Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 2, С. 58–66

УДК 517.958
DOI 10.23671/VNC.2019.2.32117

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО ЯДРА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ж. Д. Тотиева[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается обратная задача определения матричного ядра $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$, $t \in [0, T]$, входящего в систему интегро-дифференциальных уравнений анизотропной вязкоупругости. Прямая начально-краевая задача состоит в определении вектор-функции смещения $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x_3 > 0$. Предполагается, что коэффициенты уравнений системы (плотность и модули упругости) зависят только от пространственной переменной $x_3 > 0$. Источник возмущения упругих волн сосредоточен на границе области $x_3 = 0$ и представляет собой дельта-функцию Дирака (граничное условие Неймана специального вида). Обратная задача сводится к изученным ранее задачам определения скалярных ядер $K_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. В качестве дополнительного условия задается значение преобразования Фурье по x_2 от функции $u(x, t)$ на поверхности $x_3 = 0$. Приводятся теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи. Идея доказательства глобальной разрешимости состоит в применении принципа сжатых отображений к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода в банаховом пространстве с весовыми нормами.

Ключевые слова: обратная задача, устойчивость, дельта-функция, модули упругости, матричное ядро.

Mathematical Subject Classification (2010): 35L20, 35R30, 35Q99.

Образец цитирования: *Тотиева Ж. Д.* К вопросу исследования задачи определения матричного ядра системы уравнений анизотропной вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 58–66. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32117.

1. Введение

Многим средам (материалам) свойственна зависимость процессов деформирования от скорости и времени, которая отсутствует в уравнениях теории упругости. Такие среды проявляют как мгновенную, так и замедленную реакцию на нагрузку. Это свойство называют памятью. Другая особенность состоит в том, что в средах с памятью сочетаются способности запасать энергию подобно упругим телам и рассеивать подобно средам с вязкими свойствами. Такие среды (материалы) называются *вязкоупругими*. Более точное исследование с помощью математических методов процесса распространения электромагнитных, акустических и упругих волн в вязкоупругих средах требует учета памяти (предыстории) процесса. Для электромагнитных волн это связано с явлением дисперсии волн, а для акустических и упругих волн — с наличием вязкости среды. Сама теория линейной вязкоупругости достаточно развита и доступна для широкого применения (см. [1–4] и цитированную там литературу). Но, как отмечается в работе [5], «многие математические свойства линейного определяющего соотношения вязкоупругости — даже напрямую связанные с моделированием классических реологических эффектов и типичных кривых поведения материалов — еще малоизвестны, полный арсенал возможностей линейной теории не выявлен, область ее адекватности до сих пор не очерчена достаточно четко и явно, а компьютерное моделирование нередко остается без необходимого фундамента».

Необходимость разработки методов решения обратных задач теории волновых процессов в вязкоупругих средах обуславливает актуальность данного исследования.

Статья обобщает результаты работы [6] на случай матричного ядра. В ней определялось одномерное скалярное ядро интегрального оператора типа свертки, входящего в систему изотропной вязкоупругости для сосредоточенного источника возмущений, локализованного на границе рассматриваемой области. При этом в качестве дополнительной информации задавался след решения прямой задачи на поверхности $x_3 = 0$. В работах [6–9] приводится подробный обзор имеющихся публикаций по данному направлению исследований. Можно добавить к имеющемуся обзору работы [10, 11], в которых решены задачи по определению скалярных ядер для интегро-дифференциальных уравнений акустики и SH-волн в вязкоупругой пористой среде соответственно. Работы [12, 13] содержат результаты по определению матричных ядер для системы уравнений анизотропной вязкоупругости для однородной среды и для случая изотропной вязкоупругости с источником возмущения типа направленного взрыва для неоднородной среды.

Полная система дифференциальных уравнений для неоднородной анизотропной вязкоупругой среды состоит из следующих уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\rho = \rho(x)$ — плотность неоднородной среды, $\rho(x) > 0$, $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений.

В вязкоупругих материалах для тензора напряжений имеют место представления:

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl}\left[S_{kl} + \int\limits_0^t K_i(t-\tau)S_{kl}(x,\tau)\,d\tau\right], \quad i = 1, 2, 3, \;\; j = 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

где

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \quad k = 1, 2, 3, \;\; l = 1, 2, 3,$$

$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — модули упругости, $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$ — функция релаксации среды. Симметричность тензора напряжений уменьшает число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$, где $\alpha = (ij)$ и $\beta = (kl)$, в соответствии с обозначениями $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$, $(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$, то матрице независимых модулей упругости можно придать вид симметрической матрицы порядка 6×6, поскольку в паре индексов (i, j) порядок не играет роли и существует только шесть различных парных комбинаций. Будем рассматривать анизотропные среды с матрицей независимых модулей упругости следующего вида:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{matrix} & \mathrm{O}_{(3\times 3)} \\ \mathrm{O}_{(3\times 3)} & \begin{matrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $x_3 > 0$, систему интегро-дифференциальных уравнений динамической вязкоупругости (1.1)–(1.2)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \ x_3 > 0, \tag{2.1}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_j\big|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

$$T_{j3}\big|_{x_3=+0} = f_j(x_1, t), \quad j = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Далее предполагаем, что модули упругости c_{11}, c_{12}, c_{44} и плотность ρ являются функциями только одной переменной x_3, а вектор-функция $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \rho)$ принадлежит классу $\Lambda(m)$, $m = \mathrm{const}$:

$$\begin{aligned} \Lambda(m) = \Big\{ &(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), \rho(x_3)) : \\ &c_{11} \geqslant m > 0, \ c_{44} \geqslant m > 0, \ c_{11} > c_{12}, \ c_{11} + 2c_{12} > 0, \ \rho \geqslant m > 0, \\ &c'_{11}(+0) = 0, \ c'_{44}(+0) = 0, \ \rho'(+0) = 0, \\ &c_{11}, c_{44}, \rho \in C^2(\mathbb{R}_+), \ c_{12} \in C(\mathbb{R}_+) \Big\}, \quad \mathbb{R}_+ := [0, \infty). \end{aligned}$$

Определим билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L[K(t), u(x,t)] = u(x,t) + \int_0^t K(t-\tau) u(x,\tau)\, d\tau$$

(здесь $K(t)$, $u(x,t)$ – скалярные функции). В дальнейшем для сокращения записи иногда не будем в операторе L указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой — от t, а второй — от x, t.

Равенства (2.1)–(2.3) для анизотропных сред с матрицей (1.3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = L\Big[K_1, &\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) + c_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ &+ c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\Big], \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = L\Big[K_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\Big], \tag{2.5}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = L\Big[K_3, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\Big], \tag{2.6}$$

$$L\left[K_1, c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = f_1(x_1,t), \tag{2.7}$$

$$L\left[K_2, c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = f_2(x_1,t), \tag{2.8}$$

$$L\left[K_3, c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = f_3(x_1,t), \tag{2.9}$$

$$u_i\big|_{t<0} \equiv 0, \quad i = 1,2,3. \tag{2.10}$$

Задачу определения вектора смещения $u(x,t)$, удовлетворяющего (в обобщенном смысле) равенствам (2.1)–(2.3) при заданных функциях $\rho(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $K_j(t)$, $f_j(x_1,t)$, $j = 1,2,3$, будем называть *прямой задачей*.

Замечание. Так как коэффициенты уравнений и граничные условия в системе (2.4)–(2.10) не зависят от переменной x_2, то решение прямой задачи u также не будет зависеть от x_2 [14].

Запишем соотношения (2.4)–(2.10) в терминах преобразования Фурье по переменной x_1. Имеем

$$\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = L\Big[K_1, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{12}\frac{\partial U_3}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}U_3\right) - \nu^2 c_{11}U_1\Big], \tag{2.11}$$

$$\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = L\Big[K_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) - \nu^2 c_{44}U_2\Big], \tag{2.12}$$

$$\rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = L\Big[K_3, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}U_1\right) - \nu^2 c_{44}U_3\Big], \tag{2.13}$$

$$L\left[K_1, ic_{44}\nu U_3 + c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = F_1(\nu,t), \tag{2.14}$$

$$L\left[K_2, c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = F_2(\nu,t), \tag{2.15}$$

$$L\left[K_3, i\nu c_{12}U_1 + c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = F_3(\nu,t), \tag{2.16}$$

$$U_j\big|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1,2,3, \tag{2.17}$$

где

$$U_j(x_3,t,\nu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_3,t)\exp(i\nu x_1)\,dx_1,\quad j=1,2,3,$$

$$F_j(t,\nu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(x_1,t)\exp(i\nu x_1)\,dx_1,\quad j=1,2,3,$$

ν — параметр, функции $U_j,\phi\in C^1(\mathbb{R};C(\widetilde{D}))$, $\widetilde{D}=\{(x_3,t):\ x_3\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $T>0$.

Систему (2.11)–(2.17) можно рассматривать как совокупность двух подсистем. Первая включает равенства (2.11), (2.13), (2.14), (2.16), (2.17) и определяет функции U_1 и U_3. Вторая — (2.12), (2.15), (2.17) определяет функцию U_2.

Обратная задача. Пусть

$$f_j(x_1,t)=\delta'(t)\delta(x_1),\quad j=1,2,3;$$

где $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака, $\delta(x_1)$ — дельта-функция Дирака. Определить ядро $K(t)=\operatorname{diag}(K_1,K_2,K_3)(t)$, $t>0$, входящее в равенства (2.1) посредством формулы (1.2), если относительно вектор-функции (U_1,U_2,U_3) решения прямой задачи известна дополнительная информация

$$U_j(x_3,t,\nu)|_{x_3=+0,\,\nu=+0}=g_j(t),\quad t>0,\ j=1,2,3, \tag{2.18}$$

где $g_j(t)$ — заданные функции.

3. Решение обратной задачи

Из равенств (2.11)–(2.17) для функций

$$U_j^1=U_j(x_3,t,\nu)\,|_{\nu=+0},\quad j=1,2,3,$$

получаем независимо решаемые задачи (3.1)–(3.2), (3.3)–(3.4) и (3.5)–(3.6)

$$\rho\frac{\partial^2U_1^1}{\partial t^2}=L\Big[K_1,\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\Big)\Big], \tag{3.1}$$

$$U_1^1\big|_{t<0}\equiv 0,\quad L\left[K_1,c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=+0}=\delta'(t), \tag{3.2}$$

$$\rho\frac{\partial^2U_2^1}{\partial t^2}=L\Big[K_2,\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(c_{44}\frac{\partial U_2^1}{\partial x_3}\Big)\Big], \tag{3.3}$$

$$U_2^1\big|_{t<0}\equiv 0,\quad L\left[K_2,c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=+0}=\delta'(t), \tag{3.4}$$

$$\rho\frac{\partial^2U_3^1}{\partial t^2}=L\Big[K_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\Big)\Big], \tag{3.5}$$

$$U_3^1\big|_{t<0}\equiv 0,\quad L\left[K_3,c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=+0}=\delta'(t). \tag{3.6}$$

Введем в рассмотрение новые переменные y, z по формулам

$$y = \psi_1(x_3) := \int\limits_0^{x_3} \frac{d\xi}{\mathrm{v}_1(\xi)}, \quad \mathrm{v}_1(x_3) := \sqrt{\frac{c_{44}(x_3)}{\rho(x_3)}},$$

$$z = \psi_2(x_3) := \int\limits_0^{x_3} \frac{d\xi}{\mathrm{v}_2(\xi)}, \quad \mathrm{v}_2(x_3) := \sqrt{\frac{c_{11}(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через ψ_j^{-1} обозначим функцию, обратную к ψ_j, $j = 1, 2$.

Пусть

$$v_i(y,t) := \frac{U_i^1\left(\psi_1^{-1}(y), t\right)}{s(y)}, \quad i = 1, 2; \quad s(y) := \sqrt{\frac{\mathrm{v}_1(+0)\rho(+0)}{\mathrm{v}_1\left(\psi_1^{-1}(y)\right)\rho\left(\psi_1^{-1}(y)\right)}},$$

$$v_3(z,t) := \frac{U_3^1\left(\psi_2^{-1}(z), t\right)}{p(z)}, \quad p(z) := \sqrt{\frac{\mathrm{v}_2(+0)\rho(+0)}{\mathrm{v}_2\left(\psi_2^{-1}(z)\right)\rho\left(\psi_2^{-1}(z)\right)}}.$$

Тогда обратная задача в терминах вновь введенных функций и переменных y, z приводится к задаче определения матричного ядра $K(t) = \mathrm{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} = L\left[K_j, \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + q(y)v_j\right], \quad y > 0, \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

$$L\left[K_j, \frac{\partial v_j(y,t)}{\partial y}\right]_{y=+0} = a\delta'(t), \quad j = 1, 2, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = L\left[K_3, \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \tilde{q}(z)v_3\right], \quad z > 0, \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

$$L\left[K_3, \frac{\partial v_3(z,t)}{\partial z}\right]_{z=+0} = b\delta'(t), \tag{3.10}$$

$$v_j\big|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.11}$$

$$v_j(+0,t) = g_j(t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.12}$$

где

$$q(y) := \frac{s''(y)}{s(y)} - 2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2, \quad \tilde{q}(z) := \frac{p''(z)}{p(z)} - 2\left[\frac{p'(z)}{p(z)}\right]^2,$$

$$a := \left[c_{44}(+0)\rho(+0)\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad b := \left[c_{11}(+0)\rho(+0)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Задача (3.7)–(3.12) распадается на три независимые задачи по определению $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K_3(t)$ соответственно. Решение каждой задачи может быть проведено аналогично исследованию обратной задачи, изученной в [6].

Таким образом, из [6] следует справедливость следующих теорем однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения матричного ядра (доказательство проводится по аналогии для каждого элемента $K_i(t)$, $i = 1, 2, 3$):

Теорема 1. *Пусть функция $g_j(t)$ представима в виде*

$$g_j(t) = A_j\delta(t) + \theta(t)g_{0j}(t), \quad (A_1, A_2, A_3) := (a, a, b)$$

и $g_{0j}(t) \in C^2[0,\ T]$, $j = 1,2,3$; $\theta(t)$ *— функция Хевисайда. Кроме того,* $(\rho, c_{44}) \in C^3\left[0, \psi_1^{-1}(T/2)\right]$, $c_{11} \in C^3\left[0, \psi_2^{-1}(T/2)\right]$. *Тогда существует единственное решение обратной задачи* $K(t) = \mathrm{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $t \in C^2[0,T]$, *при любом фиксированном* $T > 0$.

Пусть $\Gamma(h_0)$ — множество скалярных функций $K(t) \in C^2[0,T]$, удовлетворяющих для $t \in [0,T]$ неравенству $\|K(t)\|_{C^2[0,T]} \leqslant h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0. Эта постоянная определена в [6].

Теорема 2. *Пусть* $K(t) = \mathrm{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $K^*(t) = \mathrm{diag}(K_1^*, K_2^*, K_3^*)(t)$, $K_j(t), K_j^*(t) \in \Gamma(h_{0j})$, $j = 1,2,3$, *— решения обратной задачи с набором данных*

$$\left\{\rho(\psi_1^{-1}(y)),\ c_{44}(\psi_1^{-1}(y)),\ c_{11}(\psi_2^{-1}(z)),\ g_{0j}(t)\right\},$$

$$\left\{\rho^*(\psi_1^{-1}(y)),\ c_{44}^*(\psi_1^{-1}(y)),\ c_{11}^*(\psi_2^{-1}(z)),\ g_{0j}^*(t)\right\}$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(m, h_0, h_{00}, T)$,

$$h_{00} = \max\Big\{\|\rho\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]},\ \|c_{44}\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]},\ \|c_{11}\|_{C^3\left[0,\psi_2^{-1}(T/2)\right]},\ \|g_{0j}(t)\|_{C^2[0,T]},$$
$$\|\rho^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]},\ \|c_{44}^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]},\ \|c_{11}^*\|_{C^3\left[0,\psi_2^{-1}(T/2)\right]},\ \|g_{0j}^*(t)\|_{C^2[0,T]}\Big\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\sum_{j=1}^{3}\|K_j(t) - K_j^*(t)\|_{C^3[0,T]} \leqslant C\Big[\|\rho - \rho^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]}$$
$$+ \|c_{11} - c_{11}^*\|_{C^3\left[0,\psi_2^{-1}(T/2)\right]} + \sum_{j=1}^{3}\|g_{0j} - g_{0j}^*\|_{C^2[0,T]}\Big].$$

$\lhd$ Из [6] следуют оценки

$$\|K_1(t) - K_1^*(t)\|_{C^2[0,T]} \leqslant C\Big[\|\rho - \rho^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]}\|g_{01} - g_{01}^*\|_{C^2[0,T]}\Big],$$

$$\|K_2(t) - K_2^*(t)\|_{C^2[0,T]} \leqslant C\Big[\|\rho - \rho^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]}\|g_{02} - g_{02}^*\|_{C^2[0,T]}\Big],$$

$$\|K_3(t) - K_3^*(t)\|_{C^2[0,T]} \leqslant C\Big[\|\rho - \rho^*\|_{C^3\left[0,\psi_1^{-1}(T/2)\right]} + \|c_{11} - c_{11}^*\|_{C^3\left[0,\psi_2^{-1}(T/2)\right]} + \|g_{03} - g_{03}^*\|_{C^2[0,T]}\Big].$$

Складывая почленно эти неравенства, мы получаем требуемую оценку. $\rhd$

Литература

1. *Кристенсен Р. М.* Введение в теорию вязкоупругости.—М.: Мир, 1974.—340 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел.—М.: Наука, 1977.—384 с.
3. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1988.—712 с.
4. *Pipkin A. C.* Lectures on Viscoelasticity Theory.— Berlin: Springer, 1986.—199 p.
5. *Хохлов А. В.* Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана.—2016.— № 5.—С. 187–245.
6. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
7. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 4.—С. 18–43. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5969.

8. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра электровязкоупругости // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 553–572. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.307.
9. *Тотиева Ж. Д., Дурдиев Д. К.* Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, № 1.—С. 129–146. DOI: 10.4213/mzm10752.
10. *Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 1.—С. 136–147.
11. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теор. и мат. физика.—2018.—Т. 195, № 3.—С. 491–506. DOI: 10.4213/tmf9480.
12. *Durdiev D. K., Durdiev U. D.* The problem of kernel determination from viscoelasticity system integro-differential equations for homogeneous anisotropic media // Наносистемы: физика, химия, математика.—2016.—Т. 7, № 3.—С. 405–409. DOI: 10.17586/2220-8054-2016-7-3-405-409.
13. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci.—2018.—Vol. 17, № 17.—P. 8019–8032. DOI: 10.1002/mma.5267.
14. *Туаева Ж. Д.* Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Исслед. по диф. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 297–306.

Статья поступила 14 июня 2018 г.

Тотиева Жанна Дмитриевна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела математического моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 2, P. 58–66

THE PROBLEM OF DETERMINING THE MATRIX KERNEL OF THE ANISOTROPIC VISCOELASTICITY EQUATIONS SYSTEM

Totieva, Zh. D.[1,2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

Abstract. We consider the problem of determining the matrix kernel $K(t) = \operatorname{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $t > 0$, occurring in the system of integro-differential viscoelasticity equations for anisotropic medium. The direct initial boundary value problem is to determine the displacement vector function $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)(x,t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $x_3 > 0$. It is assumed that the coefficients of the system (density and elastic modulus) depend only on the spatial variable $x_3 > 0$. The source of perturbation of elastic waves is concentrated on the boundary of $x_3 = 0$ and represents the Dirac Delta function (Neumann boundary condition of a special kind). The inverse problem is reduced to the previously studied problems of determining scalar kernels $K_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. As an additional condition, the value of the Fourier transform in x_2 of the function $u(x,t)$ is given on the surface $x_3 = 0$. Theorems of global unique solvability and stability of the solution of the inverse problem are given. The idea of proving global solvability is to apply the contraction mapping principle to a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind in a weighted Banach space.

Key words: inverse problem, stability, delta function, elastic moduli, coefficients, matrix kernel.

Mathematical Subject Classification (2010): 35L20, 35R30, 35Q99.

For citation: *Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the Matrix Kernel of the Anisotropic Viscoelasticity Equations System, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 58–66 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32117.

References

1. *Kristensen, R. M. Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti* [Introduction to the Theory of Viscoelasticity], Moscow, Mir, 1974, 340 p. (in Russian).
2. *Rabotnov, Yu. N. Elementy nasledstvennoj mekhaniki tverdyh tel* [Elements of Hereditary Mechanics of Solids], Moscow, Nauka, 1977, 384 p. (in Russian).
3. *Rabotnov, Yu. N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Solid], Moscow, Nauka, 1988, 712 p. (in Russian).
4. *Pipkin, A. C. Lectures on Viscoelasticity Theory*, Berlin, Springer, 1986, 199 p.
5. *Khohlov, A. V.* The Qualitative Analysis of Theoretic Curves Generated by Linear Viscoelasticity Constitutive Equation, *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N. E. Baumana* [Sience and Education], 2016, no. 5, pp. 187–245.
6. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Viscoelasticity Equation, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 72–82 (in Russian).
7. *Durdiev, D. Q., Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the Multidimensional Kernel of Viscoelasticity Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, vol. 17, no. 4, pp. 18–43. (in Russian). DOI 10.23671/VNC.2015.4.5969.
8. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Electroviscoelasticity Equation, *Siberian Mathematical J.*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 427–444. DOI: 10.1134/S0037446617030077.
9. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Finding the One-Dimensional Kernel of the Thermoviscoelasticity Equation, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 1–2, pp. 118–132. DOI: 10.1134/S0001434618010145.
10. *Safarov, Zh. Sh. and Durdiev, D. K.* Inverse Problem for Integro-Differential Equation of Acoustics, *Differencial'nye uravnenija* [Differential Equations], 2018, vol. 54, no. 1, pp. 136–147 (in Russian).
11. *Durdiev, D. K. and Rahmonov, A. A.* Inverse Problem for A System of Integro-Differential Equations for SH Waves in a Visco-Elastic Porous Medium: Global Solvability, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 195, no. 3, pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0040577918060090.
12. *Durdiev, D. K. and Durdiev, U. D.* The Problem of Kernel Determination from Viscoelasticity System Integro-Differential Equations for Homogeneous Anisotropic Media, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2016, vol. 7, no. 3, pp. 405–409.
13. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the One-Dimensional Matrix Kernel of the System of Viscoelasticity Equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 17, no. 17, pp. 8019–8032. DOI: 10.1002/mma.5267.
14. *Tuaeva, Zh. D.* Multidimensional Mathematical Model of Seismic Memory, *Issledovaniya po differencial'nym uravneniyam i matematicheskomu modelirovaniyu* [Research on Differential Equations and Mathematical Modeling], Vladikavkaz, VNC RAN, 2008, pp. 297–306 (in Russian).

Received June 14, 2018

Zhanna D. Totieva
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Senior Researcher of the Department of Math. Modeling;
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Math. Analysis
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`