии и теории кодирования как значения некоторых специальных *полиномов Кравчука* (см. [22–24]). Математический контекст и принятые там обозначения существенно отличаются от наших, но многие имеющиеся параллели могут обогащать как теорию полиномов Бернштейна, так и теорию полиномов Кравчука.

Литература

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.—x+130 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.—64 с.
3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.—М.–Л: ГИТТЛ, 1949.—688 с.
4. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений.—М.: ГИФМЛ, 1959.—212 с.
5. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation.—N. Y.: Dover, 1975.—xvi+394 p.
6. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer–Verlag, 1993.—x+450 p.
7. *Phillips G. M.* Interpolation and Approximation by Polynomials.—N.Y.–Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.—xiv+312 p.
8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Мат. форум. Т. 8. Ч. 1. Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 126–175.—(Итоги науки. Юг России).
9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2015.—Т. 15, вып. 3.—С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.
10. *Wigert S.* Réflexions sur le polynome d'approximation $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}$ // Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.—1927.—Bd. 20, Häfte 2.—S. 1–15.
11. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.—М.: Наука, 1977.—512 с.
12. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики.—М.: Мир, 1998.—704 с.

13. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Материалы науч. конф. Герценовские чтения–2015. Некоторые актуальные проблемы современной математики и мат. образования.—СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015.—С. 115–121.
14. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // Материалы науч. конф. Герценовские чтения–2015. Некоторые актуальные проблемы современной математики и мат. образования.—СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015.—С. 121–124.
15. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 15. Материалы XV Междунар. науч. конф.—Смоленск: СмолГУ, 2014.—С. 184–186.
16. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 17. Материалы XVII Междунар. науч. конф.—Смоленск: СмолГУ, 2016.—С. 177–182.
17. *Stafney J. D.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$ // Duke Math. J.—1967.—Vol. 34, № 3.—P. 393–396.
18. *Roulier J. A.* Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials // J. Approx. Theory.—1970.—Vol. 3, № 2.—P. 117–122.
19. *Гурарий В. И., Мелетиди М. А.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // Функциональный анализ и его прил.—1971.—Т. 5, вып. 1.—С. 73–75.
20. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung.—Berlin: Springer Verlag, 1924.—ix+551 p.
21. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 19. Материалы XIX Междунар. науч. конф.—Смоленск: СмолГУ, 2018.—С. 336–347.
22. *Feinsilver P., Kocik J.* Krawtchouk polynomials and Krawtchouk matrices // Recent Advances in Applied Probability / Eds.: Baeza-Yates R., Glaz J., Gzyl H., Hüsler J., Palacios J. L.—Boston, MA: Springer, 2005.—P. 115–141.
23. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А.* Анализ спектра случайных симметрических булевых матриц // Матем. вопр. криптогр.—2013.—Т. 4, вып. 1.—С. 59–76. DOI: 10.4213/mvk73.
24. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А.* Многочлены Кравчука и их применения в задачах криптографии и теории кодирования // Матем. вопр. криптогр.—2015.—Т. 6, вып. 1.—С. 33–56. DOI: 10.4213/mvk150.

Статья поступила 21 июня 2016 г.
Дополненный вариант — 22 июня 2019 г.

Петросова Маргарита Арсеновна
Московский педагогический государственный университет,
аспирант кафедры математического анализа
РОССИЯ, 107140, Москва, Краснопрудная, 14
E-mail: petrosova05@mail.ru

Тихонов Иван Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
профессор кафедры математической физики
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: ivtikh@mail.ru

Шерстюков Владимир Борисович
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: shervb73@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 3, P. 68–86

ALGEBRAIC REPRESENTATION FOR BERNSTEIN POLYNOMIALS ON THE SYMMETRIC INTERVAL AND COMBINATORIAL RELATIONS

Petrosova, M. A.[1], Tikhonov, I. V.[2], Sherstyukov, V. B.[3]

[1] Moscow State Pedagogical University, 14 Krasnoprudnaya Str., Moscow 107140, Russia;
[2] Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie gory, Moscow 119991, Russia;
[2] National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia
E-mail: petrosova05@mail.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Abstract. We pose the question of explicit algebraic representation for Bernstein polynomials. The general statement of the problem on an arbitrary interval $[a, b]$ is briefly discussed. For completeness, we recall Wigert formulas for the polynomials coefficients on the standard interval $[0, 1]$. However, the focus of the paper is the case of the symmetric interval $[-1, 1]$, which is of fundamental interest for approximation theory. The exact expressions for the coefficients of Bernstein polynomials on $[-1, 1]$ are found. For the interpretation of the results we introduce a number of new numerical objects named Pascal trapeziums. They are constructed by analogy with a classical triangle, but with their own "initial" and "boundary" conditions. The elements of Pascal trapeziums satisfy various relations which remind customary combinatorial identities. A systematic research on such properties is fulfilled, and summaries of formulas are given. The obtained results are applicable for the study of the behavior of the coefficients in Bernstein polynomials on $[-1, 1]$. For example, it appears that there exists a universal connection between two coefficients $a_{2m,m}(f)$ and $a_{m,m}(f)$, and this is true for all $m \in \mathbb{N}$ and for all functions $f \in C[-1, 1]$. Thus, it is set up that the case of symmetric interval $[-1, 1]$ is essentially different from the standard case of $[0, 1]$. Perspective topics for future research are proposed. A number of this topics is already being studied.

Key words: Bernstein polynomials, symmetric interval, Pascal trapeziums, combinatorial relations.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A10, 11B83, 05A10, 05A19.

For citation: *Petrosova, M. A., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* Algebraic Representation for Bernstein Polynomials on the Symmetric Interval and Combinatorial Relations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 62–86 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36462.

References

1. *Lorentz, G. G. Bernstein Polynomials*, Toronto, Univ. of Toronto Press, 1953, x+130 p.
2. *Videnskij, V. S. Mnogochleny Bernshtejna. Uchebnoe posobie k speckursu* [Bernstein Polynomials. Textbook for the Special Course], Leningrad, LSPI n. a. A. I. Herzen, 1990, 64 p. (in Russian).
3. *Natanson, I. P. Konstruktivnaya teoriya funkcij* [Constructive Theory of Functions], Moscow–Leningrad, GITTL, 1949, 688 p. (in Russian).
4. *Korovkin, P. P. Linejnye operatory i teoriya priblizhenij* [Linear Operators and the Theory of Approximation], Moscow, Fizmatgiz, 1959, 212 p. (in Russian).
5. *Davis, P. J. Interpolation and Approximation*, N. Y., Dover, 1975, xvi+394 p.
6. *DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. Constructive Approximation*, Berlin–Heidelberg–N. Y., Springer–Verlag, 1993, x+450 p.
7. *Phillips, G. M. Interpolation and Approximation by Polynomials*, N.Y.–Berlin–Heidelberg, Springer, 2003, xiv+312 p.
8. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Bernstein Polynomials: the Old and the New, *Matematicheskij forum. T. 8. Ch. 1. Issledovaniya po matematicheskomu analizu* (*Itogi nauki. Yug Rossii*) [Math. forum. Vol. 8. Part. 1. Studies in Mathematical Analysis (Results of Science. South of Russia)], Vladikavkaz, SMI VSC RAS & RNO-A, 2014, pp. 126–175 (in Russian).
9. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Gluing rule for Bernstein polynomials on the symmetric interval, *Izv. Saratov Univ.* (*N. S.*), *Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 288–300 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.

10. *Wigert S.* Réflexions sur le polynome d'approximation $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1927, Bd. 20, Häfte 2, S. 1–15.
11. *Dzyadyk, V. K. Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funkcij polinomami* [Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials], Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian).
12. *Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Boston, Addison-Wesley Longman Publ. Co., Inc., 1994, 672 p.
13. *Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* On the Behavior of the Coefficients of Bernstein Polynomials as Algebraic Notation on a Standard Interval, *Materialy nauchnoj konferencii. Gercenovskie chteniya–2015. Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i mat. obrazovaniya* [Materials of the Sci. Conf. Herzen Readings–2015. Some Current Issues Modern Mathematics and Math. Education], Saint Petersburg, Publishing House of RSPU n. a. A. I. Herzen, 2015, pp. 115–121 (in Russian).
14. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Explicit Expressions for Coefficients Bernstein Polynomials in Algebraic Notation on a Symmetric Interval, *Materialy nauchnoj konferencii. Gercenovskie chteniya–2015. Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i mat. obrazovaniya* [Materials of the Sci. Conf. Herzen Readings–2015. Some Current Issues Modern Mathematics and Math. Education], Saint Petersburg, Publishing House of RSPU n. a. A. I. Herzen, 2015, pp. 121–124 (in Russian).
15. *Petrosova, M. A., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* The Case of a Symmetric Interval in the Theory of Classical Bernstein Polynomials, *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. Vyp. 15. Materialy XV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Computer Mathematics Systems and Their Applications. Vol. 15. Materials of the XV International Sci. Conf.], Smolensk, Smolensk State Univ., 2014, pp. 184–186 (in Russian).
16. *Petrosova, M. A., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* Combinatorial Relations Related with Bernstein Polynomials on a Symmetric Interval, *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. Vyp. 17. Materialy XV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Computer Mathematics Systems and Their Applications. Vol. 17. Materials of the XVII International Sci. Conf.], Smolensk, Smolensk State Univ., 2016, pp. 177–182 (in Russian).
17. *Stafney, J. D.* A Permissible Restriction on the Coefficients in Uniform Polynomial Approximation to $C[0,1]$, *Duke Math. J.*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 393–396.
18. *Roulier, J. A.* Permissible Bounds on the Coefficients of Approximating Polynomials, *J. Approx. Theory*, 1970, vol. 3, no. 2, pp. 117–122.
19. *GurariiM, V. I. and. Meletidi, A* Functional Analysis and Its Applications, *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, no. 1, pp. 60–62. DOI: 10.1007/BF01075850.
20. *Nörlund, N. E. Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Berlin, Springer Verlag, 1924, ix+551 p.
21. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* New Research, Associated with the Algebraic Representation of Bernstein Polynomials on a Symmetric Interval, *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. Vyp. 19. Materialy XIX Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Computer Mathematics Systems and Their Applications. Vol. 19. Materials of the XIX International Sci. Conf.], Smolensk, Smolensk State Univ., 2018, pp. 336–347 (in Russian).
22. *Feinsilver P., Kocik J.* Krawtchouk Polynomials and Krawtchouk Matrices, *Recent Advances in Applied Probability* Eds.: Baeza-Yates R., Glaz J., Gzyl H., Hüsler J., Palacios J. L., Boston, MA, Springer, 2005, pp. 115–141.
23. *Ivchenko, G. I., Medvedev, Yu. I. and Mironova, V. A.* Analysis of the Spectrum of Random Symmetric Boolean Functions, *Mat. Vopr. Kriptogr.*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 59–76 (in Russian). DOI: 10.4213/mvk73.
24. *Ivchenko, G. I., Medvedev, Yu. I. and Mironova, V. A.* Krawtchouk Polynomials and their Applications in Cryptography and Coding Theory, *Mat. Vopr. Kriptogr.*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 33–56 (in Russian). DOI: 10.4213/mvk150.

Received 21 June, 2016
Supplemented 22 Jule, 2019

Margarita A. Petrosova
Moscow State Pedagogical University,
14 Krasnoprudnaya Str., Moscow 107140, Russia,
Graduate student of the Department of Math. Analysis
E-mail: `petrosova05@mail.ru`

Ivan V. Tikhonov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie gory, Moscow 119991, Russia,
Professor of the Department of Math. Physics
E-mail: `ivtikh@mail.ru`

Vladimir B. Sherstyukov
National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia,
Associate Professor of Higher Mathematics Department
E-mail: `shervb73@gmail.com`