Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 43–49

УДК 519.17
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23386

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(117, 36, 15, 9)$

А. К. Гутнова[1], **А. А. Махнев**[2]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46;
[2] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

E-mail: gutnovaalina@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Аннотация. В предшествующих работах авторов найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-3}(s,t)$. В частности, локально псевдо $pG_2(5,2)$-граф является сильно регулярным графом с параметрами $(117, 36, 15, 9)$. Основным результатом данной статьи является теорема, в которой найдены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$. Этот граф имеет спектр $36^1, 9^26, -3^90$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 + 36/3 = 13$, порядок коклики в Γ не превосходит $117 \cdot 3/39 = 9$. Далее из этого результата выведено следствие, что если группа G автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ действует транзитивно на множестве вершин, то цоколь T группы G изоморфен либо $L_3(3)$ и $T_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $T \cong L_4(3)$ и $T_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 43–49. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23386.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

В работах А. А. Махнева и А. К. Гутновой [1–3] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графамии для $pG_{s-3}(s,t)$. В частности, локально псевдо $pG_2(5,2)$-граф является сильно регулярным графом с параметрами $(117,36,15,9)$.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы для сильно регулярного графа с параметрами $(117,36,15,9)$. Этот граф имеет спектр $36^1, 9^{26}, -3^{90}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1+36/3=13$, порядок коклики в Γ не превосходит $117\cdot 3/39=9$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с параметрами* $(117,36,15,9)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g\in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности 26, то* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_1(g)/3-13)/4$. *Если* $|g|=p$ *— простое число, то* $\chi_1(g)-26$ *делится на* p. *Если* $|g|=p^2$, p *— простое число, то* p^2 *делит* $\chi_1(g^p)-26$.

$\lhd$ Имеем

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 26 & 13/2 & -13/4\\ 90 & -15/2 & 9/4\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g)=(8\alpha_0(g)+2\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/36$. Подставляя $\alpha_2(g)=117-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_1(g)/3-13)/4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с параметрами* $(117,36,15,9)$, A *— трехвершинный подграф из* Γ, y_i *— число вершин из* $\Gamma-A$, *смежных точно с* i *вершинами из* A. *Если* A *— коклика, то* $y_0=33-y_3$, *если* A *— объединение изолированной вершины и ребра, то* $y_0=40-y_3$, *если* A *— геодезический путь, то* $y_0=47-y_3$, *а если* A *— клика, то* $y_0=54-y_3$.

$\lhd$ Пусть A — коклика. Тогда $y_1=54+3y_3$, $y_2=27-3y_3$ и $y_0=33-3y_3$. Пусть A — клика. Тогда $y_1=18+3y_3$, $y_2=42-3y_3$ и $y_0=54-3y_3$. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи. $\rhd$

Пусть до конца работы Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(117,36,15,9)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что если a, b — две вершины из Ω и $p>13$, то $[a]\cap[b]\subset\Omega$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *в* Γ *нет собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v',k',15,9)$;

(2) *если* Ω *— пустой граф, то* $p=13$, $\alpha_1(g)=39$ *и* $\alpha_2(g)=78$ *или* $p=3$, $\alpha_1(g)=36l-9$ *и* $\alpha_2(g)=126-36l$;

(3) *если* Ω *является* n*-кликой, то* $n>1$ *и либо* $p=5$, $n=2,7,12$, $\alpha_1(g)=60l+75-15n$ *и* $\alpha_2(g)=42+14n-60l$, *либо* $p=2$, $n=5,7,9,11,13$, $\alpha_1(g)=24l+39-3n$ *и* $\alpha_2(g)=78+2n-24l$;

(4) *если* Ω *не является кликой или пустым графом, то* Ω *содержит геодезический 2-путь и* $p\leqslant 13$.

$\lhd$ Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',15,9)$. Так как $n^2=36+4(k'-9)$, то $n=2u, k'=u^2$ и Δ имеет собственные значения $u+3$, $-(u-3)$. Кратность $u+3$ равна $(u-4)u(u^2+u-3)/18$, поэтому $u\geqslant 6$.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $117=13\cdot 9$, то $p\in\{3,13\}$. Положим $\alpha_i(g)=pw_i$. Пусть $p=13$. Тогда $\chi_1(g)=13(w_1/3-1)/4$, поэтому $\alpha_1(g)=39$ и $\alpha_2(g)=78$. Пусть

$p = 3$. Тогда $\chi_1(g) = (w_1 - 13)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и $\alpha_2(g) = 126 - 36l$.

Пусть Ω является n-кликой, a — вершина из Ω. Если $n = 1$, то p делит 36 и 80, поэтому $p = 2$, противоречие с тем, что для вершины $u \in \Gamma - a^\perp$, подграф $[u] \cap [u^g]$ пересекает Ω.

Если $n > 1$, то p делит 20, 50 и $17 - n$, поэтому либо $p = 5$ и $n = 2, 7, 12$, либо $p = 2$ и $n = 3, 5, \ldots, 13$. В любом случае $\chi_1(g) = (n + pw_1/3 - 13)/4$.

В случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$. В случае $p = 2$ число $(n + 2w_1/3 - 13)/4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$. Если $n = 3$, то некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ не смежна с вершинами из Ω, противоречие.

Пусть Ω является m-кликой, $m > 1$. Тогда p делит 9 и 26, противоречие.

Пусть Ω содержит ребро и является обьединением $t \geqslant 2$ изолированных клик. Тогда p делит 9 и 20, противоречие.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Если $p > 13$, то Ω — сильно регулярный граф с $\lambda = 15$ и $\mu = 9$, противоречие с утверждением (1). $\triangleright$

Лемма 4. *Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит вершину a степени 36, то либо $p = 3$ и $\alpha_0(g) = 45$, либо $p = 2$, $37 \leqslant \alpha_0(g) \leqslant 63$ и число $\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13$ делится на 8;*

(2) *p не больше 7;*

(3) *если $p = 7$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами* $(26, 15, 8, 9)$ *и* $\alpha_1(g) = 24$.

$\triangleleft$ Пусть Ω содержит вершину a степени 36. Ввиду леммы 2 любая $\langle g\rangle$-орбита длины p не содержит 3-коклик. Так как любая вершина из $\Gamma - a^\perp$ смежна с 9 вершинами из $[a]$, то любая $\langle g\rangle$-орбита длины p не содержит геодезических 2-путей. Если $p > 2$, то любая $\langle g\rangle$-орбита длины p является кликой и $p \leqslant 7$. В этом случае

$$\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + (117 - \alpha_0(g))/3 - 13)/4,$$

поэтому $\alpha_0(g) = 6l + 3$ для $p > 3$ и $\alpha_0(g) = 18l + 9$ для $p = 3$. Отсюда $p = 3$ и $\alpha_0(g) = 45$.

Если $p = 2$, то число $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ четно. Утверждение (1) доказано.

Пусть $p = 13$. Тогда $\lambda_\Omega = 2, 15$, $\mu_\Omega = 9$, $|\Omega| = 13, 26, 39, 52$ и степени вершин в Ω равны 10, 23. Если $|\Omega| = 13$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(13, 10, 2, 9)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 26$. Если Ω содержит вершину a степени 23, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно 18, но не меньше $23 \cdot 7$, противоречие. Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 10, 2, 9)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 39$. Если Ω содержит вершину a степени 10, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 9$, но не больше $20 \cdot 10$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 23, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 52$. Если Ω содержит вершину a степени 10, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $41 \cdot 9$, но не больше $10 \cdot 21$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 23, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 9 = 20y + 7(23 - y)$, поэтому $y = 13$. Но если b, c — две вершины степени 2 в графе $\Omega(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит 13 вершин из $[a] - \Omega$ и не менее 12 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $\lambda_\Omega = 4, 15$, $\mu_\Omega = 9$, $|\Omega| = 18, 29, 40, 51$ и степени вершин в Ω равны 14, 25. Если Ω содержит вершину a степени 14, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $14 \cdot 9$, равно $9(|\Omega| - 15)$, но не больше $14 \cdot 20$, поэтому $|\Omega| = 40$ и указанное число равно $9 \cdot 25 = 20y + 9(14 - y)$. $y = 9$. Но если b, c — две вершины из $\Omega(a)$, смежные с 20 вершинами из $\Omega_2(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит a и не менее 15 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Значит, Ω — регулярный граф степени 25, $|\Omega| = 40$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $14 \cdot 9$, но не меньше $9 \cdot 25$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 8, 15$, $\mu_\Omega = 2, 9$, $|\Omega| = 19, 26, 33, 40, 47, 54$ и степени вершин в Ω равны $8, 15, 22, 29$. Если $|\Omega| > 33$, то любая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 не содержит 3-коклик. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ и в случае $\alpha_0(g) = 40$ имеем $\alpha_1(g) = 63$. В этом случае на $\Gamma - \Omega$ имеется 5 кликовых $\langle g\rangle$-орбит и 6 орбит степени 4. Противоречие с тем, что для ребра и изолированной от него вершины из $\langle g\rangle$-орбиты степени 4, подграф, состоящий из вершин, смежных с 0 или 3 вершинами из этой тройки, содержит 40 вершин из Ω и 2 вершины из этой $\langle g\rangle$-орбиты, противоречие. В случае $\alpha_0(g) = 47$ имеем $\alpha_1(g) = 42$. В этом случае для геодезического 2-пути из $\langle g\rangle$-орбиты подграф, состоящий из вершин, смежных с 0 или 3 вершинами из этой тройки, содержит 47 вершин из Ω и 2 вершины из этой $\langle g\rangle$-орбиты, противоречие. В случае $\alpha_0(g) = 54$ имеем $\alpha_1(g) = 63$ и $\chi_1(g) = (41 + 21)/4$, противоречие.

Значит, $|\Omega| \leqslant 33$. Если Ω содержит вершину a степени 8, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $8 \cdot 6$ и равно $2(|\Omega| - 9)$, поэтому $|\Omega| = 33$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(33, 8, 1, 2)$. В этом случае Ω имеет собственные значения 2, -3 и кратность 2 равна $2 \cdot 8 \cdot 11/10$, противоречие.

Если Ω содержит вершину a степени 22, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $22 \cdot 6$ и не больше $10 \cdot 9$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 15, $|\Omega| = 26$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $15 \cdot 6 = 10 \cdot 9$. Отсюда Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ и $\chi_1(g) = (13 + \alpha_1(g)/3)/4$, поэтому $\alpha_1(g) = 24$. $\triangleright$

Лемма 5. *Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *число p не равно 5;*

(2) *если $p = 3$, то $|\Omega| \leqslant 33$ или $|\Omega| = 45$;*

(3) *если $p = 2$, то $|\Omega| \leqslant 63$.*

$\triangleleft$ Пусть $p = 5$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 5, 10, 15$, $\mu_\Omega = 4, 9$, $|\Omega| = 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$, степени вершин в Ω равны $6, 11, 16, 21, 26, 31$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$.

Пусть Y — множество вершин из $\Omega_2(a)$, смежных с 9 вершинами из $\Omega(a)$, $y = |Y|$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6|\Omega(a)| + 5x$. С другой стороны, указанное число ребер равно $9y + 4(|\Omega_2(a)| - y)$ и делится на 5, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 3, \ldots, 15$, $\mu_\Omega = 0, 3, 6, 9$, $|\Omega| = 6, 9, \ldots, 54$ и степени вершин в Ω равны $0, 3, 6, \ldots, 36$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$, поэтому $(\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3.

Если $|\Omega| > 33$, то ввиду леммы 2 любая $\langle g\rangle$-орбита длины 3 является кликой, $\alpha_1(g) = 117 - \alpha_0(g)$ и $(2\alpha_0(g)/3 + 26)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3. Поэтому $\alpha_0(g) = 45$ и $\alpha_1(g) = 72$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 3, \ldots, 15$, $\mu_\Omega = 1, 3, \ldots, 9$, $|\Omega| = 5, 7, \ldots, 65$ и степени вершин в Ω равны $0, 2, 4, \ldots, 36$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$, поэтому $(\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ четно.

Если $|\Omega| > 63$, то любая $\langle g\rangle$-орбита длины 2 является кликой, $\alpha_1(g) = 117 - \alpha_0(g) = 52$ и $\chi_1(g) = (65 + 52/3 - 13)/4$, противоречие. $\triangleright$

Лемма 6. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами* $(117, 36, 15, 9)$ *и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Пусть f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p < 13$ из $C_G(f)$. Тогда $|C_G(f)|$*

делит 26 и если инволюция $g \in G$ централизует f, то $\mathrm{Fix}(g)$ *является 13-кокликой и* $\alpha_1(g) = 0$.

$\lhd$ $|G|$ делится на $9 \cdot 13$. По теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$.

Пусть G содержит подгруппу $\langle h \rangle$ порядка $13p$, p — простое число, меньшее 11, $g = h^{13}$, $f = h^p$. Ввиду теоремы 1 $\mathrm{Fix}\,(f)$ — пустой граф, $p = 2$ и либо $|\Omega| = 13$ и $\alpha_1(g) = 24l$ делится на 13, либо $|\Omega| = 39$. В последнем случае $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)/3 + 26)/4$, число $(\alpha_1(g)/3 + 26)/4$ четно и $\alpha_1(g) = 3(8l - 26)$ делится на 13, противоречие. Из действия g на $U_i = \{u \in \Gamma : d(u, u^{f^i}) = 1\}$ следует, что $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$ пересекает U_i для любого i, не кратного 13, поэтому Ω является 13-кокликой.

Пусть V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$. Так как $\chi_1(g) - 26$ не делится на 4, то V — элементарная абелева группа. Из действия V на $U = \{u \in \Gamma : d(u, u^f) = 1\}$ следует, что $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$ содержится в U для любой инволюции $g \in V$, противоречие с действием V на $W = \{w \in \Gamma : d(w, w^f) = 2\}$. $\rhd$

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(117, 36, 15, 9)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p = 13$, $\alpha_1(g) = 39$ и $\alpha_2(g) = 78$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и $\alpha_2(g) = 126 - 36l$;*

(2) *Ω является n-кликой, и либо $p = 5$, $n = 2, 7, 12$, $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$, либо $p = 2$, $n = 5, 7, 9, 11, 13$, $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$;*

(3) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(i) $p = 7$, Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ и $\alpha_1(g) = 24$, либо

(ii) $p = 3$, $|\Omega| \leqslant 33$ или $|\Omega| = 45$, либо

(iii) $p = 2$ и $|\Omega| \leqslant 63$.

$\lhd$ Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств

$W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Утверждения 1)–2) следуют из леммы 3. Доказательство утверждения 3) следует из лемм 3–5. ▷

Следствие 1. *Если группа G автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ действует транзитивно на множестве вершин, то цоколь T группы G изоморфен либо $L_3(3)$ и $T_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $T \cong L_4(3)$ и $T_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.*

◁ Ввиду леммы 6 имеем $S(G) = O_3(G)$. Пусть $\overline{G} = G/O_3(G)$, $\overline{T}$ — цоколь группы $\overline{G}$. Из действия подгруппы порядка 13 на минимальной нормальной подгруппе $\overline{N}$ из $\overline{G}$ следует, что $|\overline{N}|$ делится на 13. Отсюда $\overline{T}$ — простая неабелева группа и ввиду [6, таблица 1] группа $\overline{T}$ изоморфна $L_3(3)$, $L_2(25)$, $U_3(4)$, $PSp_4(5)$, $L_4(3)$, ${}^2F_4(2)'$, $L_2(13)$, $L_2(27)$, $G_2(3)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(8)$, $L_2(64)$, $U_4(5)$, $L_3(9)$, $PSp_6(3)$, $P\Omega_7(3)$, $G_2(4)$, $PSp_4(8)$, $P\Omega_8^+(3)$.

Так как $\overline{T}$ содержит максимальную подгруппу индекса, делящего $13 \cdot 9$, то либо $\overline{T} \cong L_3(3)$ и $\overline{T}_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $\overline{T} \cong L_4(3)$ и $\overline{T}_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.

В любом случае $O_3(G) = 1$. ▷

Литература

1. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s,t)$ // Докл. АН.—2014.—Т. 454, № 2.—С. 145–148. DOI: 10.7868/S0869565214020042.
2. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Локально псевдо $GQ(4,t)$-графы // Докл. АН.—2015.—Т. 462, № 6.—С. 637–641. DOI: 10.7868/S086956521518005X.
3. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Графы диаметра, не большего 3, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s,t)$// Докл. АН.—2015.—Т. 461, № 6.—С. 629–632. DOI: 10.7868/S0869565215120038.
4. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts № 45).
5. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.–2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
6. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 29 мая 2018 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 43–49

ON AUTOMORPHISMS OF A STRONGLY REGULAR GRAPH WITH PARAMETERS $(117, 36, 15, 9)$

Gutnova, A. K.[1] and Makhnev, A. A.[2]

[1] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja st., Ekaterinburg 620990, Russia
E-mail: gutnovaalina@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Abstract. In the previous work of the authors some arrays of intersections of distance-regular graphs were found, in which the neighborhoods of the vertices are pseudogeometric graphs for $pG_{s-3}(s,t)$. In particular, a locally pseudo $pG_2(5,2)$-graph is a strongly regular graph with parameters $(117, 36, 15, 9)$. The main result of this paper gives a description of possible orders and the structure of the subgraphs of fixed points of automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(117, 36, 15, 9)$. This graph has a spectrum of $36^1, 9^26, -3^90$. The order of clicks in Γ does not exceed $1 + 36/3 = 13$, the order of the cocliques in Γ does not exceed $117 \cdot 3/39 = 9$. Further, from this result, the following corollary is derived: if the group Γ of automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(117, 36, 15, 9)$ acts transitively on the set of vertices, then the socle T of the group Γ is isomorphic to either $L_3(3)$ and $T_a \cong GL_2(3)$ is a subgroup of index 117, or $T_a \cong GL_2(3)$ and $T_a \cong U_4(2).Z_2$ is a subgroup of index 117.

Key words: strongly regular graph, symmetric graph, automorphism groups of a graph.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

For citation: *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of a Strongly Regular Graph with Parameters $(117, 36, 15, 9)$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 43–49 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23386.

References

1. *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* Completely Regular Graphs in Which Neighborhoods of Vertices are Pseudogeometric Graphs for $pG_{s-3}(s,t)$, *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 2, pp. 145–148 (in Russian). DOI: 10.7868/S0869565214020042.
2. *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* Locally Pseudo $GQ(4,t)$-Graphs, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 462, no. 6, pp. 637–641 (in Russian). DOI: 10.7868/S086956521518005X.
3. *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* Graphs of Diameter not Greater than 3, in Which Neighborhoods of Vertices are Pseudogeometric Graphs for $pG_{s-3}(s,t)$, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 461, no. 6, pp. 629–632 (in Russian). DOI: 10.7868/S0869565215120038.
4. *Cameron, P. J. Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts, no.* 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
5. *Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of Amply Regular Graphs with the Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Mathematics*, vol. 432, no. 5, pp. 512–515. (in Russian).
6. *Zavarnitsine, A. V.* Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Sibirean Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received May 29, 2018

Alina K. Gutnova
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja st., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713