Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 3–9

УДК **517.98**

О СУММЕ УЗКОГО И C-КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРОВ

Н. М. Абасов, М. А. Плиев

Памяти профессора Ганиева И. Г.

В работе рассматриваются узкие линейные операторы, заданные на пространстве Банаха — Канторовича и принимающие значение в банаховом пространстве. Установлено, что сумма двух операторов $S+T$, где S — узкий оператор, а T — (bo)-непрерывный C-компактный оператор, также является узким оператором. Основными техническими инструментами, используемыми для доказательства этого результата, являются: разбиение элемента решеточно-нормированного пространства на дизъюнктные осколки и апроксимация C-компактного оператора конечномерными операторами.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11391.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Банаха — Канторовича, узкий оператор, (bo)-непрерывный оператор, C-компактный оператор.

Узкие операторы, как самостоятельный объект исследования, впервые были рассмотрены в работе [1]. Однако некоторые частные результаты об этих операторах были известны и ранее (подробный исторический обзор можно найти в монографии [2]). Линейные узкие операторы в векторных решетках и решеточно-нормированных пространствах изучались в [3–5]. Позже некоторые результаты о линейных узких операторах были распространены на более общий случай ортогонально аддитивных отображений [6–9]. Следует отметить, что алгебраическая структура множества узких операторов остается плохо понятой и на сегодняшний день. В общем случае сумма двух узких операторов узким оператором не является [10]. В [11] доказана узость суммы узкого оператора и непрерывного оператора конечного ранга, заданных на порядково полной безатомной векторной решетке со значениями в банаховом пространстве. В настоящей заметке показано, что в случае линейных операторов, заданных на пространстве Банаха — Канторовича над порядково полной безатомной векторной решеткой и принимающих значения в банаховом пространстве, сумма узкого оператора и (bo)-непрерывного C-компактного оператора также является узким оператором.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 18-51-41016 (Абасов Н. М.) и № 17-51-12064 (Плиев М. А.).

1. Предварительные сведения

Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Необходимые сведения о векторных решетках и решеточно-нормированных пространствах можно найти в монографии [12].

Пусть V — векторное пространство над полем действительных чисел и E — действительная архимедова векторная решетка. Отображение $|\!\cdot\!| : V \to E_+$ называется *векторной нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $|v| \geqslant 0$; $|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ $(v \in V)$;

2) $|v_1 + v_2| \leqslant |v_1| + |v_2|$ $(v_1, v_2 \in V)$;

3) $|\lambda v| = |\lambda||v|$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ v \in V)$.

Векторная норма называется *разложимой*, если

4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in V$ из представления $|x| = e_1 + e_2$ следует существование $x_1, x_2 \in V$ таких, что $x = x_1 + x_2$ и $|x_k| = e_k$ $(k := 1, 2)$.

Тройка $(V, |\!\cdot\!|, E)$ (далее (V, E), $(V, |\!\cdot\!|)$ или даже V для краткости) называется *решеточно-нормированным пространством*, если $|\!\cdot\!|$ — это E-значная векторная норма, заданная на V. Если векторная норма $|\!\cdot\!|$ разложима, то пространство V также называется *разложимым*.

Будем говорить, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ *(bo)-сходится* к элементу $v \in V$ и писать $v = bo\text{-}\lim v_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ в E_+ такая, что $\inf_{\gamma \in \Gamma}(e_\gamma) = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ существует индекс $\alpha(\gamma) \in \Delta$ такой, что $|v - v_{\alpha(\gamma)}| \leqslant e_\gamma$ для любого $\alpha \geqslant \alpha(\gamma)$. Сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ называется *(bo)-фундаментальной*, если сеть $(v_\alpha - v_\beta)_{(\alpha,\beta) \in \Delta \times \Delta}$ (bo)-сходится к нулю. Решеточно-нормированное пространство называется *(bo)-полным*, если каждая (bo)-фундаментальная сеть (bo)-сходится к элементу этого пространства. Разложимое, (bo)-полное решеточно-нормированное пространство называется *пространством Банаха — Канторовича*.

Пусть X — нормированное пространство. Линейный оператор $T : V \to X$ называется *(bo)-непрерывным*, если любую (bo)-сходящуюся сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ в V оператор переводит в сходящуюся по норме сеть $(Tv_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ в X.

Элемент u решеточно-нормированного пространства (V, E) называется *осколком* элемента $v \in V$, если $|u| \perp |v - u|$. Будем писать $v = \bigsqcup_{i=1}^n v_i$, если $v = \sum_{i=1}^n v_i$ и $v_i \perp v_j$, $i \neq j$. Для $n = 2$ будем писать $v = v_1 \sqcup v_2$. В этом случае осколки v_1, v_2 элемента v называются *взаимно дополнительными*. Множество всех осколков элемента v обозначается через $\mathfrak{F}_v$.

Множество $D \subset V$ называется *ограниченным по норме*, если существует $e \in E_+$ такой, что неравенство $|v| \leqslant e$ выполняется для всех элементов $v \in D$. Пусть теперь $T : V \to X$ — нормированное пространство. Линейный оператор $T : V \to X$ называется *AM-компактным*, если образ $T(D)$ любого ограниченного по норме множества $D \subset V$ предкомпактен в X; *C-компактным*, если для любого $v \in V$ множество $T(\mathfrak{F}_v)$ предкомпактно в X.

Пусть X — векторное пространство. Линейное отображение $T : V \to X$ называется *оператором конечного ранга*, если $T(V)$ — конечномерное подпространство в X.

Пусть X — банахово пространство и S — линейный оператор из V в X. Оператор S называется *узким*, если для любых $v \in V$, $\varepsilon > 0$ найдется пара u, w взаимно дополнительных осколков элемента v таких, что $\|S(u - w)\| < \varepsilon$.

Для подмножеств H и K векторного пространства X будем использовать следующее обозначение: $H + K := \{v + u :\ v \in H;\ u \in K\}$. Сумму $H + \ldots + H$ n-копий множества H будем обозначать через nH.

1. Результаты

Наша цель — показать, что сумма узкого и порядково непрерывного C-компактного оператора является узким оператором. Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты.

Лемма 1 [4, теорема 4.12]. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство. Тогда каждый линейный AM-компактный (bo)-непрерывный оператор $T : V \to X$ является узким.*

Замечание 1. Отметим, что лемма 1 остается верной, если условие AM-компактности оператора заменить на более слабое условие C-компактности, так как в [4] при доказательстве теоремы 4.12, по существу, используется только C-компактность.

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство, $v \in V$ и $T : V \to X$ — (bo)-непрерывный C-компактный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $v = \bigsqcup_{i=1}^{n} v_i$ такое, что для любой пары v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков элемента v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо неравенство $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| < \varepsilon$.*

$\lhd$ Предположим, что утверждение леммы неверно. Это означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения $v = \bigsqcup_{i=1}^{n} v_i$, $n \in \mathbb{N}$, найдутся номер $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ и такая пара $v_{i_0}^1, v_{i_0}^2$ взаимно дополнительных осколков элемента v_{i_0}, что справедливо неравенство $\left\|T(v_{i_0}^1 - v_{i_0}^2)\right\| \geqslant \varepsilon$. Покажем, что отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется набор $v_1, \dots, v_k$ попарно дизъюнктных осколков элемента v такое, что для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ существует пара v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков v_i такая, что $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем это утверждение по индукции. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для $k > 1$ и покажем, что тогда оно справедливо и для $k+1$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — набор попарно дизъюнктных осколков элемента v, для которых выполняется индукционное предположение, и пусть $u = v - \bigsqcup_{i=1}^{k} v_i$. Если найдутся взаимно дополнительные осколки u_1 и u_2 элемента u такие, что $\|Tu_1 - Tu_2\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то в качестве v_{k+1} возьмем элемент u. В противном случае найдется осколок v_{i_0} с номером $1 \leqslant i_0 \leqslant k$ такой, что существуют взаимно дополнительные осколки $v_{i_0}^1$ и $v_{i_0}^2$ элемента v_{i_0}, для которых выполняется неравенство $\left\|T(v_{i_0}^1 - v_{i_0}^2)\right\| \geqslant \varepsilon$. Не уменьшая общности, можем полагать, что $i_0 = k$. Согласно лемме 1 T является узким оператором. Последнее означает, что для v_k и для любого $\delta > 0$ найдутся взаимно дополнительные осколки g и h элемента v_k такие, что $\|T(g-h)\| < \delta$. Используя разложимость векторной нормы пространства V и лемму о двойном разбиении в векторной решетке (см. [12, п. 1.3.3.3]), найдем такие попарно дизъюнктные осколки g_1, g_2 и h_1, h_2 элементов g и h соответственно, что

$$g = g_1 \sqcup g_2; \quad h = h_1 \sqcup h_2; \quad v_k^1 = g_1 \sqcup h_1; \quad v_k^2 = g_2 \sqcup h_2.$$

Кроме того, справедливы оценки

$$\|T(g_1 + h_1 - g_2 - h_2)\| = \|T(v_k^1 - v_2^2)\| \geqslant \varepsilon;$$

$$\|T(g_1 + g_2 - h_1 - h_2)\| = \|T(g - h)\| < \delta.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon \leqslant \|T(g_1 + h_1 - g_2 - h_2)\| &= \|T(g_1 + g_2 - g_2 + h_1 - h_1 + h_1 - g_2 - h_2)\| \\ &\leqslant \|T(g_1 + g_2 - h_1 - h_2)\| + 2\|T(h_1 - g_2)\| < \delta + 2\|T(h_1 - g_2)\|;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \leqslant \|T(g_1+h_1-g_2-h_2)\| &= \|T(g_1+h_1+h_2-h_2-g_2-g_1+g_1-h_2)\| \\ &\leqslant \|T(h_1+h_2-g_1-g_2)\| + 2\|T(h_2-g_1)\| < \delta + 2\|T(h_2-g_1)\|;\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\delta > 0$ получаем, что

$$\|T(h_2-g_1)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}; \quad \|T(h_1-g_2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$u_k = h_2+g_1; \quad u_{k+1} = h_1+g_2; \quad u_k^1 = h_2; \quad u_k^2 = g_1; \quad u_{k+1}^1 = h_1; \quad u_{k+1}^2 = g_2.$$

Тогда $v_1, \dots, v_{k-1}, u_k, u_{k+1}$ — набор попарно дизъюнктных осколков элемента v, обладающих требуемыми свойствами, и справедливость индукционного перехода установлена. Положим $Z_v = \{u-w : u, w \in (F)_v, \ u \perp w\}$. Используя C-компактность оператора T, получаем, что $K_v := \overline{T(Z_v)}$ — компактное подмножество. Положим $B = \{x \in X : \|x\| < \frac{\varepsilon}{4}\}$. В силу компактности множества K_v найдутся номер $n \in \mathbb{N}$ и окрестность нуля B_1 в X такие, что $K_v + B_1 \subset nB$.

Возьмем теперь окрестность нуля $H \subset B$ и конечный набор $x_1, \dots, x_m$ элементов множества K_v таких, что $nH \subset B_1$ и $K_v \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i + H)$. Пусть, кроме того, $l = nm$. Согласно вышеприведенным рассуждениям найдется набор $v_1, \dots, v_l$ попарно дизъюнктных осколков элемента v и набор пар v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков элементов v_i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, такой что $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Так как $\{T(v_i^1 - v_i^2) : 1 \leqslant i \leqslant mn\} \subset \bigcup_{k=1}^m (x_k + H)$, то найдется номер $k_0 \leqslant m$ такой, что $\operatorname{card}\{i \leqslant l : T(v_i^1 - v_i^2) \in x_{k_0} + H\} \geqslant n$. Без ограничения общности можем полагать, что $T(v_i^1 - v_i^2) \in x_{k_0} + H$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $H \subset B = \{x \in X : \|x\| < \frac{\varepsilon}{4}\}$, то $\|x_{k_0}\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, откуда следует, что $x_{k_0} \notin B$. Пусть теперь $h = \sum_{i=1}^n (v_i^1 - v_i^2)$. Так как осколки v_i попарно дизъюнктны, то $h \in Z_v$. Пусть $x = Th = \sum_{i=1}^n T(v_i^1 - v_i^2) \in K_v$. Далее имеем

$$x \in nx_{k_0} + nH \subset nx_{k_0} + B_1.$$

Тогда $nx_{k_0} \in K_v - B_1 = K_v + B_1 \subset nH$ и отсюда выводим, что $x_{k_0} \in H$. Получили противоречие. $\rhd$

Следующее вспомогательное утверждение хорошо известно (см. [2, лемма 10.20]).

Лемма 3. *Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — семейство векторов конечномерного нормированного пространства X и пусть $(\lambda_i)_{i=1}^n$ — набор действительных чисел такой, что $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существует набор действительных чисел $(\theta_i)_{i=1}^n$, где $\theta_i \in \{0,1\}$, такой, что*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \theta_i) x_i \Big\| \leqslant \frac{\dim(X)}{2} \max_i \|x_i\|.$$

Лемма 4. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство, $S : V \to X$ — линейный узкий оператор и $T : V \to X$ — (bo)-непрерывный, C-компактный оператор конечного ранга. Тогда оператор $R = S + T$ также является узким.*

$\lhd$ Возьмем произвольный элемент $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Применяя лемму 2, можно найти такое разбиение $v = \bigsqcup_{i=1}^n v_i$ элемента v на дизъюнктные осколки, что для любой пары v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков элемента v_i выполняется $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| < \frac{\varepsilon}{2\dim(\overline{T(V)})}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Используя теперь узость оператора S, для каждого осколка v_i подберем пару взаимно дополнительных осколков u_i, w_i такую, что $\|S(u_i - w_i)\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $x_i = T(u_i - w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и пусть $\lambda_i = \frac{1}{2}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Согласно лемме 3 можем записать

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \theta_i)x_i\Big\| = \frac{1}{2}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| \leqslant \frac{\dim(T(V))}{2}\max_i \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существует разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$ на два дизъюнктных подмножества I и J такие, что $\alpha_i = 1$, $i \in I$, и $\alpha_i = -1$, $i \in J$. Положив

$$u = \bigsqcup_{i \in I} u_i \sqcup \bigsqcup_{i \in J} w_i, \quad w = \bigsqcup_{i \in J} u_i \sqcup \bigsqcup_{i \in I} w_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} \big\|R(u-w)\big\| &= \big\|(S+T)(u-w)\big\| \leqslant \big\|S(u-w)\big\| + \big\|T(u-w)\big\| \\ &= \Big\|\sum_{i\in I} Su_i + \sum_{i\in J} Sw_i - \sum_{i\in J} Su_i - \sum_{i\in I} Sw_i\Big\| + \Big\|\sum_{i\in I} Tu_i + \sum_{i\in J} Tw_i - \sum_{i\in J} Tu_i - \sum_{i\in I} Tw_i\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{i\in I} S(u_i - w_i) + \sum_{i\in J} S(w_i - u_i)\Big\| + \Big\|\sum_{i\in I} T(u_i - w_i) - \sum_{i\in J} T(u_i - w_i)\Big\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\big\|S(u_i - w_i)\big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, u и w — искомая пара взаимно дополнительных осколков элемента v. $\triangleright$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство, $S : V \to X$ — линейный узкий оператор и $T : V \to X$ — (bo)-непрерывный C-компактный оператор. Тогда оператор $R = S + T$ также является узким.*

$\triangleleft$ Банахово пространство X мы можем рассматривать как замкнутое линейное подпространство банахова пространства $l_\infty(B_{X^\star})$ функций, ограниченных на компакте. Это можно записать в виде цепочки вложений:

$$X \hookrightarrow X^{\star\star} \hookrightarrow l_\infty(B_{X^\star}),$$

где под символом $\hookrightarrow$ мы понимаем изометрическое вложение, а через $B_{X^\star}$ обозначается единичный шар банахова пространства $X^\star$. Известно, что если H — предкомпактное подмножество $l_\infty(D)$ для некоторого бесконечного множества D и $\varepsilon > 0$, то существует оператор конечного ранга $R \in \mathscr{L}(l_\infty(D))$ такой, что $\|x - Rx\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in H$ [2, лемма 10.25].

Возьмем произвольный элемент $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Так как T — это C-компактный оператор, то $K = T(\mathscr{F}_v)$ — предкомпактное множество в X и, следовательно, в $l_\infty(B_{X^\star})$. Тогда найдется линейный непрерывный оператор конечного ранга $R \in \mathscr{L}(l_\infty(B_{X^\star}))$ такой, что $\|w - Rw\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $w \in K$. Ясно, что $G = R \circ T$ — линейный (bo)-непрерывный C-компактный оператор конечного ранга. Согласно лемме 4 найдутся взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|(S + G)(v_1 - v_2)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\|(S+T)(v_1-v_2)\| &= \|S(v_1-v_2)+T(v_1-v_2)+G(v_1-v_2)-G(v_1-v_2)\| \\ &\leqslant \|(S+G)(v_1-v_2)\|+\|T(v_1-v_2)-G(v_1-v_2)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\|T(v_1-v_2)-R(T(v_1-v_2))\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \rhd\end{aligned}$$

Замечание 2. Отметим, что теорема 1 не выводится непосредственно из леммы 2, без использования леммы 4, в силу того, что размерность пространства образов оператора T должна быть постоянной величиной, так как она задает исходную оценку, относительно которой подбирается требуемое семейство попарно дизъюнктных осколков.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания, позволившие улучшить качество статьи.

Литература

1. *Popov M. M., Plichko A. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces: Diss. Math. (Rozprawy Mat.).—1990.—Vol. 306.—P. 1–85.
2. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices.— De Gruyter, 2013.—(De Gruyter Stud. in Math. Vol. 45).
3. *Maslyuchenko O., Mykhaylyuk V., Popov M.* A lattice approach to narrow operators // Positivity.— 2009.—Vol. 13.—P. 459–495. DOI: 10.1007/s11117-008-2193-z.
4. *Pliev M.* Narrow operators on lattice-normed spaces // Open Math.—2011.—Vol. 9, № 6.—P. 1276–1287. DOI: 10.2478/s11533-011-0090-3.
5. *Abasov N., Megahed A. M., Pliev M.* Dominated operators from lattice-normed spaces to sequence Banach lattices // Annals of Funct. Anal.—2016.—Vol. 7, № 4.—P. 646–655. DOI: 10.1215/20088752-3660990.
6. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667. DOI: 10.1007/s11117-013-0268-y.
7. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M., and Sobchuk O.* Dividing measures and narrow operators // Stud. Math.—2015.—Vol. 231.—P. 97–116. DOI: 10.4064/sm7878-2-2016.
8. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2017.—Vol. 21, № 1.—P. 23–33. DOI: 10.1007/s11117-016-0401-9.
9. *Плиев М. А., Фан С.* Узкие ортогонально аддитивные операторы в решеточно-нормированных пространствах // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—P. 174–184. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.117.
10. *Mykhaylyuk V., Popov M.* On sums of narrow operators on Köthe function space // J. Math. Anal. Appl.—2013.—Vol. 404.—P. 554–561. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.008.
11. *Humenchuk H. I.* On the sum of narrow and finite-rank orthogonally additive operator // Ukrainian Math. J.—2016.—Vol. 67, № 12.—P. 1831–1837. DOI: 10.1007/s11253-016-1193-6.
12. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—2003.—М: Наука, 2003.—619 с.

Статья поступила 8 ноября 2017 г.

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: plimarat@yandex.ru;

Абасов Нариман Магамедович
МАИ — Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет),
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 121552, Москва, ул. Оршанская, 3
E-mail: abasovn@mail.ru

ON THE SUM OF NARROW AND C-COMPACT OPERATORS

Abasov N. M., Pliev M. A.

We consider narrow linear operators defined on a Banach–Kantorovich space and taking value in a Banach space. We prove that the sum $S+T$ of two operators is narrow whenever S is a narrow operator and T is a (bo)-continuous C-compact operator. For the proof of the main result we use the method of decomposition of an element of a lattice-normed space into a sum of disjoint fragments and an approximation of a C-compact operator by finite-rank operators.

Key words: Banach space, Banach–Kantorovich space, narrow operator, (bo)-continuous operator, C-compact operator.

References

1. *Popov M. M., Plichko A. M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces*: Diss. Math. (Rozprawy Mat.), 1990, vol. 306, pp. 1–85.
2. *Popov M., Randrianantoanina B. Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices*, De Gruyter, 2013. De Gruyter Stud. in Math., vol. 45.
3. *Maslyuchenko O., Mykhaylyuk V., Popov M.* A lattice approach to narrow operators, *Positivity*, 2009, vol. 13, pp. 459–495. DOI: 10.1007/s11117-008-2193-z.
4. *Pliev M.* Narrow operators on lattice-normed spaces, *Open Math.*, 2011, vol. 9, no. 6, pp. 1276–1287. DOI: 10.2478/s11533-011-0090-3.
5. *Abasov N., Megahed A. M., Pliev M.* Dominated operators from lattice-normed spaces to sequence Banach lattices, *Annals of Funct. Anal.*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 646–655. DOI: 10.1215/20088752-3660990.
6. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators, *Positivity*, 2014, vol. 18, no. 4, pp. 641–667. DOI: 10.1007/s11117-013-0268-y.
7. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M., and Sobchuk O.* Dividing measures and narrow operators, *Stud. Math.*, 2015, vol. 231, pp. 97–116. DOI: 10.4064/sm7878-2-2016.
8. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators, *Positivity*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 23–33. DOI: 10.1007/s11117-016-0401-9.
9. *Pliev M. A., Fang X.* Narrow orthogonally additive operators in lattice-normed spaces, *Siberian Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 134–141. DOI: 10.1134/S0037446617010177.
10. *Mykhaylyuk V., Popov M.* On sums of narrow operators on Köthe function space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 404, pp. 554–561. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.008.
11. *Humenchuk H. I.* , On the sum of narrow and finite-rank orthogonally additive operator, *Ukrainian Math. J.*, 2016, vol. 67, no. 12, pp. 1831–1837. DOI: 10.1007/s11253-016-1193-6.
12. *Kusraev A. G. Dominated Operators*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2000, 446 p.

Received 8 November, 2017

Pliev Marat Amurhanovich
Southern Mathematical Institute — the Affiliate
of Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Senior Researcher*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: `plimarat@yandex.ru`;

Abasov Nariman Magamedovich
MAI — Moscow Aviation Institute
(National Research University), *Associate Professor*
3 Orshanskaya street, Moscow, 121552, Russia
E-mail: `abasovn@mail.ru`