Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 3–10

УДК **517.544.76**

РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ИЗ $\mathbb{C}$

И. И. Баврин, О. Э. Яремко

Изучается проблема восстановления функции, аналитической в круге по ее интегральным характеристикам. Представлен алгоритм решения обратной задачи интегральной геометрии в пространстве аналитических в единичном круге функций. Найдены два простых интегральных представления для функций, аналитических в единичном круге. Первая формула восстанавливает функцию по средним вдоль вертикальных отрезков. Вторая формула восстанавливает функцию по ее взвешенным средним на окружности.

Ключевые слова: преобразование Радона, интегральное представление, обратная задача, полином Лежандра.

1. Введение

Преобразование Радона переводит функцию, заданную на одном геометрическом объекте, в функцию, заданную на другом геометрическом объекте. Преобразование Радона составляет основу интегральной геометрии. Например, переход от функций, определенных на плоскости, к функциям на прямых осуществляется интегрированием исходной функции по каким-либо кривым в области ее задания. Подобные преобразования имеют широкое применение. Одним из таких применений служит томография, основанная на решении обратной задачи интегральной геометрии — восстановлении многомерных функций по их интегральным характеристикам [1–6]. В настоящее время преобразование Радона [1, 5] широко применяется в различных областях науки.

Основная идея нашей работы состоит в следующем: метод реконструкции функции $f(x, y)$ зависит от класса рассматриваемых функций. Чем уже класс рассматриваемых функций, тем меньше информации необходимо знать для восстановления функции. Нами изучается класс функций, аналитических в единичном круге. Ставится задача о реконструкции функции $f(x, y)$ по ее интегралам вдоль отрезков, проходящих через начало или по ее интегралам вдоль семейства вертикальных отрезков. Задача восстановления функции, аналитической в единичном круге по ее интегралам вдоль отрезков, проходящих через начало координат, известна и полностью исследована в работах И. И. Баврина [7–14]. Задача о реконструкции функции $f(x, y)$ по ее интегралам вдоль семейства вертикальных отрезков ранее не изучалась.

2. Полиномы Лежандра

Напомним полезные сведения из теории полиномов Лежандра [15–17]. Функции Лежандра в математике являются решениями дифференциального уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]+n(n+1)\,P_n(x)=0.$$

Эти обыкновенные дифференциальные уравнения часто встречаются в физике и других областях техники. В частности, это происходит при решении уравнения Лапласа (и связанных с ними дифференциальных уравнений в частных производных) в сферических координатах. Эти решения для $n=0,1,2,\ldots$ (с нормализацией $P_n(1)=1$) образуют последовательность ортогональных многочленов, называемых многочленами Лежандра. Каждый многочлен Лежандра $P_n(x)$ выражается формулой Родригеса

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right].$$

Интегральное представление полиномов Лежандра имеет вид

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t\right)^n dt,\quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{1}$$

Полиномы Лежандра также могут быть определены как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции

$$\frac{1}{\left(1-2xz+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k P_k\left(x\right).$$

В физике эта формула является основой для мультипольных разложений. Ниже нам понадобиться одно из подобных разложений, а именно:

$$\frac{1-x^2}{\left(1-2xz+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)z^k P_k\left(x\right). \tag{2}$$

Важное свойство полиномов Лежандра состоит в том, что они ортогональны относительно внутреннего произведения на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn}, \tag{3}$$

δ_{mn} — символ Кронеккера.

3. Основной результат

Задача A: Реконструкция функции $w=f(z)$ по ее интегралам вдоль отрезков, проходящих через начало.

Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании; пусть также на каждом из отрезков $O\eta=\{z: z=\varepsilon\eta,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1\}$ вычислено ее взвешенное среднее значение. Требуется восстановить функцию $w = f(z)$ в каждой точке единичного круга.

В работе И. И. Баврина [14] для функций, аналитических в единичном круге и непрерывных в его замыкании, получена интегральная формула Коши — Баврина

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} L_\gamma\left[\frac{1}{1-\frac{z}{\eta}}\right] L_\gamma^{-1}[f](\eta)\,\frac{d\eta}{\eta}, \tag{4}$$

где L_γ^{-1} — оператор, обратный к оператору Темлякова — Баврина [14] $L_\gamma = \gamma + z\frac{d}{dz}$. Оператор L_γ^{-1} имеет вид [14]

$$L_\gamma^{-1}[f](\eta) = \int\limits_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon\eta)\,d\varepsilon, \quad |\eta| = 1,\ \gamma > 0. \tag{5}$$

Правую часть формулы (5) можно интерпретировать как взвешенное среднее значение функции $w = f(z)$, вычисленное по отрезку $\{z : z = \eta\varepsilon,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1\}$. Таким образом, интегральная формула (4) решает задачу A.

Задача B: Реконструкция функции $w = f(z)$ по ее интегралам по каждому из вертикальных отрезков внутри замкнутого единичного круга.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании; пусть также на каждом из вертикальных отрезков внутри замкнутого единичного круга вычислено среднее значение этой функции $w = f(z)$. Требуется восстановить функцию $w = f(z)$ в каждой точке единичного круга по ее средним:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f\big(x + i\sqrt{1-x^2}\cos t\big)\,dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

вычисленным для каждого значения $x \in [-1, 1]$.

Задача C: Реконструкция функции $w = f(z)$ по ее взвешенным средним интегралам на окружности.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании. Как известно, интеграл функции, аналитической в единичном круге и непрерывной в его замыкании по границе круга, равен значению функции в начале координат, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi} f\big(e^{i\psi}\big)\,d\psi = 2\pi f(0).$$

Тогда ее среднее значение по единичной окружности равно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\psi})d\psi = f(0).$$

Изменение начала обхода окружности не дает ничего нового:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\big(e^{i(\varphi+\psi)}\big)\,d\psi = f(0), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Если теперь вычислить взвешенные средние по окружности

$$F(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\gamma\psi} f\bigl(\eta e^{i\psi}\bigr)\,d\psi, \quad |\eta|=1,\ \gamma\neq 0,\pm1,\pm2,\dots,$$

то задача восстановления аналитической функции $w=f(z)$ в каждой точке единичного круга станет корректной.

Теорема 1. *Если функция $w=f(z)$ аналитическая в единичном круге и непрерывная в его замыкании, то решение задачи* A *определяется интегральным представлением*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1} L_\gamma\left[\frac{1}{1-\frac{z}{\eta}}\right] L_\gamma^{-1}[f](\eta)\,\frac{d\eta}{\eta};$$

для решения задачи B справедливо интегральное представление

$$f(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1-z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac32}}\,F(x)\,dx, \quad |z|<1,$$

где $F(x)$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, — среднее значение функции $w=f(z)$, взятое по вертикальному отрезку $z=x+i\sqrt{1-x^2}\cos t$, $t\in[-\pi,\pi]$, соединяющему точки $(x,\sqrt{1-x^2}\,)$ и $(x,-\sqrt{1-x^2}\,)$ единичной окружности; решение задачи C *определяется формулой*

$$f(z)=\frac{1}{e^{i2\pi\gamma}-1}\int\limits_{|\eta|=1} L_\gamma\left[\frac{1}{\eta-z}\right]F(\eta)\,d\eta, \quad |z|<1,\ \gamma\neq 0,\pm1,\pm2,\dots,$$

где

$$F(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\gamma\psi} f\bigl(\eta e^{i\psi}\bigr)\,d\psi, \quad \eta=e^{i\varphi},$$

— суть среднее значение функции $w=z^\gamma f(e^{i\varphi}z)$, взятое по единичной окружности $C:=\{z:\ e^{i\psi},\ \psi\in[0,2\pi]\}$, если $\gamma=1,2,\dots$, то нужно брать взвешенные средние по окружности в виде

$$F(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi e^{i\gamma\psi} f\bigl(\eta e^{i\psi}\bigr)\,d\psi, \quad |\eta|=1,$$

при этом формула обращения имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C L_\gamma\left[\frac{1}{\eta-z}\right]F(\eta)\,d\eta, \quad |z|<1,\ \gamma=1,2,\dots$$

$\lhd$ Задача A. Доказательство содержится в работе одного из авторов И. И. Баврина [14].

Задача B. Пусть разложение функции $w=f(z)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Тогда

$$f(rz) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k z^k. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$F_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(r\big(x + i\sqrt{1-x^2}\cos t\big)\right) dt, \quad 0 < r < 1.$$

Из формулы для полиномов Лежандра (1) на основании (6) получим равенство

$$F_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k P_k(x). \tag{7}$$

Из формулы (7) и из свойства ортогональности полиномов Лежандра (3) получим тождество

$$f(rz) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1-z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} F_r(x)\, dx, \quad |z| < 1.$$

Фиксируя z и устремляя $r \to 1$, получаем требуемое интегральное представление для $f(z)$.

Задача C. Из определения оператора L_γ приходим к равенствам

$$L_\gamma[F(\eta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma\psi} L_\gamma\big[f\big(\eta e^{i\psi}\big)\big]\, d\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\psi}\big(e^{i\gamma\psi} f\big(\eta e^{i\psi}\big)\big)\, d\psi, \quad |\eta| < 1.$$

Тогда по формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$L_\gamma[F(\eta)] = \frac{1}{2\pi i} \left(e^{i\gamma\psi} f\big(\eta e^{i\psi}\big)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi\gamma} - 1}{2\pi i} f(\eta).$$

Следовательно,

$$F(\eta) = \frac{e^{i2\pi\gamma} - 1}{2\pi i} L_\gamma^{-1}[f(\eta)], \quad |\eta| < 1.$$

Функция $w = f(\eta)$ непрерывна в замыкании единичного круга, поэтому в последней формуле аргумент нужно устремить на границу. Применение формулы (4) завершает доказательство. $\triangleright$

Следствие 1. *Для того чтобы функция $w = f(z)$ была аналитична в единичном круге и непрерывна в его замыкании и ее разложение в степенной ряд имело вид*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $F(x)$ имело разложение в ряд по полиномам Лежандра вида

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x).$$

◁ *Необходимость* вытекает из формулы (7).

Достаточность. Пусть

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x).$$

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1 - z^2}{\left(1 - 2xz + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)\, dx$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) z^m \int_{-1}^{1} P_m(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \ \triangleright$$

Пример 1. Пусть задана функция $f(z) = e^{rz}$, $0 < r < 1$. Вычислим ее среднее значение

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{r(x + i\sqrt{1-x^2}\cos t)} dt = e^{rx} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{ir\sqrt{1-x^2}\cos t} dt.$$

Воспользовавшись интегральным представлением для функции Бесселя нулевого порядка [15]

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{iz\cos t} dt,$$

находим

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{r(x + i\sqrt{1-x^2}\cos t)} dt = e^{rx} J_0\big(r\sqrt{1 - x^2}\,\big).$$

Согласно следствию 1 можно записать тождество

$$e^{rx} J_0\big(r\sqrt{1 - x^2}\,\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} P_k(x).$$

Пример 2. Пусть дана функция $f(z) = \frac{1}{1-rz}$, $0 < r < 1$. Вычислим ее среднее значение

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{1 - r(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos t)}\, dt = \frac{1}{1 - rx} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{1 - i\, \frac{r\sqrt{1-x^2}}{1-rx}\, \cos t}\, dt.$$

Воспользуемся интегралом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon\cos t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

В результате для функции $F(x)$ имеем значение

$$F(x) = \frac{1}{1 - rx} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(-i\frac{r\sqrt{1-x^2}}{1-rx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}}.$$

Вновь воспользовавшись следствием 1, запишем тождество

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k(x).$$

В итоге получена производящая функция для полиномов Лежандра [17].

Заключение. В работе решена проблема реконструкции для функции $w = f(z)$, аналитической в единичном круге. Представлены три формулы, восстанавливающие функцию $w = f(z)$ по ее интегралам. Первая формула получена И. И. Бавриным в работе [14]. В ней интегрирование осуществляется вдоль отрезков, проходящих через начало. Вторая и третья формулы выведены авторами в настоящей статье. Во второй формуле восстановление функции происходит по ее интегралам вдоль семейства вертикальных отрезков, в третьей по ее взвешенным интегралам по границе круга. Заметим, что в формуле Радона восстановление функции ведется по значениям интегралов, взятых по всем возможным направлениям.

Литература

1. *Грузман И. С.* Математические задачи компьютерной томографии // Соросовский образовательный журн.—2001.—№ 5.
2. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия.—М.: Мир, 1982.—304 с.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1987.—160 с.
4. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1990.—232 с.
5. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.—288 с.
6. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии.—М.: Мир, 1983.—352 с.
7. *Баврин И. И.* Обобщение формулы Пуассона — Йенсена // Докл. АН.—2010.—Т. 431, № 2.—С. 154–156.
8. *Баврин И. И.* Обобщение формулы Шварца — Йенсена // Докл. АН.—2010.—Т. 433, № 4.–С. 439–440.
9. *Баврин И. И.* Обратная задача для интегральной формулы Коши в кольце // Докл. АН.—2009.—Т. 428, № 2.—С. 151–152.
10. *Баврин И. И.* Обратные задачи в интегральных формулах // Докл. АН.—2013.—Т. 450, № 3.—С. 257–259.
11. *Баврин И. И.* Интегральные представления в звездных областях // Докл. АН.—2012.—Т. 447, № 4.—С. 359–360.
12. *Баврин И. И.* Обратные задачи для интегральных формул Коши, Шварца и Пуассона в поликруге // Докл. АН.—2010.—Т. 434, № 6.—С. 727–729.
13. *Баврин И. И.* Интегральные представления в кратно-круговых областях. Обратные задачи // Докл. АН.—2011.—Т. 441, № 5.—С. 583–587.
14. *Баврин И. И.* Операторный метод в комплексном анализе.—М.: Прометей, 1991.—200 с.
15. *Бейтман Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейн.—М.: Наука. 1966.—Т. 2.—582 с.
16. *Янке Е.* Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш.—М.: Наука, 1977.—342 с.
17. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—Физматгиз, 1962.—500 с.

Статья поступила 10 мая 2016 г.

Баврин Иван Иванович
Московский педагогический государственный университет,
профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики
РОССИЯ, 119991, г. Москва, ул. Малая Пироговская, 1/1
E-mail: ivbavrin@yandex.ru

Яремко Олег Эмануилович
Пензенский государственный педагогический университет,
профессор кафедры компьютерных технологий
РОССИЯ, 440038, г. Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: yaremki@mail.ru

A RECONSTRUCTION OF ANALYTIC FUNCTIONS ON THE UNIT DISK OF $\mathbb{C}$

Bavrin I. I., Yaremko O. E.

A reconstruction of an analytic function on the unit disk of $\mathbb{C}$ by its integral characteristics is studied. An algorithm for solving the inverse problem of integral geometry in the space of analytic functions in the unit disk is presented. The main idea behind the paper is that the reconstruction method is determined by the class of functions under consideration: The narrower the class of functions is, the less information one needs to know to restore the function. The simplest reconstruction formulas are obtained in the class of analytic functions in the unit disk. Three integral representations for analytic functions in the unit disk are established. The first formula reconstructs the function by its means along radii. The second one restores an analytic function in the unit ball by its means along the vertical line segments. The third integral formula reconstructs an analytic function from its weighted means on the circle.

Keywords: the Radon transform, integral representation, the inverse problem, the Legendre polynomial.