Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 19–30

УДК **517.95**

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ж. А. Балкизов

При определенном условии на коэффициенты, входящие в рассматриваемое уравнение, в работе найдено условие однозначной разрешимости первой краевой задачи для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. Единственность решения задачи доказана методом Трикоми, а существование — методом интегральных уравнений. Решения, получающиеся относительно следа от искомого решения интегральных уравнений, найдены и выписаны в явном виде. Показано, что в случае, когда нарушено условие теоремы, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1 имеет бесконечное множество линейно-независимых решений.

Ключевые слова: вырождающееся гиперболическое уравнение, первая краевая задача, задача Гурса, задача Коши, функция Миттаг-Леффлера.

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x, & y < 0, \\ y^n u_{xx} - u_{yy} + b y^{(n-2)/2} u_x, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, m, n — константы, причем $m > 0$, $n > 0$.

Через Ω_1 обозначим область, ограниченную характеристиками

$$\sigma_1 = AC_1 : \ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0,$$

$$\sigma_2 = C_1B : \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точек $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, пересекающимися в точке $C_1 = (r/2, \, y_1)$ и отрезком AB прямой $y = 0$, а через Ω_2 — область, ограниченную характеристиками

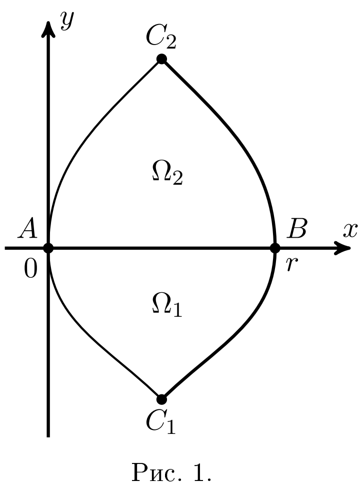

Рис. 1.

$$\sigma_3 = AC_2 : \ x - \frac{2}{n+2} y^{(n+2)/2} = 0,$$

$$\sigma_4 = C_2B : \ x + \frac{2}{n+2} y^{(n+2)2} = r$$

уравнения (1) при $y > 0$, выходящими из точек A и B, пересекающиеся в точке $C_2 =$

$(r/2, y_2)$ и отрезком AB прямой $y=0$, $y_1 = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)}$, $y_2 = \left[\frac{r(n+2)}{4}\right]^{2/(n+2)}$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, где $J = \{(x,0) : 0 < x < r\}$ — интервал AB прямой $y=0$ (рис. 1).

Методами функционального анализа и интегральных уравнений в работе [1] была исследована краевая задача со смещением для уравнения (1) в случае, когда $\Omega_1 \equiv \varnothing$ и коэффициент $b=0$. В работе [2] получена априорная оценка решения первой и второй задачи Дарбу для общего вырождающегося гиперболического уравнения

$$u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{2}$$

с коэффициентом $k(y) > 0$ при $y \neq 0$, который может обращаться в нуль при $y=0$. В случае, когда в уравнении (2) коэффициент $k(y) = (-y)^m$, $m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$, а коэффициенты $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ этого уравнения и его правая часть $f(x,y)$ удовлетворяют условиям Геллерстедта в работе [3] доказано существование и единственность функции Грина — Адамара $G(x,y;\xi,\eta)$, с помощью которой выписывается решение второй задачи Дарбу для уравнения (2). В работе [4] были поставлены и исследованы характеристическая задача Коши и задача Гурса для класса вырождающихся внутри области гиперболических уравнений вида (2). В работе [5] сделаны некоторые обобщения по постановке и исследованию первой и второй задачи Дарбу для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения вида (2). В работе [6] в описанной выше области Ω для уравнения (1) при $a=0$, $b=0$ исследована краевая задача с разрывными условиями склеивания в случае, когда данные задаются на противоположных сторонах σ_2 и σ_3 характеристического четырехугольника Ω. Исследованию задачи со смещением для уравнения (1) в области Ω посвящена работа [7]. Задачи со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, содержащего слагаемые с младшими производными исследованы в работе [8]. Достаточно полная библиография по вырождающимся гиперболическим уравнениям имеется в монографиях [9–12].

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$; $u_x(x,0), u_y(x,0) \in L(0,r)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В работе исследуется следующая

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y) = \psi_1(x) \quad (\forall\,(x,y) \in \sigma_2), \tag{3}$$

$$u(x,y) = \psi_2(x) \quad (\forall\,(x,y) \in \sigma_4), \tag{4}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции из класса $C^1[r/2, r]$, причем $\psi_1(r) = \psi_2(r)$.

Задача 1 относится к классу краевых задач, определенному в работе [13] и названному в монографии [11, с. 236] первой краевой задачей для уравнения параболо-гиперболического типа.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты a и b уравнения* (1) *таковы, что*

$$|a| \leqslant \frac{m}{2}, \quad |b| \leqslant \frac{n}{2}, \quad (2a-m)^2 + (2b-n)^2 \neq 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи 1.

$\lhd$ Введем обозначения:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{5}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \tag{6}$$

В области Ω_1 уравнение (1) совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением вида

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x = 0, \tag{7}$$

порядок вырождения которого равен m, а в области Ω_2 — с уравнением

$$y^n u_{xx} - u_{yy} + by^{(n-2)/2} u_x = 0 \tag{8}$$

с порядком вырождения n.

Найдем решение задачи Коши (5)–(7). В характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$$

уравнение (7) приводится к уравнению Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\beta_1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\alpha_1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha_1 = \frac{m-2a}{2(m+2)}$, $\beta_1 = \frac{m+2a}{2(m+2)}$.

Пусть вначале $|a| < \frac{m}{2}$. Общее решение уравнения (9) в этом случае выписывается по формуле [9, с. 14]

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{1-\alpha_1-\beta_1} \int\limits_\xi^\eta \Psi(s)(s-\xi)^{\beta_1-1}(\eta-s)^{\alpha_1-1}\,ds \\ + \int\limits_\xi^\eta \Phi(s)\,(s-\xi)^{-\alpha_1}\,(\eta-s)^{-\beta_1}\,ds, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ — произвольные функции из класса $C[0,r] \cap C^2]0,r[$.

Положив $s = \xi + t(\eta-\xi)$, представление (10) перепишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{1-\alpha_1-\beta_1} \int\limits_0^1 \Phi\left[\xi + (\eta-\xi)t\right] t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt \\ + \int\limits_0^1 \Psi\left[\xi + (\eta-\xi)t\right] t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Область Ω_1 в характеристических координатах (ξ,η) переходит в треугольную область вида $\Omega_1' = \{(\xi,\,\eta) : 0 < \xi < \eta < r\}$, а начальные условия (5)–(6) переходят в условия

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi), \quad [2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{-\alpha_1-\beta_1} \lim_{\eta\to\xi} (\eta-\xi)^{\alpha_1+\beta_1}\,(u_\xi - u_\eta) = \nu(\xi). \tag{12}$$

Удовлетворяя общее решение (11) условиям (12), находим

$$\Psi(\xi) = \frac{\tau(\xi)}{B(\alpha_1,\beta_1)}, \quad \Phi(\xi) = -\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\nu(\xi),$$

где $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$ — интеграл Эйлера первого рода (бета-функция).

Таким образом, решение задачи (12) для уравнения (9), в случае, когда $|a|<\frac{m}{2}$ имеет следующий вид:

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_0^1 \tau\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt$$

$$-\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}(\eta-\xi)^{1-\alpha_1-\beta_1}\int\limits_0^1 \nu\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt.$$

Возвращаясь к переменным (x,y), из последней формулы найдем

$$\begin{gathered}u(x,y)=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right]t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt\\+\frac{y}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\int\limits_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right]t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt.\end{gathered}\tag{13}$$

Из (13) при условии (3) находим

$$u(x,y)\,|_{\sigma_2}=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_0^1 \tau\left[x+(r-x)(2t-1)\right]t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt$$

$$-\frac{(1-\alpha_1-\beta_1)^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}(r-x)^{1-\alpha_1-\beta_1}\int\limits_0^1 \nu\left[x+(r-x)(2t-1)\right]t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt=\psi_1(x).$$

С помощью замены $s=x+(r-x)(2t-1)$ последнее соотношение приводится к виду

$$\frac{(2r-2x)^{1-\alpha_1-\beta_1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_{2x-r}^{r}\tau(s)(s+r-2x)^{\beta_1-1}(r-s)^{\alpha_1-1}\,ds$$

$$-\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\int\limits_{2x-r}^{r}\nu(s)(s+r-2x)^{-\alpha_1}(r-s)^{-\beta_1}\,ds=\psi_1(x).$$

Переобозначив в последнем равенстве $2x-r$ через x найдем

$$\begin{gathered}\frac{(r-x)^{1-\alpha_1-\beta_1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_x^r \tau(t)(t-x)^{\beta_1-1}(r-t)^{\alpha_1-1}\,dt\\-\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\int\limits_x^r \nu(t)(t-x)^{-\alpha_1}(r-t)^{-\beta_1}\,dt=\psi_1\left(\frac{x+r}{2}\right).\end{gathered}\tag{14}$$

Воспользуемся далее следующим определением оператора дробного интегро-дифференцирования [14, с. 28]: оператором дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A, B] \subset R$ называется оператор D^{α}_{ax}, который действует на функцию $\varphi(t) \in L[A, B]$ по формуле:

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(t) = \frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^x |x-t|^{-(\alpha+1)}\,\varphi(t)\,dt, \quad \alpha < 0,$$

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(t) = \operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(x-a)\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} D^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi(t), \quad \alpha > 0,$$

где $\operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(z)$ означает знак числа z, а $\Gamma(x)$ — интеграл Эйлера второго рода (гамма-функция). С учетом приведенного выше определения, соотношение (14) перепишется в следующей форме:

$$\frac{\Gamma(\beta_1)(r-x)^{1-\alpha_1-\beta_1}}{B(\alpha_1,\beta_1)} D^{-\beta_1}_{rx}\left[\tau(t)(r-t)^{\alpha_1-1}\right] - \frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}\,\Gamma(1-\alpha_1)}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)} D^{\alpha_1-1}_{rx}\left[\nu(t)(r-t)^{-\beta_1}\right] = \psi_1\left(\frac{x+r}{2}\right). \quad (15)$$

Обращая уравнение (15) относительно функции $\nu(x)$, находим

$$\nu(x) = \gamma_1 D^{1-\alpha_1-\beta_1}_{rx}\tau(t) - \gamma_2(r-x)^{\beta_1} D^{1-\alpha_1}_{rx}\left[\psi_1\left(\frac{t+r}{2}\right)\right], \quad (16)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1-\beta_1)\,[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1}}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(\alpha_1)\gamma_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}.$$

Так как $\tau(x)$, $\psi_1\left(\frac{x+r}{2}\right) \in C[0,r]$, а $\tau'(x)$, $\psi'_1\left(\frac{x+r}{2}\right) \in L[0,r]$, то пользуясь свойством оператора дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha < 1$ [15, с. 43]

$$D^{\alpha}_{rx}\varphi(t) = \frac{\varphi(r)}{\Gamma(1-\alpha)}(r-x)^{-\alpha} - D^{\alpha-1}_{rx}\varphi'(t), \quad (17)$$

с учетом условия согласования $\tau(r) = \psi_1(r)$, выражение (16) перепишем в следующей форме:

$$\nu(x) = -\gamma_1 D^{-(\alpha_1+\beta_1)}_{rx}\tau'(t) + \frac{\gamma_2}{2}(r-x)^{\beta_1} D^{-\alpha_1}_{rx}\psi'_1\left(\frac{t+r}{2}\right). \quad (18)$$

Соотношение (18) есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию $y = 0$ в случае, когда $|a| < \frac{m}{2}$.

Если $a = \frac{m}{2}$, то в уравнении (9) коэффициенты $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \frac{m}{m+2}$ и решение задачи (5)–(7) имеет вид [9, с. 15]

$$u(x,\,y) = \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] + \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\,(2t-1)\right]\,(1-t)^{-\beta_1}\,dt. \quad (19)$$

Удовлетворяя (19) граничному условию (3) на характеристике $\sigma_2 = C_1B$, приходим к равенству

$$\nu(x) = (2-2\beta_1)^{-\beta_1}\,(r-x)^{\beta_1}\,\psi'_1\left(\frac{x+r}{2}\right). \quad (20)$$

Если же $a = -\frac{m}{2}$, то $\alpha_1 = \frac{m}{m+2}$, $\beta_1 = 0$. Решение задачи (5)–7) в этом случае имеет вид [9, с. 15]

$$u(x,\, y) = \tau\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] + \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\,(2t-1)\right](1-t)^{-\alpha_1}\,dt. \quad (21)$$

Из представления (21) с учетом условия (3) приходим к фундаментальному соотношению между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ следующего вида:

$$\nu(x) = \frac{(2-2\alpha_1)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left[-2D_{rx}^{-\alpha_1}\tau'(t) + D_{rx}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right]. \quad (22)$$

Аналогично, используя следующие представления решения задачи (5), (6), (8) в области Ω_2:

$$u(x,y) = \frac{1}{B(\alpha_2,\beta_2)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}(2t-1)\right]t^{\beta_2-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt + \frac{y}{B(1-\alpha_2,1-\beta_2)}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}(2t-1)\right]t^{-\alpha_2}(1-t)^{-\beta_2}\,dt, \quad |b| < \frac{n}{2}, \quad (23)$$

$$u(x,y) = \tau\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\right] + \frac{2y}{n+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}(2t-1)\right](1-t)^{\beta_2}\,dt, \quad b = \frac{n}{2}, \quad (24)$$

$$u(x,\, y) = \tau\left[x - \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\right] + \frac{2y}{n+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\,(2t-1)\right](1-t)^{-\alpha_2}\,dt, \quad b = -\frac{n}{2}, \quad (25)$$

с учетом условия (4) находим следующие фундаментальные соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из области Ω_2 на линию вырождения J:

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{rx}^{-(\alpha_2+\beta_2)}\tau'(t) - \frac{\gamma_4}{2}(r-x)^{\beta_2}D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right), \quad |b| < \frac{n}{2}, \quad (26)$$

$$\nu(x) = -(2-2\beta_2)^{-\beta_2}\,(r-x)^{\beta_2}\,\psi_2'\left(\frac{x+r}{2}\right), \quad b = \frac{n}{2}, \quad (27)$$

$$\nu(x) = \frac{(2-2\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)}\left[2D_{rx}^{-\alpha_2}\tau'(t) - D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right], \quad b = -\frac{n}{2}. \quad (28)$$

В формулах (23)–(28)

$$\alpha_2 = \frac{n-2b}{2(n+2)}, \quad \beta_2 = \frac{n+2b}{2(n+2)};$$

$$\gamma_3 = \frac{2\Gamma(1-\beta_2)\Gamma(\alpha_2+\beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2-\beta_2)\,[2(1-\alpha_2-\beta_2)]^{\alpha_2+\beta_2}}, \quad \gamma_4 = \frac{\Gamma(\alpha_2)\gamma_3}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2)}.$$

Докажем сначала единственность решения задачи 1. Рассмотрим интеграл

$$J^* = \int_0^r \tau(x)\nu(x)\,dx.$$

При $\psi_1(x) \equiv 0$ из соотношений (18), (20), (22) для различных значений a получаем соответственно равенства

$$\nu(x) = -\gamma_1 D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t), \quad |a| < \frac{m}{2}; \tag{29}$$

$$\nu(x) = 0, \quad a = \frac{m}{2}; \tag{30}$$

$$\nu(x) = -\frac{2(2-2\alpha_1)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} D_{rx}^{-\alpha_1}\tau'(t), \quad a = -\frac{m}{2}. \tag{31}$$

Воспользуемся следующим свойством положительности оператора дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана — Лиувилля) D_{ax}^{α} порядка $\alpha < 1$ [16, с. 46]: для любого $0 < \alpha < 1$ и любой функции $u(x) \in A_0^{\alpha}[0, r]$ скалярное произведение $(u, D_{rx}^{\alpha}u)_0 \geqslant 0$, причем $(u,\, D_{rx}^{\alpha}u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

В силу данного свойства при $|a| < \frac{m}{2}$ из соотношения (29) с учетом (17) будем иметь, что

$$\begin{aligned} J^* &= \int_0^r \tau(x)\nu(x)\,dx = -\gamma_1 \int_0^r \tau(x)\, D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t)\,dx \\ &= \gamma_1 \int_0^r \tau(x)\, D_{rx}^{1-(\alpha_1+\beta_1)}\tau(t)\,dx = \gamma_1 \Big(\tau(x),\, D_{rx}^{1-(\alpha_1+\beta_1)}\tau(t)\Big)_0 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Стало быть, и при $a = -\frac{m}{2}$ из соотношения (31) также получим неравенство $J^* \geqslant 0$, а при $a = \frac{m}{2}$ из (30) получаем равенство $J^* = 0$.

Аналогично из соотношений (26)–(28) с учетом (17) в случае однородной задачи 1, находим

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{rx}^{-(\alpha_2+\beta_2)}\tau'(t) = -\gamma_3 D_{rx}^{1-(\alpha_2+\beta_2)}\tau(t), \quad |b| < \frac{n}{2}; \tag{33}$$

$$\nu(x) = 0, \quad b = \frac{n}{2}; \tag{34}$$

$$\nu(x) = \frac{2\,(2-2\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)} D_{rx}^{-\alpha_2}\tau'(t) = -\frac{2\,(2-2\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)} D_{rx}^{1-\alpha_2}\tau(t), \quad b = -\frac{n}{2}. \tag{35}$$

Отсюда при $|b| < \frac{n}{2}$ и $b = -\frac{n}{2}$ следует, что интеграл $J^* \leqslant 0$, а при $b = \frac{n}{2}$ интеграл $J^* = 0$.

Таким образом, при выполнении условия $(2a-m)^2 + (2b-n)^2 \neq 0$ теоремы 1 для рассматриваемого интеграла J^*, с одной стороны, имеет место неравенство $J^* \geqslant 0$, а с другой $J^* \leqslant 0$, откуда заключаем, что $J^* = 0$. А равенство $J^* = 0$ в силу приведенного выше свойства положительности оператора дробного интегро-дифференцирования может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) = 0$. При этом из соотношений (29)–(31) и (33)–(35) следует, что и $\nu(x) = 0$. Тогда из формул (13), (19), (21), (23)–(25) заключаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω, откуда и вытекает единственность решения задачи 1.

Перейдем к доказательству существования решения задачи 1. Пусть вначале $|a| < \frac{m}{2}$ и $|b| < \frac{n}{2}$. Для определенности предположим, что $m < n$. При $m > n$ исследование проводится аналогично. Исключая из соотношений (18) и (26) искомую функцию $\nu(x)$, с учетом условий (3)–(4) относительно $\tau'(x)$ приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

$$\gamma_1 D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t) + \gamma_3 D_{rx}^{-(\alpha_2+\beta_2)}\tau'(t)$$
$$= \frac{\gamma_2}{2}(r-x)^{\beta_1} D_{rx}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right) + \frac{\gamma_4}{2}(r-x)^{\beta_2} D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right), \quad (36)$$

$$\tau(r) = \tau_r, \quad (37)$$

где $\tau_r = \psi_1(r) = \psi_2(r)$.

Применим к обеим частям уравнения (36) оператор дробного дифференцирования $D_{rx}^{\alpha_1+\beta_1}$ и воспользуемся следующим законом композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с одинаковыми началами [14, с. 44]:

$$D_{ax}^{\alpha}\ |t-a|^{\alpha+\beta}\, D_{at}^{\beta}\varphi(s) = |x-a|^{\beta}\ D_{ax}^{\alpha+\beta}\,|t-a|^{\alpha}\,\varphi(t),$$

который является справедливым для любых $\alpha \in]0, 1]$, $\beta < 0$ и $\varphi(x) \in L[0, r]$. Тогда уравнение (36) перепишется в следующей форме:

$$\tau'(x) + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} D_{rx}^{-\delta}\tau'(t) = F_1(x), \quad (38)$$

где $\delta = (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = \frac{2(n-m)}{(m+2)\,(n+2)}$,

$$F_1(x) = \frac{\gamma_2}{2\gamma_1}(r-x)^{-\alpha_1} D_{rx}^{\beta_1}(r-t)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right) + \frac{\gamma_4}{2\gamma_1} D_{rx}^{\alpha_1+\beta_1}(r-t)^{\beta_2} D_{rt}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{s+r}{2}\right).$$

Относительно $\tau'(x)$ уравнение (38) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром

$$K(x, t) = (t-x)^{\delta-1}/\Gamma(\delta).$$

Интегрированными ядрами ядра $K(x, t)$ служат функции

$$K_n(x, t) = (t-x)^{\delta-1}\frac{(t-x)^{\delta n}}{\Gamma(n\delta+\delta)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а функция

$$R\left(x, t; -\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^n K_n(x, t) = (t-x)^{\delta-1} E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta}; \delta\right],$$

где $E_{1/\delta}(z; \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\delta k+\mu)}$ — функция типа Миттаг-Леффлера, служит резольвентой ядра $K(x, t)$.

С помощью резольвенты $R\left(x,t;-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)$ ядра $K(x,t)$ решение уравнения (38) выписывается в явном виде по формуле

$$\tau'(x) = F_1(x) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\int\limits_x^r (t-x)^{\delta-1}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\delta\right]F_1(t)\,dt,$$

откуда

$$\tau(x) = \tau(r) - \int\limits_x^r \left\{1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\delta+1\right]\right\}F_1(t)\,dt. \tag{39}$$

Для остальных значений параметров a и b решение $\tau(x)$ задачи, получающейся после исключения функции $\nu(x)$ из соответствующих фундаментальных соотношений находятся по формулам:

$$\tau(x) = \tau(r) - \frac{\gamma_2}{2\gamma_1}\int\limits_x^r (r-t)^{-\alpha_1}D_{rt}^{\beta_1}(r-s)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{s+r}{2}\right)dt$$
$$- \frac{(2-2\beta_2)^{-\beta_2}}{\gamma_1}D^{\alpha_1+\beta_1-1}(r-t)^{\beta_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right), \quad |a| < \frac{m}{2},\ b = \frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \tau(r) - \int\limits_x^r \left\{1 - \frac{\gamma_6}{\gamma_1}(t-x)^{\delta}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_6}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\ \delta+1\right]\right\}F_2(t)\,dt,$$
$$|a| < \frac{m}{2},\ b = -\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \tau(r) - \frac{\gamma_4}{2\gamma_3}\int\limits_x^r (r-t)^{-\alpha_2}D_{rt}^{\beta_2}(r-s)^{\alpha_2+\beta_2}\psi_2'\left(\frac{s+r}{2}\right)dt$$
$$- \frac{(2-2\beta_1)^{-\beta_1}}{\gamma_3}D^{\alpha_2+\beta_2-1}(r-t)^{\beta_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right), \quad a = \frac{m}{2},\ |b| < \frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \psi_2\left(\frac{r+x}{2}\right) - \frac{(2-2\beta_1)^{-\beta_1}}{\gamma_6}D_{rx}^{\alpha_2-1}(r-t)^{\beta_1}\psi_1'\left(\frac{r+t}{2}\right),$$
$$a = \frac{m}{2},\ b = -\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \tau(r) - \int\limits_x^r \left\{1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_5}(t-x)^{\delta}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_5}(t-x)^{\delta};\delta+1\right]\right\}F_3(t)\,dt,$$
$$a = -\frac{m}{2},\ |b| < \frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \psi_1\left(\frac{r+x}{2}\right) - \frac{(2-2\beta_2)^{-\beta_2}}{\gamma_5}D_{rx}^{\alpha_1-1}(r-t)^{\beta_2}\psi_2'\left(\frac{r+t}{2}\right),$$
$$a = -\frac{m}{2},\ b = \frac{n}{2};$$

$$\tau(x)=\tau(r)-\int\limits_x^r\left\{1-\frac{\gamma_6}{\gamma_5}(t-x)^\delta E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_6}{\gamma_5}(t-x)^\delta;\delta+1\right]\right\}F_4(t)\,dt,$$

$$a=-\frac{m}{2},\ b=-\frac{n}{2},$$

где

$$\gamma_5=\frac{2^{1-\alpha_1}(1-\alpha_1)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)},\quad \gamma_6=\frac{2^{1-\alpha_2}(1-\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)};$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2\gamma_1}\left[\gamma_2(r-x)^{-\alpha_1}D_{rx}^{\beta_1}(r-t)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)+\gamma_6\,D_{rx}^{-\delta}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right],$$

$$F_3(x)=\frac{1}{2\gamma_5}\left[\gamma_4D_{rx}^{\alpha_1}(r-t)^{\beta_2}D_{rt}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{r+s}{2}\right)-\gamma_5\psi_1'\left(\frac{r+x}{2}\right)\right],$$

$$F_4(x)=\frac{1}{2\gamma_5}\left[\gamma_5\psi_1'\left(\frac{r+x}{2}\right)+\gamma_6D_{rx}^{-\delta}\psi_1'\left(\frac{r+t}{2}\right)\right].$$

Если $m=n$, то $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$, а потому уравнение (36) в этом случае перепишется в следующем виде

$$D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t)$$
$$=\frac{1}{2\,(\gamma_1+\gamma_3)}\left[\gamma_2(r-x)^{\beta_1}D_{rx}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)+\gamma_4(r-x)^{\beta_2}D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right],\quad (40)$$

Решение задачи (37), (40) имеет вид

$$\tau'(x)=\frac{\gamma_2}{2\,(\gamma_1+\gamma_3)}\left[D_{rx}^{\alpha_1+\beta_1}(r-t)^{\beta_1}D_{rt}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{r+s}{2}\right)+\gamma_4D_{rx}^{\alpha_2+\beta_2}(r-t)^{\beta_2}D_{rt}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{r+s}{2}\right)\right],$$

откуда

$$\tau(x)=\tau(r)-\frac{\gamma_2}{2\,(\gamma_1+\gamma_3)}\int\limits_x^r(r-t)^{-\alpha_1}D_{rt}^{\beta_1}(r-s)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{r+s}{2}\right)dt$$
$$-\frac{\gamma_4}{2\,(\gamma_1+\gamma_3)}\int\limits_x^r(r-t)^{-\alpha_2}D_{rt}^{\beta_2}(r-s)^{\alpha_2+\beta_2}\psi_2'\left(\frac{r+s}{2}\right)dt.$$

После того, как функция $\tau(x)$ найдена по одной из перечисленных выше формул, функцию $\nu(x)$ легко найти из соответствующих фундаментальных соотношений. Тогда решение исследуемой задачи 1 выписывается как решение задачи Коши для уравнения (1) в соответствующей области Ω_1 или Ω_2. $\triangleright$

В случае, когда имеет место равенство $(2a-m)^2+(2b-n)^2=0$ из (20) и (27) заключаем, что для разрешимости исследуемой задачи 1 необходимо, чтобы заданные функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ удовлетворяли условию

$$(2-2\beta_1)^{-\beta_1}\,(r-x)^{\beta_1}\,\psi_1'\left(\frac{x+r}{2}\right)+(2-2\beta_2)^{-\beta_2}\,(r-x)^{-\beta_2}\,\psi_2'\left(\frac{x+r}{2}\right)=0.\qquad (41)$$

При выполнении равенства (41) однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1 имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида

$$u(x,y)=g\left[x+\frac{2}{l+2}\,|y|^{(l+2)/2}\right]-g(r),$$

где $g(x)$ — произвольная функция из класса $C^1[0, r] \cap C^2]0, r[$; $l = m$ при $y < 0$ и $l = n$ при $y > 0$. Общее решение задачи 1 при соблюдении условия (41) дается формулой

$$u(x,y) = g\left[x + \frac{2}{l+2}\,|y|^{(l+2)/2}\right] - g(r) + \frac{2y}{l+2}\int\limits_0^1 \nu^*\left[x + \frac{2}{l+2}\,|y|^{(l+2)/2}\,(2t-1)\right](1-t)^{-l/(l+2)}\,dt,$$

где $\nu^*(x) = (2-2\beta_1)^{-\beta_1}(r-x)^{\beta_1}\psi_1'\left(\frac{x+r}{2}\right) = -(2-2\beta_2)^{-\beta_2}(r-x)^{-\beta_2}\psi_2'\left(\frac{x+r}{2}\right)$.

Таким образом, в отличие от строго гиперболических уравнений, для которых однородная первая краевая задача имеет только тривиальное решение [13], однородная первая краевая задача для вырождающихся гиперболических уравнений вида (1) при $(2a-m)^2 + (2b-n)^2 = 0$ будет иметь нетривиальное решение.

Автор выражает благодарность А. М. Нахушеву за постоянное внимание и поддержку.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, № 4.—С. 736–739.
2. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Диф. уравнения.—1971.—Т. 7, № 1.—С. 49–56.
3. *Gellerstedt S.* Sur un equation linearre aux derivees partieelles de type mixte // Arkiv Mat., Astr. och Fysik.—1937.—Bd. 25A, № 29.—P. 1–25.
4. *Кальменов Т. Ш.* О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений // Диф. уравнения.—1973.—Т. 9, № 1.—С. 84–96.
5. *Нахушев А. М.* К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщения АН ГССР.—1975.—Т. 77, № 3.—С. 545–548.
6. *Кумыкова С. К., Нахушева Ф. Б.* Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Диф. уравнения.—1978.—Т. 14, № 1.—С. 50–64.
7. *Кумыкова С. К.* Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Диф. уравнения.—1980.—Т. 16, № 1.—С. 93–104.
8. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Диф. уравнения.—1981.—Т. 17, № 1.—С. 129–136.
9. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения.—Минск: Вышэйшая школа, 1977.—160 с.
10. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.—Самара: Самарский филиал СГУ, 1992.—161 с.
11. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
12. *Кальменов Т. Ш.* К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Цикл научных работ Т. Ш. Кальменова.—Алматы: ИММM, 2013.—406 с.
13. *Нахушев А. М.* К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Диф. уравнения.—1978.—Т. 14, № 1.—С. 66–73.
14. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
16. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—271 с.

Статья поступила 30 июня 2015 г.

Балкизов Жираслан Анатольевич
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа
РОССИЯ, 360017, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: `Giraslan@yandex.ru`

THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

Balkizov Zh. A.

Under certain hypothesis on the coefficients the condition is found for unique solvability of the first boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation in the region. The uniqueness of the solution of the problem is proved by Tricomi method and existence by the method of integral equations. The solutions obtained with respect to the traces of the sought solution of integral equations are found and written out explicitly. It is shown that whenever the hypothesis of the theorem is violated, then the homogeneous problem corresponding to the problem under study has an infinite number of linearly independent solutions.

Key words: degenerate hyperbolic equation, first boundary value problem, Goursat problem, Cauchy problem, Mittag-Leffler function.