Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 20–34

УДК 517.444
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23384

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С НУЛЕВЫМ ПОТОКОМ ЧЕРЕЗ СФЕРЫ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Вит. В. Волчков[1], **Н. П. Волчкова**[2]

[1] Донецкий национальный университет,
Россия, 83001, Донецк, ул. Университетская, 24;
[2] Донецкий национальный технический университет,
Россия, 83000, Донецк, ул. Артема, 58
E-mail: volna936@gmail.com

Аннотация. Классическим свойством периодической функции на вещественной оси является возможность ее представления тригонометрическим рядом Фурье. Естественным аналогом условия периодичности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является постоянство интегралов от функции по всем шарам (или сферам) фиксированного радиуса. Функции с указанным свойством можно разложить в ряд по собственным функциям оператора Лапласа специального вида. Этот факт допускает обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^n$, имеющие нулевой поток через сферы фиксированного радиуса. При этом для них возникает представление Смита в виде суммы соленоидального векторного поля и бесконечного числа потенциальных векторных полей. Потенциальные векторные поля удовлетворяют уравнению Гельмгольца, связанному с нулями функции Бесселя $J_{n/2}$. Целью данной работы является получение локальных аналогов теоремы Смита. Изучаются векторные поля $\mathbf{A}$ с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса на областях $\mathscr{O}$ в евклидовом пространстве, инвариантных относительно вращений. Рассматриваются случаи, когда $\mathscr{O} = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ или $\mathscr{O} = B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$. Описание полей $\mathbf{A}$ состоит из двух шагов. На первом шаге доказывается равенство $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + B(x)x$, $x \in \mathscr{O}$, где $\mathbf{A}^s$ — подходящее соленоидальное векторное поле, B — скалярное поле. Второй шаг состоит в описании функций $B(x)$. Основным инструментом для описания $B(x)$ являются многомерные ряды Фурье по сферическим гармоникам. Если $\mathscr{O} = B_R$, то коэффициенты Фурье функции $B(x)$ представимы рядами по гипергеометрическим функциям ${}_1F_2$. В случае, когда $\mathscr{O} = B_{a,b}$, соответствующие коэффициенты Фурье разлагаются в ряды, содержащие функции Бесселя, Неймана и Ломмеля. Результаты, полученные в работе, можно использовать при решении задач, связанных с гармоническим анализом векторных полей на областях в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: векторное поле, нулевое сферическое среднее, сферическая гармоника, функция Ломмеля.

Mathematical Subject Classification (2000): 53C65, 44A35.

Образец цитирования: *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 20–34. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23384.

1. Введение

Одним из хорошо известных критериев T-периодичности непрерывной функции f на вещественной оси является постоянство интегралов от f по всем отрезкам длины T на $\mathbb{R}$, т. е. условие

$$\int\limits_x^{x+T} f(y)\,dy = \int\limits_0^T f(y)\,dy \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Естественным аналогом условия (1) в многомерном случае является постоянство интегралов от функции по всем шарам фиксированного радиуса. Близкий класс функций получается, если здесь заменить шары на сферы фиксированного радиуса.

Согласно теории рядов Фурье всякую T-периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right), \tag{2}$$

т. е. представить f в виде суммы константы $\frac{a_0}{2}$ и последовательности периодических функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$f_m''(x) + \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} f_m(x) = 0.$$

Существенно более трудной задачей является описание функций с постоянными интегралами по шарам (или сферам) фиксированного радиуса. Для эффективной характеризации указанных классов требуется привлекать соответствующие специальные функции. Например, в двумерном случае имеет место следующий результат.

Теорема A. *Пусть $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Тогда функция f имеет нулевые интегралы по всем кругам в $\mathbb{R}^2$ радиуса r в том и только том случае, когда имеет место разложение*

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{q,m} J_m\left(\frac{\nu_q}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right) \left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^m,$$

где J_m — функция Бесселя порядка m, $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$ — последовательность всех положительных нулей функции J_1, занумерованных в порядке возрастания, и коэффициенты $c_{q,m} \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию

$$c_{q,m} = O\left(\frac{1}{\nu_q^{\alpha}}\right) \quad \text{\textit{при}} \quad q \to \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

Отметим, что функции

$$(x,y) \to J_m\left(\frac{\nu_q}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^m$$

являются собственными функциями оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^2$. Подобные результаты были получены и для функций меньшей гладкости, заданных на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, инвариантных относительно вращений (см. [1, теорема 3], [2, теорема 3], а также [3–5], где содержатся существенно более общие результаты, касающиеся структуры решений уравнений в свертках).

Гораздо менее изученным в этой области является случай векторных полей. Если рассматривать $f \in C^1(\mathbb{R})$ как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие

$$f\left(x - \frac{T}{2}\right) - f\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$$

означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса $T/2$. Таким образом, равенство (2) дает представление для полей с нулевым потоком через все сферы радиуса $T/2$ в $\mathbb{R}^1$. Этот факт допускает нетривиальное обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^n$. При этом константа $\frac{a_0}{2}$ интерпретируется как соленоидальное векторное поле, а $\{f_m\}$ заменяются на потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению для собственных функций оператора Лапласа. Указанное утверждение является частным случаем следующего локального результата Д. Смита [6, теорема 3].

Теорема B. *Пусть* $\mathbf{A} : B_{R+1} \to \mathbb{R}^n$ $(1 < R \leqslant \infty)$ *— векторное поле в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{n+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, *имеющее нулевой поток через любую сферу единичного радиуса, лежащую в* B_{R+1}. *Тогда для* $x \in B_R$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}_m^p(x), \tag{3}$$

в котором ряд сходится равномерно на компактах из B_R, $\mathbf{A}^s$ *— соленоидальное векторное поле класса* $C^{n+\alpha}$ *и* $\mathbf{A}_m^p$ *— потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению*

$$(\Delta + \nu_m^2)\mathbf{A}_m^p = \mathbf{0}, \tag{4}$$

где $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность всех положительных нулей функции $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания.

Символ B_R в теореме B и ниже обозначает открытый шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле. Класс $C^{n+\alpha}$ определяется как класс таких функций $f \in C^n$, у которых частные производные порядка n удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. Напомним также, что векторное поле $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ класса C^1 в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *соленоидальным*, если

$$\operatorname{div} \mathbf{A} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = 0$$

во всех точках области D, и потенциальным, если существует скалярное поле u в D такое, что

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Одним из существенных недостатков теоремы B является отсутствие разложения (3) во всем шаре B_{R+1}. Это создает серьезные препятствия для изучения свойств векторного поля $\mathbf{A}$ на всей области определения. Кроме того, метод доказательства теоремы B не позволяет получить подобное описание для областей вида

$$B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}.$$

В данной работе предложен иной подход, позволяющий преодолеть перечисленные выше трудности. В теоремах 1, 2 ниже получено полное описание векторных полей в шаре и шаровом слое пространства $\mathbb{R}^n$, имеющих нулевой поток через границу любого шара фиксированного радиуса, лежащего в этих областях. Отметим, что при этом возникают новые специальные функции (гипергеометрическая функция порядка $(1, 2)$ и функции Ломмеля), которые не появлялись ранее в подобных задачах для евклидова пространства.

2. Формулировки основных результатов

Пусть $r > 0$ фиксировано, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\},$$

$\overline{B_r}(x)$ и $\partial B_r(x)$ — соответственно замыкание и граница шара $B_r(x)$.

Для области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$, содержащей шары $\overline{B_r}(x)$ при некоторых x, обозначим через $\mathbf{V}_r(\mathscr{O})$ совокупность всех непрерывных векторных полей $\mathbf{A} : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$ с условием

$$\int\limits_{\partial B_r(x)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, d\xi = 0 \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \, \overline{B_r}(x) \subset \mathscr{O}),$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial B_r(x)$, $d\xi$ — элемент площади на $\partial B_r(x)$.

Далее, как обычно, S^{n-1} — единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathscr{H}_k$ — пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1}. Пространство $L^2(S^{n-1})$ является прямой суммой попарно ортогональных пространств $\mathscr{H}_k$, $k = 0, 1, \ldots$ (см., например, [7, гл. 4, § 2]). Пусть d_k — размерность $\mathscr{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathscr{H}_k$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\rho = |x|, \quad \sigma = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Функция $Y_l^{(k)}$ продолжается до однородного гармонического многочлена степени k в $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$Y_l^{(k)}(x) = \rho^k Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Если область $\mathscr{O}$ инвариантна относительно вращений пространства $\mathbb{R}^n$, то всякой локально суммируемой в $\mathscr{O}$ функции f соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma),$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int\limits_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\, d\sigma.$$

Разложение функции Бесселя порядка $\nu \in \mathbb{R}$ в степенной ряд имеет вид

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \tag{5}$$

где Γ — гамма-функция. Функция Неймана порядка $\nu \in \mathbb{R}$ выражается через функцию Бесселя по формуле

$$N_\nu(t) = \lim_{\mu \to \nu} \frac{J_\mu(t)\cos(\pi\mu) - J_{-\mu}(t)}{\sin(\pi\mu)}.$$

Пара $\{J_\nu, N_\nu\}$ является фундаментальной системой решений дифференциального уравнения Бесселя

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + \big(t^2 - \nu^2\big)u = 0.$$

Обозначим через ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t)$ гипергеометрическую функцию порядка $(1, 2)$, определяемую равенством

$${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \frac{t^k}{k!}, \tag{6}$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

(см., например, [8, гл. 4]). Присоединенная функция Ломмеля с индексами $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ определяется равенством

$$S_{\mu,\nu}(t) = \frac{t^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2}\, {}_1F_2\left(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) \\ + 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \\ \times \left[\sin\left(\frac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right) J_\nu(t) - \cos\left(\frac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right) N_\nu(t)\right], \quad (7)$$

где при $\mu \pm \nu = -1, -3, -5, \dots$ правая часть в (7) находится с помощью соответствующего предельного перехода (см. [9, приложение II, § II.12]). Как известно [10, гл. 1, § 16], функция $S_{\mu,\nu}$ является частным решением неоднородного уравнения Бесселя

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)u = t^{\mu+1}.$$

Следующие результаты дают описание гладких векторных полей $\mathbf{A}$, принадлежащих классам $\mathbf{V}_r(B_R)$ и $\mathbf{V}_r(B_{a,b})$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$, $r < R \leqslant +\infty$, $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле класса C^∞. Тогда $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{V}_r(B_R)$ в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + \mathscr{B}(x)x, \quad x \in B_R, \quad (8)$$

где $\mathbf{A}^s$ — соленоидальное векторное поле класса C^∞, $\mathscr{B}$ — скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l}\, \rho^k\, {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2\right), \qquad 0 \leqslant \rho < R,$$

в которых константы $\gamma_{m,k,l}$ убывают быстрее любой фиксированной степени ν_m при $m \to \infty$.

Здесь и далее $\mathscr{B}(x)x$ — векторное поле, определяемое равенством

$$\mathscr{B}(x)x = (\mathscr{B}(x)x_1, \dots, \mathscr{B}(x)x_n).$$

Теорема 2. *Пусть $r > 0$, $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $b - a > 2r$, $\mathbf{A} : B_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле класса C^∞. Тогда $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{V}_r(B_{a,b})$ в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + B(x)x, \quad x \in B_{a,b},$$

где $\mathbf{A}^s$ — соленоидальное векторное поле класса C^∞, B — скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m,k,l}}{\rho^{n-1}} \left[(n+k-2) J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) - \right. \\ \left. - J_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\right] + \\ + \frac{\beta_{m,k,l}}{\rho^{n-1}} \left[(n+k-2) N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) - \right. \\ \left. - N_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\right] + \frac{\gamma_{m,k,l}}{\rho^n}, \quad a < \rho < b,$$

в которых константы $\alpha_{m,k,l}$, $\beta_{m,k,l}$, $\gamma_{m,k,l}$ *убывают быстрее любой фиксированной степени* ν_m *при* $m \to \infty$.

В отличие от теоремы B теоремы 1, 2 дают разложение для полей **A** из рассматриваемых классов на всей области определения. Отметим также, что теоремы 1, 2 являются развитием результатов В. В. Волчкова об описании функций с нулевыми интегралами по сферам фиксированного радиуса на случай векторных полей (см. [1, 2], а также [3–5]).

§ 3. Вспомогательные утверждения

Прежде всего напомним некоторые свойства встречающихся выше специальных функций.

Для функций Бесселя и Неймана справедливы следующие формулы дифференцирования [8, гл. 7]

$$\frac{d}{dt}\left(t^\nu J_\nu(t)\right) = t^\nu J_{\nu-1}(t), \quad \frac{d}{dt}\left(t^\nu N_\nu(t)\right) = t^\nu N_{\nu-1}(t), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{N_\nu(t)}{t^\nu}\right) = -\frac{N_{\nu+1}(t)}{t^\nu}. \tag{10}$$

Отметим следующие свойства функций Ломмеля [9, приложение II, § II.12]:

$$S_{\mu,-\nu}(t) = S_{\mu,\nu}(t), \tag{11}$$

$$S_{\mu,\nu}(t) = t^{\mu-1} + \left(\nu^2 - (\mu-1)^2\right) S_{\mu-2,\nu}(t), \tag{12}$$

$$2\nu S_{\mu,\nu}(t) = (\mu+\nu-1)tS_{\mu-1,\nu-1}(t) - (\mu-\nu-1)tS_{\mu-1,\nu+1}(t), \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}S_{\mu,\nu}(t) = \frac{\nu}{t}S_{\mu,\nu}(t) + (\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(t). \tag{14}$$

Из (14) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(t^\nu S_{\mu,\nu}(t)\right) = \nu \quad t^{\nu-1}S_{\mu,\nu}(t) + t^\nu\left(\frac{\nu}{t}S_{\mu,\nu}(t) + (\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(t)\right)$$
$$= t^{\nu-1}\big(2\nu S_{\mu,\nu}(t) + (\mu-\nu-1)tS_{\mu-1,\nu+1}(t)\big).$$

Отсюда и из (13) получаем

$$\frac{d}{dt}\left(t^\nu S_{\mu,\nu}(t)\right) = (\mu+\nu-1)t^\nu S_{\mu-1,\nu-1}(t). \tag{15}$$

Лемма 1. *Для функции* $h(t) = {}_1F_2(\alpha; \alpha+1, \beta; \gamma t)$ *имеет место соотношение*

$$th'(t) + \alpha h(t) = \alpha\Gamma(\beta)\frac{J_{\beta-1}(2\sqrt{-\gamma t})}{\sqrt{-\gamma t}^{\;\beta-1}}.$$

$\lhd$ Из (6) и определения h имеем

$$\alpha h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k\alpha}{(\alpha+1)_k(\beta)_k}\frac{(\gamma t)^k}{k!},$$

$$th'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k(\beta)_k}\frac{k(\gamma t)^k}{k!}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что

$$\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k}(\alpha+k)=\alpha,$$

получаем

$$th'(t)+\alpha h(t)=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta)_k}\frac{(\gamma t)^k}{k!}.$$

Теперь используя разложение

$$J_\nu(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)_k}\frac{(-t^2/4)^k}{k!}$$

(см. (5)), приходим к требуемому утверждению. $\rhd$

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\big((\mu+\nu-1)tJ_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)-tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)'=t^{\mu}J_\nu(t), \tag{16}$$

$$\big((\mu+\nu-1)tN_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)-tN_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)'=t^{\mu}N_\nu(t). \tag{17}$$

$\lhd$ Используя (9), (11) и (15), находим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tJ_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)\big)&=\frac{d}{dt}\left(t^{\nu}J_\nu(t)t^{1-\nu}S_{\mu-1,1-\nu}(t)\right)\\&=tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)+(\mu-\nu-1)tJ_\nu(t)S_{\mu-2,\nu}(t).\end{aligned}$$

Далее, с помощью (10) и (15) получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)&=\frac{d}{dt}\left(t^{1-\nu}J_{\nu-1}(t)t^{\nu}S_{\mu,\nu}(t)\right)\\&=-tJ_\nu(t)S_{\mu,\nu}(t)+(\mu+\nu-1)tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t).\end{aligned}$$

Исключая из правых частей этих соотношений функцию $tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)=-tJ_\nu(t)S_{\mu,\nu}(t)&+(\mu+\nu-1)\frac{d}{dt}\big(tJ_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)\big)\\&+\big(\nu^2-(\mu-1)^2\big)tJ_\nu(t)S_{\mu-2,\nu}(t).\end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (12) следует формула (16). Равенство (17) доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть скалярное поле $B\in C^1(\mathscr{O})$ имеет вид*

$$B(x)=\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma). \tag{18}$$

Тогда

$$\operatorname{div}(B(x)x)=\big(\rho\varphi'(\rho)+n\varphi(\rho)\big)\,Y_l^{(k)}(\sigma). \tag{19}$$

$\lhd$ Для любого скалярного поля $B\in C^1(\mathscr{O})$ имеем

$$\operatorname{div}(B(x)x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(x_jB(x))=\sum_{j=1}^{n}B(x)+x_j\frac{\partial B}{\partial x_j}=nB(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial B}{\partial x_j}. \tag{20}$$

Пусть теперь выполнено условие (18). Запишем B в виде

$$B(x) = \psi(\rho)Y_l^{(k)}(x), \quad \psi(\rho) = \frac{\varphi(\rho)}{\rho^k}.$$

Тогда

$$\frac{\partial B}{\partial x_j} = \frac{\psi'(\rho)}{\rho} x_j Y_l^{(k)}(x) + \psi(\rho)\frac{\partial Y_l^{(k)}(x)}{x_j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(B(x)x) &= n\psi(\rho)Y_l^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'(\rho)}{\rho} x_j^2 Y_l^{(k)}(x) + \psi(\rho)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial Y_l^{(k)}(x)}{\partial x_j}\\ &= \big(n\psi(\rho) + \psi'(\rho)\rho\big)\, Y_l^{(k)}(x) + \psi(\rho)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial Y_l^{(k)}(x)}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Поэтому по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\operatorname{div}(B(x)x) = \big((n+k)\psi(\rho) + \psi'(\rho)\rho\big)\, Y_l^{(k)}(x).$$

Поскольку

$$\psi'(\rho) = \frac{\varphi'(\rho)}{\rho^k} - k\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{k+1}},$$

отсюда вытекает требуемое равенство. $\rhd$

Из леммы 3 непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{div}\left(\frac{Y_l^{(k)}(\sigma)}{\rho^n} x\right) = 0.$$

Следствие 2. *Пусть*

$$\varphi(\rho) = \rho^k {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)x\right) &= (n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) 2^{\frac{n}{2}+k-1}\\ &\times \left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{1-k-\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) Y_l^{(k)}(\sigma).\end{aligned} \tag{21}$$

$\lhd$ Полагая

$$\psi(t) = {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\frac{\nu_m^2}{4r^2}\, t\right),$$

получаем $\varphi(\rho) = \rho^k\, \psi(\rho^2)$ и

$$\rho\varphi'(\rho) + n\varphi(\rho) = \rho^k\big(2\rho^2\psi'(\rho^2) + (n+k)\psi(\rho^2)\big). \tag{22}$$

По лемме 1 имеем

$$t\psi'(t)+\frac{(n+k)}{2}\psi(t)=\frac{(n+k)}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1}\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)}{\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)^{\frac{n}{2}+k-1}}. \tag{23}$$

Комбинируя (22), (23) и (19), приходим к (21). $\rhd$

Следствие 3. *Пусть*

$$\varphi(\rho)=\Big[(n+k-2)J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) - J_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big]\frac{1}{\rho^{n-1}}.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)x\right)=\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)Y_l^{(k)}(\sigma).$$

$\lhd$ Используя формулу

$$\rho\varphi'(\rho)+n\varphi(\rho)=\frac{1}{\rho^{n-1}}\left(\rho^n\varphi(\rho)\right)'$$

и лемму 2 при $\nu=\frac{n}{2}+k-1$, $\mu=\frac{n}{2}$, находим

$$\rho\varphi'(\rho)+n\varphi(\rho)=\frac{1}{\rho^{n-1}}\Big[(n+k-2)\frac{\nu_m}{r}\rho J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) -\frac{\nu_m}{r}\rho\, J_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big]'\frac{r}{\nu_m}=\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right).$$

Отсюда и из леммы 3 получаем требуемое утверждение. $\rhd$

Аналогично доказывается

Следствие 4. *Пусть*

$$\varphi(\rho)=\Big[(n+k-2)N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) - N_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big]\frac{1}{\rho^{n-1}}.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)x\right)=\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{A}\in C^1(B_{a,b})$, ρ_0 — фиксированное число из интервала (a,b), и*

$$B(x)=\int\limits_{\frac{\rho_0}{|x|}}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}dt,\quad a<|x|<b.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(B(x)x\right)=\mathscr{A}(x). \tag{24}$$

◁ Прежде всего отметим, что определение функции B является корректным. Действительно, если $a < |x| \leqslant \rho_0$, то $1 \leqslant \frac{\rho_0}{|x|}$ и при $1 \leqslant t \leqslant \frac{\rho_0}{|x|}$ выполнены неравенства

$$a < |x| \leqslant t|x| \leqslant \rho_0 < b.$$

Аналогично, если $\rho_0 < |x| < b$, то $\frac{\rho_0}{|x|} < 1$ и при $\frac{\rho_0}{|x|} \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$a < \rho_0 \leqslant t|x| \leqslant |x| < b.$$

Далее, по формуле Лейбница находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{\rho_0(x_1^2+\dots+x_n^2)^{-1/2}}^{1} \mathscr{A}(tx_1,\dots,tx_n)t^{n-1}\,dt \\
&= -\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\big|_{t=\rho_0/|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_0}{|x|}\right) + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt \\
&= -\mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\left(\frac{\rho_0}{|x|}\right)^{n-1}\rho_0\frac{(-1)x_j}{|x|^3} + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt \\
&= \mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\frac{\rho_0^n}{|x|^{n+2}}x_j + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Отсюда (см. (20))

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(B(x)x) &= nB(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial B}{\partial x_j} = n\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt + \sum_{j=1}^{n}\mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\frac{\rho_0^n}{|x|^{n+2}}x_j^2 \\
&+ \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt = n\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt \\
&+\mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\left(\frac{\rho_0}{|x|}\right)^{n} + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} t^n\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_j}(tx)\right)dt.
\end{aligned}\tag{25}$$

Преобразуем последний интеграл с помощью формулы интегрирования по частям. Тогда

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} t^n\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_j}(tx)\right)dt &= \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\frac{d}{dt}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^n\,dt \\
&= t^n\mathscr{A}(tx)\big|_{\rho_0/|x|}^{1} - n\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Используя это соотношение и (25), получаем равенство (24). ▷

Лемма 5. *Пусть* $\mathscr{A} \in C^1(B_R)$ *и*

$$\mathscr{B}(x) = \int\limits_0^1 \mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt, \quad |x| < R.$$

Тогда

$$\operatorname{div}(\mathscr{B}(x)x) = \mathscr{A}(x).$$

$\lhd$ Утверждение леммы 5 получается теми же рассуждениями, что и в доказательстве леммы 4. $\rhd$

4. Доказательства теорем 1 и 2

Приведем два известных результата (см. [1, 2]), которые потребуются ниже.

Лемма 6. *Пусть* $r > 0$, $r < R \leqslant +\infty$, $f \in C^\infty(B_R)$. *Тогда функция* f *имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса* r, *лежащим в* B_R *в том и только том случае, когда при всех целых* $k \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d_k$ *имеют место равенства*

$$f_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l}\, J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right), \quad 0 \leqslant \rho < R,$$

где $c_{m,k,l} \in \mathbb{C}$ *и*

$$c_{m,k,l} = O\left(\frac{1}{\nu_m^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

Лемма 7. *Пусть* $r > 0$, $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $b - a > 2r$, $f \in C^\infty(B_{a,b})$. *Тогда функция* f *имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса* r, *лежащим в* $B_{a,b}$ *в том и только том случае, когда при всех целых* $k \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d_k$ *имеют место равенства*

$$f_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k,l}\, J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) + \beta_{m,k,l}\, N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right), \quad a < \rho < b,$$

где $\alpha_{m,k,l} \in \mathbb{C}$, $\beta_{m,k,l} \in \mathbb{C}$ *и*

$$|\alpha_{m,k,l}| + |\beta_{m,k,l}| = O\left(\frac{1}{\nu_m^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

$\lhd$ Доказательство теорем 1 и 2. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. По формуле Гаусса — Остроградского имеем

$$\int\limits_{\overline{B_r}(\mathbf{x})} \operatorname{div}\mathbf{A}\,(y)\,dy = \int\limits_{\partial\overline{B_r}(\mathbf{x})} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,d\xi = 0 \quad (\forall\, x \in B_{R-r}), \tag{26}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе шара $\overline{B_r}(x)$. Это означает, что функция $\operatorname{div}\mathbf{A}$ имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в B_R. Отсюда по лемме 6

$$(\operatorname{div}\mathbf{A})_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m\rho}{r}\right), \tag{27}$$

где константы $c_{m,k,l}$ убывают быстрее любой степени ν_m при $m \to \infty$. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{C}(x) = \mathscr{B}(x)x$, где

$$\mathscr{B}(x) = \int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(tx)t^{n-1}\,dt.$$

Тогда

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} \mathscr{B}(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma = \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(t\rho\sigma)t^{n-1}\,dt\right)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{S^{n-1}} \operatorname{div} \mathbf{A}(t\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma\right) t^{n-1}dt = \int_0^1 (\operatorname{div} \mathbf{A})_{k,l}(t\rho)t^{n-1}\,dt.$$

Теперь в соответствии с (27)

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \int_0^1 \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{t\nu_m\rho}{r}\right) t^{\frac{n}{2}}\,dt.$$

Используя формулу

$$\int_0^1 J_\nu(at)t^\lambda\,dt = \frac{a^\nu}{2^\nu(\lambda+\nu+1)\Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_2\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}; \frac{\lambda+\nu+3}{2}, \nu+1; -\frac{a^2}{4}\right),$$

$\operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1$ (см. [11, п. 1.9.1, формула 1]), получаем

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l}\,\rho^k\, {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right), \tag{28}$$

где

$$\gamma_{m,k,l} = \frac{c_{m,k,l}}{(n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1}}\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}+k-1}.$$

Кроме того, по лемме 5

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = \operatorname{div}\mathbf{A}. \tag{29}$$

Полагая

$$\mathbf{A}^s = \mathbf{A} - \mathbf{C},$$

из (28) и (29) получаем представление (8). Обратное утверждение теоремы следует из соотношений (21), (26) и леммы 6. Таким образом, теорема 1 доказана.

Повторяя теперь рассуждения выше с использованием следствий 1, 3, 4 и лемм 4, 7, получаем утверждение теоремы 2. $\rhd$

В заключение выпишем явное разложение полей

$$b_{m,k,l}(x) = \rho^k\, {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right) Y_l^{(k)}(\sigma)x,$$

возникающих в теореме 1, в виде суммы соленоидальной и потенциальной части, удовлетворяющей уравнению вида (4) из теоремы B. В силу равенства (21) и [3, ч. 1, гл. 5, формула (5.27)] имеем

$$\Delta\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x) = -\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^2 \mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x).$$

Отсюда и из равенства $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ находим

$$\mathrm{div}\,\left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x) + \frac{\nu_m^2}{r^2} b_{m,k,l}(x)\right) = 0.$$

Кроме того,

$$\Delta\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x) = \mathrm{grad}\,\Delta\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x) = -\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^2 \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x).$$

Поэтому искомые соленоидальная и потенциальная части равны

$$b_{m,k,l}(x) + \left(\frac{r}{\nu_m}\right)^2 \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x)$$

и

$$-\left(\frac{r}{\nu_m}\right)^2 \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, b_{m,k,l}(x)$$

соответственно.

Литература

1. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 6.—С. 15–34.
2. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 9.—С. 13–30. DOI: 10.4213/sm255.
3. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
4. *Volchkov V. V., Volchkov V. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer-Verlag, 2009.—671 p.
5. *Volchkov V. V., Volchkov V. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser., 2013.—592 p.
6. *Smith J.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1972.—Vol. 72, № 3.—P. 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.—332 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1973, 1974.—296 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука, 1986.—800 с.
10. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций.—М.: Наука, 1971.—287 с.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.—М.: Наука, 1983.—750 с.

Статья поступила 16 ноября 2017 г.

Волчков Виталий Владимирович
Донецкий национальный университет,
заведующий кафедрой матем. анализа и дифференц. уравнений
УКРАИНА, 83001, Донецк, ул. Университетская, 24
E-mail: volna936@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Волчкова Наталья Петровна
Донецкий национальный технический университет,
доцент кафедры высшая математика
УКРАИНА, 83000, Донецк, ул. Артема, 58
E-mail: volna936@gmail.com
http://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 20–34

VECTOR FIELDS WITH ZERO FLUX THROUGH SPHERES OF FIXED RADIUS

Volchkov, Vit. V.[1] and Volchkova, N. P.[2]

[1] Donetsk National University,
24 Universitetskaya Str., Donetsk 83001, Ukraine;
[2] Donetsk National Technical University,
58 Artyom Str., Donetsk 83000, Ukraine
E-mail: volna936@gmail.com

Abstract. The classical property of a periodic function on the real axis is the possibility of its representation by a trigonometric Fourier series. The natural analogue of the periodicity condition in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is the constancy of the integrals of the function over all balls (or spheres) of a fixed radius. Functions with the specified property can be expanded in a series in special eigenfunctions of the Laplace operator. This fact admits a generalization to vector fields in $\mathbb{R}^n$, having zero flow through spheres of fixed radius. In this case, Smith's representation arises for them as the sum of a solenoidal vector field and an infinite number of potential vector fields. Potential vector fields satisfy the Helmholtz equation related to the zeros of the Bessel function $J_{n/2}$. The purpose of this paper is to obtain local analogs of the Smith theorem. We study vector fields $\mathbf{A}$ with zero flow through spheres of fixed radius on domains $\mathscr{O}$ in Euclidean space that are invariant with respect to rotations. Cases are considered when $\mathscr{O} = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ or $\mathscr{O} = B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$. The description of the fields $\mathbf{A}$ consists of two steps. The first step proves the equality $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + B(x)x$, $x \in \mathscr{O}$, where $\mathbf{A}^s$ is a suitable solenoidal vector field and B is a scalar field. The second step is to describe the functions $B(x)$. As the main tool for the description of $B(x)$, multidimensional Fourier series in spherical harmonics are used. If $\mathscr{O} = B_R$ then the Fourier coefficients of the function $B(x)$ can be represented in the form of series in the hypergeometric functions ${}_1F_2$. In the case of $\mathscr{O} = B_{a,b}$ the corresponding Fourier coefficients can be expanded in the series containing the Bessel, Neumann and Lommel functions. These results can be used in harmonic analysis of vector fields on domains in $\mathbb{R}^n$.

Key words: vector field, zero spherical mean, spherical harmonic, Lommel function.

Mathematical Subject Classification (2000): 53C65, 44A35.

For citation: *Volchkov, Vit. V. and Volchkova, N. P.* Vector Fields with Zero Flux Through Spheres of Fixed Radius, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 20–34 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23384.

References

1. *Volchkov, V. V.* A Definitive Version of the Local Two-Radii Theorem, *Sbornik: Mathematics*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 783–802. DOI: 10.1070/SM1995v186n06ABEH000043.
2. *Volchkov, V. V.* Solution of the Support Problem for Several Function Classes, *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294. DOI: 10.1070/SM1997v188n09ABEH000255.
3. *Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2003, 454 p.
4. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London, Springer-Verlag, 2009, 671 p.

5. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel, Birkhäuser, 2013, 592 p.
6. *Smith, J.* Harmonic Analysis of Scalar and Vector Fields in $\mathbb{R}^n$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1972, vol. 72, no. 3, pp. 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
7. *Stein, E. and Weiss, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton 1971, 312 p.
8. *Beitmen, G. and Erdeii, A.* Vysshie transtsendentnye funktsii, vol. 1, 2, Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).
9. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. Integrals and Series. Supplementary Parts*, Moscow, Nauka, 1986, 800 p. (in Russian).
10. *Korenev, B. G. Introduction to the Theory of Bessel Functions*, Moscow, Nauka, 1971, 287 p. (in Russian).
11. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. Integrals and Series. Special Functions*, Moscow, Nauka, 1983, 750 p. (in Russian).

Received November 16, 2017

Vitaliy V. Volchkov
Donetsk National University,
24 Universitetskaya Str., Donetsk 83001, Ukraine,
Head of the Department of Math. Analysis and Differ. Equations
E-mail: `volna936@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Natalia P. Volchkova
Donetsk National Technical University,
58 Artioma Str., Donetsk 83000, Ukraine,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
E-mail: `volna936@gmail.com`
http://orcid.org/0000-0001-6193-2782