Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 95–108

УДК 517.982+517.983
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14726

ОБ ОПИСАНИИ ПРОСТРАНСТВА РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ФУНКЦИЙ ИЗ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С НЕКОТОРЫМИ АПРИОРНЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

С. Г. Самко, С. М. Умарханджиев

Посвящается 65-летию профессора
Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. Рассматривается задача описания пространства $I^\alpha(X)$ функций, представимых риссовым потенциалом $I^\alpha\varphi$ с плотностью φ из заданного пространства X. Предполагается, что $X \subset \Phi'$, где Φ' — пространство распределений над основным классом Φ Лизоркина, инвариантным относительно риссова интегрирования, и образ $I^\alpha(X)$ понимается в смысле распределений. В такой общей постановке поясняется вопрос, при каких предположениях о пространстве X принадлежность элемента f из образа $I^\alpha(X)$ эквивалентна сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ в пространстве X. Для этой цели вначале указанный вопрос исследуется в контексте топологии пространства Φ. Именно, показывается, что для любого линейного подмножества X в Φ' принадлежность элемента f образу $I^\alpha(X)$ эквивалентна сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов на множестве X в топологии пространства Φ'. Если X — банахово пространство, то переход от принадлежности образу к сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов по норме доказывается с точностью до аддитивного многочлена в предположении, что некоторая специальная конволюция является аппроксимацией единицы в пространстве X. Известно, что последнее выполняется для многих банаховых функциональных пространств и справедливо для всех тех функциональных пространств X, в которых ограничен максимальный оператор. Обратный переход доказывается для функционального пространства Банаха X, обладающего тем свойством, что ассоциированное с ним пространство X' содержит основной класс Лизоркина.

Ключевые слова: потенциал Рисса, пространство риссовых потенциалов, гиперсингулярный интеграл, распределения, гранд-пространство Лебега, пространство Лизоркина основных функций, аппроксимация единицы, пространство Орлича, пространство Лебега переменного порядка.

1. Введение

Рассматривается вопрос об описании пространства $I^\alpha(X)$ функций, представимых риссовым потенциалом

$$I^\alpha\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований обоих авторов, проект № 18-01-00094А, а также второго автора — проект № 17-301-50023 мол-нр.

с плотностью φ из того или иного функционального пространства X. Риссово ядро $k_\alpha(x)$ определяется, как известно, равенством

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, 6, \dots; \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha - n = 0, 2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

где $\gamma_n(\alpha)$ — известная нормировочная константа (см., например, [1]).

Заметим, что в случае когда X — пространство функций, обладающих некоторой гладкостью, например, $X = H^\omega(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^\gamma)$ — весовое обобщенное пространство Гёльдера, определяемое заданным модулем непрерывности ω, такое описание возможно в терминах пространств той же серии, т. е. $I^\alpha(H^\omega(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^\gamma)) = H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{\gamma_\alpha})$, где ω_α и γ_α строятся по ω и γ соответственно; ссылки на работы с такими результатами при $\alpha < 1$ можно найти в обзоре [2, п. 2.3.1].

В случае, когда X — пространство измеримых функций, например, пространства Лебега, Орлича, их весовые версии или иные модификации, подобное точное описание образа $I^\alpha(X)$ невозможно, так как функции $f \in I^\alpha(X)$ обладают некоторой слабой гладкостью (интегрального типа), неприсущей, вообще говоря, пространству X из исходной серии пространств. В этом случае описание функций $f \in I^\alpha(X)$ дается фактически в некоторых дифференциальных терминах порядка α, именно, в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов этого порядка.

Подобное описание для $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ впервые было дано при $\alpha < 2$ в [3] для бесселевых потенциалов, которые в отличие от риссовых потенциалов сохраняют, вообще говоря, исходное пространство X. Для произвольного $\alpha > 0$ такое описание было дано в [4], что потребовало использование гиперсингулярных интегралов с разностями высших порядков. Для риссовых потенциалов подобное описание в случае $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha > 0$ (см. в [1]), см. также в § 5 ссылки на работы, относящиеся к другим пространствам X.

В данной работе предлагается некоторый общий подход для подобного описания распределений f, являющихся риссовыми потенциалами функций на $\mathbb{R}^n$ из абстрактного пространства X, удовлетворяющего некоторым априорным свойствам. Распределения рассматриваются над основным классом Лизоркина Φ и оператор I^α трактуется в смысле обобщенных функций.

§§ 2 и 3 содержат необходимые предварительные сведения и вспомогательные результаты, в § 4 даны основные результаты. В § 5 рассматривается вопрос о выполнимости введенных априорных свойств для конкретных функциональных пространств и дается некоторый обзор результатов, относящихся к описанию образа риссова потенциала.

2. Предварительные сведения

Класс Лизоркина Φ, инвариантный относительно оператора I^α, есть подпространство пространства $\mathscr{S}$ шварцевых функций, ортогональных многочленам:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^j \omega(x)\, dx = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \dots, \quad x^j = x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \quad |j| = j_1 + \dots + j_n.$$

Множество Φ плотно в весовом пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, w)$, $w \in A_p$ [1, теорема 7.34].

Гиперсингулярный интеграл $\mathbb{D}^\alpha$ определяется как предел $\mathbb{D}^\alpha := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$, где $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$ — усеченный гиперсингулярный интеграл

$$\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f(x) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{\left(\Delta^\ell_y f\right)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

где $\Delta_h^\ell f(x) = \sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k \begin{pmatrix} \ell \\ k \end{pmatrix} f(x-kh)$ — конечная разность порядка $\ell > \alpha$ функции f и $d_{n,\ell}(\alpha)$ — нормировочная константа, выбранная так, чтобы построение в (2) не зависело от ℓ (подробности см. в [1]).

При фиксированном $\varepsilon > 0$ усеченные гиперсингулярные интегралы имеют вид

$$\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f(x) = C(\varepsilon) f(x) + \sum_{k=1}^{\ell} C_k(\varepsilon) \int\limits_{|t|>k\varepsilon} \frac{f(x-t)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt, \tag{3}$$

получаемый очевидными преобразованиями.

Для конечных разностей функции f имеет место представление

$$\left(\Delta_h^\ell f\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta_{\ell,\alpha}\right)(x-y,h)\, \mathbb{D}^\alpha f(y)\, dy, \quad \ell > \alpha, \tag{4}$$

где равенство $\Delta_{\ell,\alpha}(x,h) = \Delta_h^\ell k_\alpha(x)$ справедливое, по крайней мере, на функциях $f \in \Phi$, хотя оно верно для более широкого класса функций, см. [1, (3.64)].

Усеченные гиперсингулярные интегралы $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ выражаются через свой предел $\varphi = \mathbb{D}^\alpha f$ с помощью аппроксимации единицы:

$$\left(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}_{\ell,\alpha}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \varphi(y)\, dy =: K_\varepsilon^{\ell,\alpha}\varphi, \tag{5}$$

где

$$\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)|x|^n} \int\limits_{|y|<|x|} k_{\ell,\alpha}(y)\, dy, \tag{6}$$

$k_{\ell,\alpha}(x) = \Delta_{\ell,\alpha}(x, e_1)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ (см. [1, (3.63)]).

Ядро $\mathscr{K}_{\ell,\alpha}$ имеет оценку [1, лемма 3.16]

$$\begin{aligned} |\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|)| &\leqslant c \begin{cases} |x|^{\min\{\alpha-n,0\}}, & \alpha \neq n; \\ \ln\frac{2}{|x|}, & \alpha = n, \end{cases} && \text{при } |x| \leqslant 1, \\ |\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|)| &\leqslant c|x|^{\alpha-n-\ell-1}, && \text{при } |x| > 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Для ядра $\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|)$ известна формула [1, (3.66)]

$$F(\mathscr{K}_{\ell,\alpha})(\xi) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)|\xi|^\alpha} \int\limits_{|y|>1} \frac{(1-e^{i\xi y})^\ell}{|y|^{n+\alpha}}\, \mathrm{d}y, \tag{8}$$

где $(F\varphi)(x) = \widehat{\varphi}(x)$ — преобразование Фурье функции φ.

Топология в шварцевом пространстве $\mathscr{S}$ задается счетным набором (полу)норм

$$\nu_{k,j}(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k |(D^j\omega)(x)|, \quad k \in N_0, \;\; j \in N_0^n, \;\; \omega \in \mathscr{S}.$$

Сходимость последовательности $\omega_m \to \omega$ в топологии $\mathscr{S}$ означает, что

$$\lim_{m\to\infty} \nu_{k,j}(\omega_m - \omega) = 0$$

для любых фиксированных k и j.

Пространство Лизоркина Φ основных функций и двойственное пространство $\Psi = F(\Phi)$ являются замкнутыми подпространствами в $\mathscr{S}$ относительно указанной топологии, при этом на функциях $\omega \in \mathscr{S}$ эта топология эквивалентна топологии, задаваемой полунормами

$$\nu_{k,l,j}(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^l \big(1+|x|\big)^k \big|\big(D^j\omega\big)(x)\big|, \quad k \in N_0,\ l \in Z,\ j \in N_0^n,\ \omega \in \mathscr{S}.$$

Напомним, что $\Phi' = \mathscr{S}'/\mathscr{P}$, где $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ есть фактор-пространство пространства $\mathscr{S}'$ по множеству $\mathscr{P}$ всех многочленов (см. [1, с. 41]).

Лемма 2.1. *Пространство Φ инвариантно относительно оператора усеченного гиперсингулярного интегрирования $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, и оператора свертки $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

$\lhd$ Доказательство леммы см. в работе [5]. $\rhd$

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Оператор $K^{\ell,\alpha} = K^{\ell,\alpha}_\varepsilon|_{\varepsilon=1}$ непрерывен в пространстве Φ.*

$\lhd$ Покажем, прежде всего, что оператор $K^{\ell,\alpha}$ сохраняет пространство Φ. Достаточно показать, что умножение на преобразование Фурье ядер этих операторов сохраняет двойственное пространство $\Psi = F(\Phi)$.

Обозначив $m(\xi) := \widehat{\mathscr{K}_{\ell,\alpha}}(\xi)$, переходя в (8) к полярным координатам, после замен подобия и вращения получаем

$$m(\xi) = \int\limits_{|\xi|}^{\infty} \frac{E(\rho)}{\rho^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}\rho, \tag{9}$$

где $E(\rho) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)} \int_{S^{n-1}} (1 - e^{i\rho\sigma_1})^\ell\,\mathrm{d}\sigma$. Легко видеть, что $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, все производные функции m стремятся к 0 при $|\xi| \to \infty$ и имеют не более, чем степенной рост при $|\xi| \to 0$, что и гарантирует указанное сохранение пространства Ψ при умножении на $m(\xi)$.

Доказательство непрерывности умножения на $m(\xi)$ требует более аккуратных рассуждений. Пусть последовательность функций $\psi_s(x)$, $s \in N$, из Ψ сходится к 0 в топологии пространства $\mathscr{S}$: $\lim_{s\to\infty} \nu_{k,j}(\psi_s) = 0$ для всех k и j. Нужно проверить, что $\lim_{s\to\infty} \nu_{k,j}(m\psi_s) = 0$ для того же множества индексов k и j. Имеем

$$D^j(m(x)\psi_s(x)) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} D^i m(x) D^{j-i}\psi_s(x),$$

$$D^i m(x) = \sum_{|k|=1} \frac{x^k}{|x|} D^{i-k}\left(\frac{E(|x|)}{|x|^{1+\alpha}}\right) = \sum_{|k|=1} \frac{x^k}{|x|} \sum_{0\leqslant h\leqslant i-k} \begin{pmatrix} i-k \\ h \end{pmatrix} D^h\left(|x|^{-1-\alpha}\right) D^{i-k-h} E(|x|),$$

$D^h\left(|x|^{-1-\alpha}\right) = |x|^{-1-\alpha-|h|} P_h(x)$, где $P_h(x)$ — однородный многочлен степени $|h|$. Так как $\left|D^h\left(|x|^{-1-\alpha}\right)\right| \leqslant C|x|^{-1-\alpha-|h|}$ и $|D^j E(|x|)| \leqslant C|x|^{\ell-|j|}$, то

$$|D^i m(x)| \leqslant C|x|^{1-\alpha-|h|+\ell-|i|+1+|h|} \leqslant C|x|^{-\alpha+\ell-|i|}. \tag{10}$$

Отсюда $|D^i m(x)| \leqslant C|x|^{-1-[\alpha]+\ell-|i|}$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α. Следовательно, $\nu_{k,j}(m\psi_s) \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant j} C(i,j)\nu_{k,\ell-1-[\alpha]-|i|,j-i}(\psi_s)$. Отсюда в силу эквивалентности топологий, задаваемых полунормами $\nu_{k,j}$ и $\nu_{k,\ell,j}$, получим $\lim_{s\to\infty}\nu_{k,j}(m\psi_s) = 0$, что и требовалось. $\triangleright$

Следствие 3.2. *Оператор $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$ непрерывен в пространстве Φ для любого $\varepsilon > 0$.*

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что в образах Фурье имеем $\widehat{\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon\omega}(\xi) = |\xi|^\alpha m(\varepsilon\xi)\widehat{\omega}(\xi)$, где $|\xi|^\alpha m(\varepsilon\xi)$ является мультипликатором в Ψ, коль скоро m является там мультипликатором в силу леммы 3.1. $\triangleright$

Лемма 3.3. *Операторы $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ в пространстве Φ к единичному оператору.*

$\triangleleft$ Нужно доказать, что для произвольной функции $\omega \in \Phi$ выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_{k,j}(K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\omega - \omega) = 0, \quad k \in N_0,\ j \in N_0^n. \tag{11}$$

Напомним, что согласно лемме 3.1 операторы $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ сохраняют пространство Φ. Так как топология в пространстве $F(\mathscr{S})$, индуцированная из пространства Шварца $\mathscr{S}$, совпадает с топологией пространства $\mathscr{S}$, то (11) равносильно соотношениям

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_{k,j}([m(\varepsilon x) - 1]\psi(x)) = 0, \quad k \in N_0,\ j \in N_0^n, \tag{12}$$

где m — функция (9) и $\psi = \widehat{\omega} \in \Psi$.

Рассмотрим сначала случай $j = 0$. Надо показать, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x) - 1||\psi(x)| = 0$. Имеем $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)| = \max\{S_1(\varepsilon), S_2(\varepsilon)\}$, где

$$S_1(\varepsilon) := \sup_{|x|<1}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)|, \quad S_2(\varepsilon) := \sup_{|x|\geqslant 1}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)|.$$

Для $S_1(\varepsilon)$ имеем $S_1(\varepsilon) \leqslant \nu_{k,j}(\psi)\sup_{|x|<1}|m(\varepsilon x) - 1|$. Так как $m(0) = \widehat{\mathscr{K}_{\ell,\alpha}}(0) = 1$ и $m(x)$ непрерывна, то $\lim_{\varepsilon\to 0} S_1(\varepsilon) = 0$.

Для $S_2(\varepsilon)$, учитывая, что для любого числа $\mu > 0$ справедлива оценка $|\psi(x)| \leqslant C|x|^{-k-\mu}$, где выбором μ распорядимся позже, получим

$$S_2(\varepsilon) \leqslant C\sup_{|x|>1}|x|^{-\mu}|m(\varepsilon x) - 1| = C\varepsilon^\mu \sup_{|x|>1}\frac{|m(\varepsilon x)-1|}{(\varepsilon|x|)^\mu}.$$

Остается показать, что при некотором выборе μ функция $|m(y) - 1||y|^{-\mu}$ ограничена. При $|y| \geqslant 1$ эта ограниченность очевидна для любого $\mu > 0$. Когда $|y| < 1$ воспользуемся формулой (9) и тем фактом, что $1 = \widehat{\mathscr{K}_{\ell,\alpha}}(0)$, в силу чего

$$\frac{|m(y)-1|}{|y|^\mu} = \frac{1}{|y|^\mu}\int\limits_0^{|y|}\frac{E(\rho)}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho.$$

Легко видеть, что здесь правая часть ограничена при выборе $\mu \geqslant \ell - \alpha$.

Перейдем к случаю $j \neq 0$. Имеем

$$D^j\big([m(\varepsilon x)-1]\psi(x)\big) = \big[m(\varepsilon x)-1\big]D^j\psi(x) + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j,\\ i\neq 0}} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \Lambda_i(\varepsilon,x), \tag{13}$$

где $\Lambda_i(\varepsilon,x) := \varepsilon^{|i|}(D^i m)(\varepsilon x)D^{j-i}\psi(x)$. Первое слагаемое в (13) уже оценено выше поскольку $D^j\psi(x)\in\Psi$, $j\in N_0^n$. Для $\Lambda(\varepsilon,x)$ с учетом оценки (10) получим

$$|\Lambda(\varepsilon,x)| \leqslant \varepsilon^{\ell-\alpha}C_{i,j}|x|^{\ell-\alpha-|i|}|D^{j-i}\psi(x)|.$$

Отсюда приходим к оценке $\nu_{k,j}(\Lambda(\varepsilon,x)) \leqslant C\varepsilon^{\ell-\alpha}\nu_{k,\ell-1-[\alpha]-|j|,j-i}(\psi)$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Резюмируя, приходим к (12). $\rhd$

4. Основные утверждения

4.1. Описание в терминах распределений.

Определение 4.1. Пусть X — линейное подмножество в Φ' и $f\in\Phi'$. Будем говорить, что $f\in I^\alpha(X)$, $\alpha>0$, если существует распределение $\varphi\in X$ такое, что

$$(f,\omega) = (\varphi, I^\alpha\omega) \tag{14}$$

для всех $\omega\in\Phi$ (напомним, что пространство Φ инвариантно относительно оператора I^α).

В последующем усеченные гиперсингулярные интегралы (2) обощенной функции $f\in\Phi'$ определяются равенством

$$(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) := (f,\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon\omega) \tag{15}$$

с учетом инвариантности пространства Φ относительно оператора $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, см. лемму 2.1.

Теорема 4.2. *Пусть X — линейное подмножество пространства Φ'. Следующие утверждения равносильны:*

(P_1) $f\in I^\alpha(X)$;

(P_2) *существует элемент $\phi\in X$ такой, что $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ сходится к ϕ в Φ' :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (\phi,\omega), \quad \omega\in\Phi,$$

при этом элемент ϕ и элемент φ из (14) *совпадают как элементы пространства* Φ'.

$\lhd$ Покажем, что $(P_1)\Rightarrow(P_2)$. В силу (3) и следствия 3.2 при любом фиксированном $\varepsilon>0$ имеем $(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\ \omega) = (f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon\omega) = (f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon I^\alpha\mathbb{D}^\alpha\omega)$, где мы воспользовались тем, что $\omega = I^\alpha\mathbb{D}^\alpha\omega$ для $\omega\in\Phi$.

Тогда в силу формулы (5) имеем $(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (f, K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\mathbb{D}^\alpha\omega)$. Так как $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\mathbb{D}^\alpha\omega\in\Phi$ в силу леммы 2.1 и операторы $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ и $\mathbb{D}^\alpha$ коммутируют на функциях из Φ, то по определению образа $I^\alpha(X)$ существует функция $\varphi\in X$, такая что

$$(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (\varphi, K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\omega). \tag{16}$$

В силу леммы 3.3 получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (\varphi, \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (\mathscr{S})}} K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\omega) = (\varphi,\omega)$. Следовательно, $\phi=\varphi$ и (P_2) получено.

Докажем $(P_2) \Rightarrow (P_1)$. Рассуждая как и в предыдущем пункте, только в обратном направлении, имеем

$$\begin{aligned}(\phi,\omega) &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\ \omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon \omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon I^\alpha \mathbb{D}^\alpha\omega)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(f,\ K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \mathbb{D}^\alpha\omega) = (f,\ \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (\mathscr{S})}} K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \mathbb{D}^\alpha\omega) = (f,\mathbb{D}^\alpha\omega).\end{aligned}$$

Таким образом, $(f,\mathbb{D}^\alpha\omega) = (\phi,\omega)$. Следовательно, $(\phi, I^\alpha\omega) = (f,\omega)$, $\omega\in\Phi$, что завершает доказательство теоремы. $\rhd$

4.2. Об априорных предположениях о банаховом пространстве X. В следующем пункте мы изучаем образ $I^\alpha(X)$ потенциала Рисса, трактуемый в смысле распределений, где X — произвольное банахово пространство функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее некоторым априорным предположениям.

В различных утверждениях ниже будет использоваться одно или несколько из следующих свойств пространства X:

(S_1) Пространство X обладает свойством решетки: если $\varphi\in X$ и $|\psi(x)|\leqslant|\varphi(x)|$, $x\in\mathbb{R}^n$, то $\psi\in X$ и $\|\psi\|_X\leqslant\|\varphi\|_X$.

(S_2) Пространство X не содержит многочлен.

(S_3) Максимальный оператор $M\varphi(x) := \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|\varphi(y)|dy$ ограничен в X.

(S_4) Операторы $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ являются аппроксимацией единицы: $\lim_{\varepsilon\to 0}\|K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\varphi-\varphi\|_X = 0$ для всех $\varphi\in X$.

(S_5) Пространство X', ассоциированное с X, содержит класс Φ.

Напомним, что ассоциированным с X называется пространство X' функций ψ на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\psi(x)\,dx\right| < \infty\ \ (\forall\,\varphi\in X), \qquad \|\psi\|_{X'} = \sup_{\|\varphi\|_X=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\psi(x)\,dx\right|,$$

см. [6, с. 9].

Замечание 4.3. При наличии свойства (S_1) в свойстве (S_2) достаточно потребовать, чтобы константы, отличные от нуля, не принадлежали бы пространству X.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения об ограниченности операторов свертки в пространстве X.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ класс ядер $k(x)$, удовлетворяющих условиям $|k(x)|\leqslant\mathscr{K}(|x|)$, где $\mathscr{K}(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{K}(r), r\in\mathbb{R}_+$, убывает, и

$$K_\varepsilon\varphi := \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} k\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varphi(y)\,dy.$$

Хорошо известно (см., например, [7, гл. 5, § 2.1] поточечное неравенство $|K_\varepsilon\varphi(x)|\leqslant cM\varphi(x)$, где $k\in\mathfrak{K}$. Из этого неравенства следует утверждение.

Предложение 4.4. *Пусть $k\in\mathfrak{K}$. Операторы K_ε равномерно ограничены в любом пространстве X со свойствами (S_1) и (S_3).*

Для нас более содержательным является следующее утверждение:

Лемма 4.5. *Пусть $0<\alpha<\infty$ и $\ell>\alpha$. Тогда $\mathscr{K}_{\ell,\alpha}\in\mathfrak{K}$.*

$\lhd$ Утверждение леммы следует из оценки (7). $\rhd$

4.3. Описание в терминах сходимости по норме пространства X. В дальнейшем считаем, что X — банахово пространство функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_X$.

Определение 4.6. Будем говорить, что значение параметра $\alpha > 0$ является естественно соответствующим пространству X, если функционал $f \in I^\alpha(X)$ является регулярным и с точностью до многочлена совпадает со сходящимся интегралом (1) для всех $\varphi \in X$ таких, что $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x-y)\varphi(y)\,dy + P(x)$, $\varphi \in X$. В этом случае первое слагаемое в правой части будем называть интегральным представителем функционала $f \in I^\alpha(X)$.

Например, в случае $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, значениями α, естественно соответствующими пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$, являются $\alpha \in \left(0, \frac{n}{p}\right)$. В случае весового пространства

$$L^p_\gamma(\mathbb{R}^n) := \left\{\varphi : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p (1+|x|)^\gamma dx < \infty\right\}, \quad \gamma > -n,$$

указанный интервал заменяется интервалом $\alpha \in (0, \frac{n+\gamma}{p})$. В случае когда X есть пространство Орлича интервал для естественно соответствующих значений α может быть получен в терминах индексов Матушевской — Орлича и условия сходимости интеграла в формуле (27) следующего параграфа, на чем мы не останавливаемся. Пусть теперь X — так называемое гранд-пространство Лебега $\mathring{L}^{p)}_a(\mathbb{R}^n)$ с грандизатором $a(x)$ (см. определение в (22)). Такие пространства исследовались в работах [5, 8, 9, 10]. В этом случае интервал естественно соответствующих значений α тот же, что и для обычных пространств Лебега при условиях $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$a^\delta \in A_\infty \tag{17}$$

при некотором $\delta > 0$, где A_∞ известный класс Макенхаупта.

Теорема 4.7 (Необходимые условия)**.** *Пусть X удовлетворяет предположению (S_4) и $f \in I^\alpha(X)$ в смысле определения 4.1. Тогда $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ есть регулярный функционал, совпадающий с некоторой функцией из X с точностью до многочлена:*

$$\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f = \varphi_\varepsilon(x) + P_\varepsilon(x), \quad \varphi_\varepsilon \in X, \tag{18}$$

и существует функция $\varphi \in X$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_X = 0. \tag{19}$$

Если пространство X обладает свойством (S_2) и f означает интегральный представитель функционала $f \in I^\alpha(X)$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f - \varphi\|_X = 0. \tag{20}$$

$\lhd$ Воспользуемся представлением (16). Условие (S_4) подразумевает ограниченность оператора $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ в пространстве X (по крайней мере для малых ε). Поэтому из (16) имеем $(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f, \omega) = (K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi, \omega)$. Так как $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi$ является регулярным функционалом, то $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ также регулярный функционал. Тогда функции $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ и $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi$, совпадающие как элементы пространства Φ', различаются разве лишь многочленом:

$$\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f = K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi + P_\varepsilon(x). \tag{21}$$

Отсюда следует утверждение (18) с $\varphi_\varepsilon = K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi$, а также в силу свойства (S_4) и утверждение (19).

Пусть теперь α — значение, естественно соответствующее пространству X. Так как оператор $K_\varepsilon^{\ell,\alpha}$ сохраняет пространство X, то в силу свойства (S_2) функционал $K_\varepsilon^{\ell,\alpha}\varphi$ не может содержать полиномиального слагаемого. Покажем, что левая часть также не содержит полиномиального слагаемого, что будет означать $P_\varepsilon(x) = 0$. Так как в левой части f есть интегральный представитель функционала $f \in I^\alpha(X)$, то f представима обычным интегралом, т. е. как свертка функции $\varphi \in X$ с ядром $k_\alpha(x)$. Тогда ни при каких α функция $f(x)$ не может вести себя на бесконечности как многочлен. Следовательно, равенство (21) возможно только когда $P_\varepsilon(x) = 0$, и мы получаем (20). $\rhd$

Рассмотрим отдельно случай когда пространство X инвариантно относительно сдвига: $\|\tau_h\varphi\|_X \leqslant C(h)\|\varphi\|_X$, где $\tau_h\varphi = \varphi(x-h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, и $C(h)$ локально ограничена: $\sup_{|h|<N} C(h) =: C_N < \infty$. В этом случае для функций $f \in I^\alpha(X)$ можно дать дополнительную информацию о поведении их конечных разностей. Конечные разности обобщенных функций $f \in \Phi'$ определяются обычным образом: $(\Delta_h^\ell f, \omega) := (f, \Delta_{-h}^\ell \omega)$.

Теорема 4.8. *Пусть пространство X инвариантно относительно сдвига и обладает свойствами (S_1) и (S_3). Если $f \in I^\alpha(X)$, то конечные разности $\Delta_h^\ell f$ порядка $\ell > \alpha$ являются регулярными функционалами и существует многочлен $P_h(x)$ такой, что $\Delta_h^\ell f - P_h(x) \in X$ при любом $h \in \mathbb{R}^n$.*

$\lhd$ Стандартными перебросами на основные функции с учетом формулы (4), инвариантности класса Φ относительно потенциала Рисса и свертки с ядром $\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot,h)$, получаем

$$(\Delta_h^\ell f, \omega) = (f, \Delta_{-h}^\ell \omega) = (\varphi, I^\alpha(\Delta_{-h}^\ell \omega))$$
$$= (\varphi, \Delta_{-h}^\ell I^\alpha \omega) = (\varphi, \Delta_{\ell,\alpha}(\cdot,-h) * \omega)) = (\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot,h) * \varphi, \omega).$$

Следовательно, $\Delta_h^\ell f$ и $\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot,h) * \varphi$ совпадают как обобщенные функции из Φ', что и доказывает регулярность функционала $\Delta_h^\ell f$.

Остается доказать, что $\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot,h) * \varphi \in X$. Основываемся для этого на предложении 4.4, применимом при условиях теоремы. Заметим, что ядро $\Delta_{\ell,\alpha}(x,h)$ при больших значениях $|x|$ имеет оценку ([1, (3.51)]) $|\Delta_{\ell,\alpha}(x,h)| \leqslant c|h|^\ell(|x|+|h|)^{\alpha-n-\ell}$, $|x| \geqslant (\ell+1)|h|$. Поэтому ядро $\Delta_{\ell,\alpha}(x,h)$ можно представить в виде

$$\Delta_{\ell,\alpha}(x,h) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \begin{pmatrix} \ell \\ i \end{pmatrix} k_\alpha(x-ih)\chi_{B\left(0,\frac{|h|}{2}\right)}(x-ih) + J(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\chi_{B(0,r)}(x)$ — характеристическая функция шара $B(0,r)$, а ядро $J(x)$ имеет оценку $|J(x)| \leqslant \frac{c|h|^\ell}{(1+|x|)^{n-\alpha+\ell}}$, и, следовательно, принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Принадлежность функции $k_\alpha(x)\chi_{B\left(0,\frac{|h|}{2}\right)}(x)$ классу $\mathfrak{K}$ очевидна. Остается сослаться на инвариантность пространства X относительно сдвига. $\rhd$

Теорема 4.9 (Достаточные условия). *Пусть $\alpha > 0$ и $f \in \Phi'$ и $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$, $\varepsilon > 0$, — обобщенные функции, определенные равенством* (15). *Если пространство X обладает свойством (S_5), $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \in X$ и существует $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\(X)}} \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f = \varphi$, то $f \in I^\alpha(X)$ в смысле определения* 4.1 *и $f = I^\alpha\varphi$.*

$\lhd$ Имеем $|(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi, \omega)| \leqslant \|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_X \|\omega\|_{X'} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу свойства (S_5). Таким образом, $\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f, \omega) = (\varphi, \omega)$ для всех $\omega \in \Phi$ и тогда $f \in I^\alpha(X)$ в силу эквивалентности утверждений (P_1) и (P_2) теоремы 4.2. $\rhd$

Следствие 4.10. *Пусть пространство X обладает свойствами (S_2), (S_4) и (S_5). Для того, чтобы $f \in I^\alpha(X)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \in X$ и $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ имело вид* (18), *где φ_ε сходится в пространстве X при $\varepsilon \to 0$.*

Подчеркнем, что в этом параграфе мы фактически полностью исследовали вопрос об описании образа $I^\alpha(X)$, $\alpha > 0$, для произвольного пространства X функций на $\mathbb{R}^n$ при выполнении некоторых априорных предположений о пространстве X. Однако, это сделано при условии, что оператор I^α понимается в смысле распределений. Существенный интерес представляет описание абсолютно сходящихся интегралов $I^\alpha\varphi$, $\varphi \in X$. Это, однако, требует работы в конкретном пространстве: допустимые значения α зависят тогда от пространства X. В следующем параграфе мы касаемся этого вопроса для некоторых классических и нестандартных функциональных пространств. Кроме того, в следующем параграфе рассматривается вопрос о выполнимости для них свойств (S_1)–(S_5).

5. О выполнимости свойств (S_1)–(S_5) и о пространстве $I^\alpha(X)$ со значениями α, естественно соответствующими пространству X

В приведенной ниже теореме показано, что все свойства (S_1)–(S_5) выполняются для пространств X_i из следующего списка при соответствующих предположениях о параметрах пространств:

• классические пространства Лебега $X_1 = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$;

• весовые пространства $X_2 = L^p(\mathbb{R}^n, w)$, $1 < p < \infty$, где w — вес Макенхаупта;

• гранд-пространства Лебега $X_3 = \mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, функций f, удовлетворяющих условиям

$$\|f\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^\theta \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \tag{22}$$

и $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{p\theta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx = 0$, где $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и a удовлетворяет условию (17).

• пространства Лебега $X_4 = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем $p(x)$ (см. [11, 12, 13]), где $1 < \inf_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) < \infty$, определяемые нормой

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leqslant 1 \right\},$$

где $p(x)$ удовлетворяет стандартным для таких пространств условиям:

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{\ln\frac{1}{|x-y|}}, \quad |x-y| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |p(x) - p(\infty)| \leqslant \frac{C}{\ln\frac{1}{e+|x|}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n;$$

• пространства Орлича $X_5 = L^M(\mathbb{R}^n)$, где M — функция Юнга, функция M и дополнительная к ней удовлетворяют условию удвоения.

Теорема 5.1. *Каждое из пространств X_1–X_5 при указанных выше предположениях обладает всеми свойствами (S_1)–(S_5).*

$\lhd$ Выполнимость свойства (S_1) очевидна.

Свойство (S_2) для пространства X_1 также очевидно. Для пространства X_2 с учетом замечания 4.3 оно следует из свойства $\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\, dx = \infty$ весов Макенхаупта; см., например, [14, лемму 7.5], откуда вытекает указанное свойство. Для пространства X_3 свойство (S_2) следует из вложения

$$\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p-\varepsilon}\big(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\big), \quad 0 < \varepsilon < p-1, \tag{23}$$

с учетом свойства (17); доказательство этого вложения можно найти в [8]. Свойство (S_2) для пространств X_4 и X_5 очевидно.

Свойство (S_3) для пространств X_1 и X_2 хорошо известно, см., например, [14, теорему 7.3]. Для гранд-пространства X_3 свойство (S_3) доказано в [9], а для пространства X_4 — в работе [15]. Для пространства X_5 свойство (S_3) доказано в [16], см. также [17, теорему 2.1.1].

Свойство (S_4) для пространств X_1 и X_2 является следствием известных теорем об аппроксимации единицы в весовых пространствах, см. [1, теорему 7.31]. Свойство (S_4) для пространства X_3 доказано в [9]. Для пространства X_4 свойство (S_4) следует с учетом леммы 4.5 из общей теоремы об аппроксимации единицы в пространствах Лебега с переменным показателем, см. [11, теорему 5.11], а для пространства X_5 установлено в [18].

Свойство (S_5) для пространств X_1, X_2, X_4 и X_5 очевидно. Для пространства X_3 в силу вложения (23) имеем

$$L^{(p-\varepsilon)'}\left(\mathbb{R}^n, a^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon-1)}}\right) = \left[L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)\right]' \subset \left[L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)\right]'. \tag{24}$$

Ввиду (17) имеем $a^{\frac{\varepsilon}{p}} \in A_{p-\varepsilon}$ при некотором ε и тогда $a^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon-1)}} \in A_{(p-\varepsilon)'}$. Вложение $\Phi \subset L^{(p-\varepsilon)'}\left(\mathbb{R}^n, a^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon-1)}}\right)$ очевидно, что в силу вложения в (24) доказывает свойство (S_5). $\rhd$

Дадим также информацию об импликациях

$$f \in I^\alpha(X) \Rightarrow f \in X^\alpha \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \text{ сходятся в } X, \tag{25}$$

$$f \in X^\alpha \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \text{ сходятся в } X \Rightarrow f \in I^\alpha(X), \tag{26}$$

где X^α — некоторое пространство, определяемое исходным пространством X и параметром α, для пространств X из того же списка. Для них известно следующее:

1. Пусть $0 < \alpha < \frac{n}{p}$. Импликации (25) и (26) с $X^\alpha = L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, известны давно, см. [1, с. 532–538], [19], [20, с. 179–184]. Отметим также работу [21], где описание пространства $I^\alpha(L^p)$ получено в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов малого порядка от старших производных, т. е. конструкций вида $\mathbb{D}_\varepsilon^{\alpha-[\alpha]} D^j f$, $|j| = [\alpha]$; в случае целых α пространство $I^\alpha(L^p)$ совпадает с пространством типа Соболева

$$W^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^q(\mathbb{R}^n),\ D^j f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ для всех } \ j \text{ таких, что } |j| = \alpha\right\}.$$

2. Аналогичные результаты для пространств Лебега с весами Макенхаупта получены в [22].

3. Для гранд-пространств Лебега $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, импликации (25) и (26) с $X^\alpha = \mathring{L}_a^{q),\theta}(\mathbb{R}^n)$ доказаны в [9] и [5] соответственно в предположении, что a удовлетворяет условию (17).

4. Для пространств Лебега $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем $p(x)$ импликации (25) и (26) с $X^\alpha = L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$, получены в [23] и [24] соответственно. Эти результаты можно найти также в книге [13].

5. Пусть $M^{-1}(u)$ обозначает функцию, обратную к функции Юнга $M(u)$, и α таково, что интеграл $\int_0^u t^{-\frac{\alpha}{n}-1} M^{-1}(t)\,dt$ сходится и функция $M_\alpha(u)$ определяется своей обратной:

$$M_\alpha^{-1}(u) = \int\limits_0^u \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+\frac{\alpha}{n}}}\,dt. \tag{27}$$

Следующие утверждения равносильны см. [1, с. 220–223], [18]:
1) $f \in I^\alpha(L^M)$;
2) $f \in L^{M_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{D}^\alpha f \in L^M(\mathbb{R}^n)$.

Литература

1. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London–N. Y.: Taylor & Francis, 2002.—358+xvii p.—(Ser. Analytical Methods and Special Functions. Vol. 5).
2. *Rafeiro H., Samko S.* Fractional integrals and derivatives: mapping properties // Fract. Calc. Appl. Anal.—2016.—Vol. 19, № 3.—P. 580–607. DOI: 10.1515/fca-2016-0032.
3. *Stein E. M.* The characterization of functions arising as potentials // Bull. Amer. Math. Soc.—1961.—Vol. 67, № 1.—P. 102–104.
4. *Лизоркин П. И.* Описание пространства $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Мат. сб.—1970.—Т. 81, № 1.—С. 79–91.
5. *Умархаджиев С. М.* Описание пространства риссовых потенциалов функций из град-пространства Лебега на $\mathbb{R}^n$ // Математические заметки.—2018.—(В печати).
6. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators.—Boston: Academic Press Inc., 1988.—(Pure Appl. Math. Vol. 129).
7. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.—xiii+695 p.
8. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Известия вузов. Математика.—Изв. вузов. Сер. Математика.—2014.—Т. 4.—С. 42–51.
9. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Riesz fractional integrals in grand Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal.—2016.—Vol. 19, № 3.—P. 608–624. DOI: 10.1515/fca-2016-0033.
10. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure // Mathematische Nachrichten.—2017.—Vol. 290, № 5–6.—P. 913–919. DOI:10.1002/mana.201600136.
11. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis.—Birkhauser, 2013.—316 p.—(Appl. Numerical Harmonic Anal.).
12. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., and Růžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.—Berlin: Springer-Verlag, 2011.—(Lecture Notes in Math. Vol. 2017). DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
13. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S.* Integral Operators in Non-standard Function Spaces. Vol. I. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces.—Birkhäser, 2015.—586 p.
14. *Duoandikoetxea J.* Fourier Analysis.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2001.—(Graduate Studies. Vol. 29).
15. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A., and Neugebauer C. J.* The maximal function on variable L^p-spaces // Ann. Acad. Scient. Fennicae. Math.—2003.—Vol. 28.—P. 223–238.
16. *Kerman R., Torchinsky A.* Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function // Stud. Math.—1982.—Vol. 71.—P. 277–284.
17. *Kokilashvili V., Krbec M.* Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces.—Singapore: World Scientific Publ., 1991.—233 p.
18. *Чувенков А. Ф.* Пространства Соболева — Орлича дробного порядка // Изв. Сев.-Кавк. центра высш. школы. Сер. естеств. наук.—1978.—Т. 1.—С. 6–10.
19. *Самко С. Г.* О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1976.—Т. 40, № 5.—С. 1143–1172.
20. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.—London–N. Y.: Gordon & Breach. Sci. Publ., 1993.—1012 p.
21. *Самко С. Г., Умархаджиев С. М.* Описание пространства риссовых потенциалов в терминах старших производных // Изв. вузов. Сер. Математика.—1980.—Т. 11.—С. 79–82.
22. *Kokilashvili V., Meskhi A., and Samko S.* On the inversion and characterization of the Riesz potentials in the weighted Lebesgue spaces // Memoirs on Differential Equations and Mahematical Physics.—2003.—Vol. 29.—P. 99–106.
23. *Almeida A.* Inversion of the Riesz Potential Operator on Lebesgue Spaces with Variable Exponent // Frac. Calc. Appl. Anal.—2003.—Vol. 6, № 3.—P. 311–327.
24. *Almeida A., Samko S.* Characterization of Riesz and Bessel potentials on variable Lebesgue spaces // J. Function Spaces and Applic.—2006.—Vol. 4, № 2.—P. 113–144.

Статья поступила 29 марта 2018 г.

Самко Стефан Григорьевич, *профессор*
Университет Алгарве
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, Portugal
E-mail: ssamko@ualg.pt
https://orcid.org/0000-0002-8022-2863

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Комплексный научно-исследовательский
институт им. Х. И. Ибрагимова РАН
РОССИЯ, 364051, Грозный, Старопромысловское шоссе, 21 а
ведущий научный сотрудник;
Академия наук Чеченской Республики
РОССИЯ, 364024, Грозный, пр-кт им. М. Эсамбаева, 13
заведующий отделом прикладной семиотики
E-mail: umsalaudin@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8283-1515

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 95–108

ON A CHARACTERISATION OF THE SPACE OF RIESZ POTENTIAL OF FUNCTIONS IN BANACH SPACES WITH SOME À PRIORI PROPERTIES

Samko S. G.[1], Umarkhadzhiev S. M.[2,3]

[1] Universidade do Algarve Campus de Gambelas;
[2] Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences;
[3] Academy of Sciences of the Chechen Republic

Abstract. We consider the problem of describing the space $I^\alpha(X)$ of functions representable by the Riesz potential $I^\alpha\varphi$ with density φ in the given space X. It is assumed that $X \subset \Phi'$, where Φ' is the space of distributions over the Lizorkin test function space Φ, invariant with respect to Riesz integration, and the range $I^\alpha(X)$ is understood in the sense of distributions. In this general setting, we study the question under what assumptions on the space X the inclusion of the element f in to the range $I^\alpha(X)$ is equivalent to the convergence of the truncated hypersingular integrals $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ in the space X. For this purpose, this question is first investigated in the context of the topology of the space Φ. Namely, for any linear subset X in Φ' it is shown that the inclusion of f into the range $I^\alpha(X)$ is equivalent to the convergence of truncated hypersingular integrals on the set X in the topology of the space Φ'. If X is a Banach space, the passage from the inclusion into the range to the convergence of truncated hypersingular integrals in the norm is proved up to an additive polynomial term under the assumption that some special convolution is an identity approximation in the space X. It is known that the latter holds for many Banach function spaces and is valid for function spaces X where the maximal operator is bounded. The inverse passage is proved for the Banach function space X enjoying the property that the associated space X' includes the Lizorkin test function space.

Key words: Riesz potential, space of Riesz potentials, hypersingular integral, distributions, grand Lebesgue space, Lizorkin test functions space, identity approximation, Orlicz space, variable order Lebesgue space.

References

1. *Samko S. G. Hypersingular Integrals and their Applications*, London–N. Y., Taylor & Francis, 2002, 358+xvii p. (Ser. Analytical Methods and Special Functions, vol. 5).
2. *Rafeiro H., Samko S.* Fractional Integrals and Derivatives: Mapping Properties. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 580–607. DOI: 10.1515/fca-2016-0032.
3. *Stein E. M.* The Characterization of Functions Arising as Potentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1961, vol. 67, no. 1, pp. 102–104.
4. *Lizorkin P. I.* Description of the Spaces $L^r_p(R^n)$ in Terms of Singular Difference Integrals. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 77–89. DOI: 10.1070/SM1970v010n01ABEH001587.
5. *Umarkhadzhiev S. M.* Description of a Space of Riesz Potentials of Functions from Grand Lebesgue Space on $\mathbb{R}^n$. *Math. Notes*, 2018 (in print).
6. *Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. Ser. Pure Appl. Math., vol.* 129, Boston, Academic Press Inc., 1988.

7. *Stein E. M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1993, xiii+695 p.
8. *Umarkhadzhiev S. M.* Generalization of a Notion of Grand Lebesgue Space, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 35—43. DOI: 10.3103/S1066369X14040057.
9. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Riesz Fractional Integrals in Grand Lebesgue Spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 608–624. DOI: 10.1515/fca-2016-0033.
10. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Grand Lebesgue Spaces on Sets of Infinite Measure, *Mathematische Nachrichten*, 2017, vol. 290, no. 5–6, pp. 913–919. DOI: 10.1002/mana.201600136.
11. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhauser, 2013, 316 p.
12. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., and Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Ser. Lecture Notes in Math., vol.* 2017, Berlin, Springer-Verlag, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
13. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S. Integral Operators in Non-standard Function Spaces, vol. I. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces*, Birkhäser, 2015, 586 p.
14. *Duoandikoetxea J. Fourier Analysis. Ser. Graduate Studies, vol.* 29, Providence (R. I.), Amer. Math. Soc., 2001.
15. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A., and Neugebauer C. J.* The Maximal Function on Variable L^p-spaces. *Ann. Acad. Scient. Fennicae. Math.*, 2003, vol. 28, pp. 223–238.
16. *Kerman R., Torchinsky A.* Integral Inequalities with Weights for the Hardy Maximal Function, *Stud. Math.*, 1982, vol. 71, pp. 277–284.
17. *Kokilashvili V., Krbec M. Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Singapore, World Scientific Publ., 1991, 233 p.
18. *Chuvenkov A. F.* Sobolev-Orlicz Spaces of Fractional Order. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki* [Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Sciences], 1978, vol. 1, pp. 6–10 (in Russian).
19. *Samko S. G.* On Spaces of Riesz Potentials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1976, vol. 10, no. 5, pp. 1089–1117. DOI: 10.1070/IM1976v010n05ABEH001827.
20. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, London–N. Y., Gordon & Breach. Sci. Publ., 1993, 1012 p.
21. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Description of a Space of Riesz Potentials in Terms of Higher Derivatives. *Soviet Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 1980, vol. 24, no. 11, pp. 95—98.
22. *Kokilashvili V., Meskhi A., and Samko S.* On the Inversion and Characterization of the Riesz Potentials in the Weighted Lebesgue Spaces. *Memoirs on Differential Equations and Mahematical Physics*, 2003, vol. 29, pp. 99–106.
23. *Almeida A.* Inversion of the Riesz Potential Operator on Lebesgue Spaces with Variable Exponent. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2003, vol. 6, no. 3, pp. 311–327.
24. *Almeida A., Samko S.* Characterization of Riesz and Bessel Potentials on Variable Lebesgue Spaces. *J. Function Spaces and Appl.*, 2006, vol. 4, no. 2, pp. 113–144.

Received March 29, 2018

Stefan G. Samko,
Universidade do Algarve Campus de Gambelas,
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, Portugal
E-mail: ssamko@ualg.pt
http://orcid.org/0000-0002-8022-2863

Salaudin M. Umarkhadzhiev
Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,
21a Staropromyslovskoe shosse, Grozny 364051, Russia;
Academy of Sciences of the Chechen Republic,
13 Esambaev av., Grozny 364024, Russia
E-mail: umsalaudin@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-8283-1515