Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 57–61

УДК 512.5
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14721

ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТИ

Н. А. Джусоева, С. Ю. Итарова, В. А. Койбаев

Посвящается 65-летию
Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца Λ называется сетью (ковром) над кольцом Λ порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется дополняемой (до полной сети), если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ, определенных для любых $i \neq j$ формулой $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ является элементарной сетью, которую мы называем *элементарной производной сетью.* Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, а также другим способом, который мы предлагаем в статье. Вводится также понятие сети $\Omega = (\Omega_{ij})$, которую мы называем *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$. Следующая теорема является основным результатом статьи: *Элементарная сеть σ индуцирует элементарную производную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$. Если $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной стандартным способом, то для произвольного r и любых $i \neq j$ будет $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ и $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Если же $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной вторым способом, то последние включения выполняются для любых i, r, j.*

Ключевые слова: сети, элементарные сети, сетевые группы, производная сеть, элементарная сетевая группа, трансвекция.

В работе приняты следующие стандартные обозначения. Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция. Положим, далее,

$$t_{ij}(A) = \left\{t_{ij}(\alpha) : \ \alpha \in A\right\}.$$

Для элементарной сети (ковра) σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная сетевая группа:

$$E(\sigma) = \left\langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\right\rangle.$$

Далее, если σ — сеть, то через $G(\sigma)$ обозначается сетевая (ковровая) группа [1].

Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца Λ называется *сетью* (*ковром*) [2, 3] над кольцом Λ порядка n, если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$$

при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарным ковром*) [1, 2], [3, вопрос 15.46].

Определение 1. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой* (*до полной сети*), если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является *дополняемой*, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Хорошо известно, что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда (см. [1])

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \tag{1}$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k\neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{2}$$

где суммирование берется по всем k отличным от i.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Рассмотрим набор $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ является элементарной сетью, которую мы называем *элементарной производной сетью.*

Если, например, $n = 3$, то элементарная производная сеть $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Элементарная сеть $\omega = \sigma^1$ является дополняемой [4, предложение 1], т. е. для нее справедлива формула (1), а потому она дополняется до (полной) сети. Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, пользуясь формулой (2). Однако, мы предлагаем еще один (необходимый нам для дальнейшей работы) способ дополнения элементарной сети ω до полной.

$$\omega_{ii} = \sum_{k\neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si}, \tag{3}$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$ (ясно, что $k \neq i$, $s \neq i$).

Определение 2. Элементарная производная сеть ω, дополненная диагональю либо стандартным способом (формула (2)), либо формулой (3), является сетью, которая называется *производной сетью* (*для* σ).

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью, причем дополняемой, т. е. справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ [4, предложение 5]. Пользуясь формулой (2), дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum_{k\neq i}\Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по k, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например, $\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \cdots + \gamma_{1n}$. Заметим, что $\omega_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$ для всякого i. Сеть Ω является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ [4, предложение 6].

Определение 3. Сеть Ω называется *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$.

Теорема. *Элементарная сеть σ индуцирует элементарную производную сеть $\omega=(\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, причем*

$$\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega.$$

Если $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной стандартным способом (формула (2)), то для произвольного r и любых $i \neq j$

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}. \tag{4}$$

Если же $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной вторым способом (формула (3)), то включения (4) выполняются для любых i, r, j.

Для сетей ω и Ω рассмотрим матричные кольца

$$M(\omega) = \{a = (a_{ij}) : a_{ij} \in \omega_{ij}\} \subseteq M(\Omega) = \{b = (b_{ij}) : b_{ij} \in \Omega_{ij}\}.$$

Следствие. *В случае дополнения элементарной сети ω формулой (3) матричное кольцо $M(\omega)$ является двусторонним идеалом матричного кольца $M(\Omega)$.*

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
4. *Койбаев В. А.* Замкнутые сети в линейных группах // Вестн. СПбГУ. Сер. 1.—2013.—№ 1.—С. 25–33.

Статья поступила 24 января 2018 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
доцент кафедры алгебры и геометрии
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Итарова Светлана Юрьевна
Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
аспирант кафедры алгебры и геометрии
E-mail: sitarova1991@gmail.com

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа;
Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-5142-2612

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 57–61

AN EMBEDDING THEOREM FOR AN ELEMENTARY NET

Dzhusoeva N. A.[1], Itapova S. Y.[1], Koibaev V. A.[1,2]
[1] North-Ossetian State University;
[2] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS

Abstract. Let Λ be a commutative unital ring and $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. A set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups σ_{ij} of Λ is said to be a *net* or a *carpet* of order n over the ring Λ if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all i, r, j. A net without diagonal is called an *elementary net*. An elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, is said to be *complemented* (to a full net), if for some additive subgroups (subrings) σ_{ii} of Λ the matrix (with the diagonal) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ is a full net. Assume that $\sigma = (\sigma_{ij})$ is an elementary net over the ring Λ of the order n. Consider a set $\omega = (\omega_{ij})$ of additive subgroups ω_{ij} of the ring Λ, where $i \neq j$ defined by the rule $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, $k \neq i$; $k \neq j$. The set $\omega = (\omega_{ij})$ of elementary subgroups ω_{ij} of the ring Λ is an elementary net called an *elementary derived net*. An elementary net ω can be completed to a full net by the standard way. In this article we propose a second way to complete an elementary net to a full net. The notion of a net $\Omega = (\Omega_{ij})$ associated with an elementary group $E(\sigma)$ is also introduced. The following theorem is the main result of the paper: *An elementary net σ generates an elementary derived net $\omega = (\omega_{ij})$ and a net $\Omega = (\Omega_{ij})$ associated with the elementary group $E(\sigma)$ such that $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$. If $\omega = (\omega_{ij})$ is completed with a diagonal to the full net in the standard way, then for all r and $i \neq j$ we have $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ and $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. If $\omega = (\omega_{ij})$ ic completed with a diagonal to the full net in the second way then the inclusions are valid for all i, r, j.*

Key words: nets, elementary nets, net groups, derivative nets, elementary net groups, transvections.

References

1. *Borevich Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.

2. *Levchuk V. M.* A Note to L. Dickson's Theorem, *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1983, vol. 22, no. 4, pp. 421–434 (in Russian).
3. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, issue 17, Novosibirsk, Russ. Acad. of Sciences, Siberian Div., Inst. of Mathematics, 2010 (in Russian). DOI: 10.3103/s1063454113010056.
4. *Koibaev V. A.* Closed Nets in Linear Groups, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2013, vol. 46, no. 1, pp. 14–21. DOI: 10.3103/S1063454113010056.

Received January 24, 2018

Nonna A. Dzhusoeva
North-Ossetian State University,
46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Svetlana Y. Itarova
North-Ossetian State University,
46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: sitarova1991@gmail.com

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia;
North-Ossetian State University,
46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612