Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 26–35

УДК **519.652**

ξ-ЛИЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРАХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

И. М. Жураев

Изучаются ξ-лиевы дифференцирования на алгебрах локально измеримых операторов $LS(M)$, где M — алгебра фон Неймана, не содержащая прямых абелевых слагаемых.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, локально измеримый оператор, дифференцирование, лиево дифференцирование, ξ-лиево дифференцирование, центрозначный след.

Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра. Аддитивное (линейное) отображение $D : A \to A$ называется *аддитивным* (*линейным*) *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет линейное ассоциативное дифференцирование D_a в алгебре A по правилу $D_a(x) = ax - xa = [a, x]$, $x \in A$. Дифференцирования вида D_a называются *внутренними*.

Аддитивное (линейное) отображение $L : A \to A$ называется *аддитивным* (*линейным*) *лиевым дифференцированием*, если $L([x, y]) = [L(x), y] + [x, L(y)]$ для всех $x, y \in A$, где $[x, y]$ — коммутатор элементов x, y, т. е. $[x, y] = xy - yx$.

Аддитивное (линейное) отображение $L : A \to A$ называется *аддитивным* (*линейным*) *ξ-лиевым дифференцированием*, если $L([x, y]_\xi) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi$ для всех $x, y \in A$, где $[x, y]_\xi = xy - \xi yx$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Обозначим через $Z(A)$ центр A. Аддитивное (линейное) отображение $E : A \to Z(A)$ называется *аддитивным* (*линейным*) *следом* со значениями в $Z(A)$, если $E(xy) = E(yx)$ для всех $x, y \in A$.

Хорошо известно, что любое лиево дифференцирование L на C^*-алгебре A единственным образом представляется в виде $L = D + E$, где D — (ассоциативное) дифференцирование и E — центрозначный след на A [6]. Такое представление лиевого дифференцирования L называют *стандартной формой* для L. В случае, когда A является алгеброй фон Неймана, стандартная форма лиевого дифференцирования $L : A \to A$ имеет вид $L = D_a + E$ для некоторого $a \in A$ [8]. Проблема о представлении всякого лиевого дифференцирования в стандартной форме для случая $S(M)$-алгебр измеримых операторов была рассмотрена в [3].

Мы в данной работе изучаем более общий вопрос в этом направлении, т. е. изучаем ξ-лиевы дифференцирования на алгебрах локально измеримых операторов $LS(M)$, где алгебра фон Неймана M не содержит прямых абелевых слагаемых.

Пусть H — гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, M — подалгебра фон

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского Союза в рамках программы Erasmus Mundus, проект Target II № 2011-2569.

Неймана в $B(H)$, $\mathscr{P}(M)=\{p\in M: p^2=p=p^*\}$ — решетка всех проекторов из M и $\mathscr{P}_{fin}(M)$ — ее подрешетка всех конечных проекторов из $\mathscr{P}(M)$. Через $Z(M)$ обозначим центр алгебры M, а через $\mathbf{1}$ — единичный оператор из M.

Линейное подпространство $\mathscr{D}$ в H называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* M (обозначение: $\mathscr{D}\,\eta\, M$), если $u(\mathscr{D})\subseteq\mathscr{D}$ для любого унитарного оператора u из коммутанта $M'=\{y\in B(H): xy=yx\ (\forall\, x\in M)\}$ алгебры фон Неймана M.

Линейное подпространство $\mathscr{D}$ в H называется *сильно плотным в* H *относительно алгебры фон Неймана* M, если $\mathscr{D}\,\eta\, M$ и существует такая последовательность проекторов $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{P}(M)$, что $p_n\uparrow\mathbf{1}$, $p_n(H)\subset\mathscr{D}$ и $p_n^{\perp}:=\mathbf{1}-p_n\in\mathscr{P}_{fin}(M)$ для любого $n\in\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Линейный оператор x, действующий в H, с плотной областью определения $\mathscr{D}(x)$ называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* M, если $\mathscr{D}(x)\ \eta\ M$ и $ux(\xi)=xu(\xi)$ для всех $\xi\in\mathscr{D}(x)$ и любого унитарного оператора $u\in M'$.

Замкнутый линейный оператор x, присоединенный к M, называется *измеримым относительно алгебры фон Неймана* M, если $\mathscr{D}(x)$ сильно плотно в H. Множество $S(M)$ всех операторов, измеримых относительно M, является $*$-алгеброй с единицей $\mathbf{1}$ над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, при этом считается, что $0\cdot x=0$) [10].

Замкнутый линейный оператор x, присоединенный к M, называется *локально измеримым относительно алгебры фон Неймана* M, если существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $z_n\uparrow\mathbf{1}$ и $xz_n\in S(M)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Множество $LS(M)$ всех локально измеримых относительно M операторов также образует $*$-алгебру с единицей $\mathbf{1}$ относительно операций сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору, при этом $S(M)$ и M есть $*$-подалгебры в $LS(M)$ [7, гл. II, § 2.3]. Центр $Z(LS(M))$ в $*$-алгебре $LS(M)$ совпадает с $*$-алгеброй $S(Z(M))$, и в случае когда M — фактор, либо M — конечная алгебра фон Неймана, всегда верно равенство $LS(M)=S(M)$.

Если M — коммутативная алгебра фон Неймана, то алгебра $LS(M)$ также коммутативна [7, гл. II, § 2.2], и поэтому для любой подалгебры A в $LS(M)$ имеем, что $Z(A)=A$. Следовательно, в этом случае, класс лиевых дифференцирований на A совпадает с классом $Z(A)$-значных следов на A.

Пусть M — алгебра фон Неймана с центром $Z=Z(M)$ и M не имеет прямых абелевых слагаемых. В этом случае в M существует такой ненулевой проектор p, что $z(p)=z(\mathbf{1}-p)$, где $z(p)$ — центральный носитель для p [4, Problem 6.1.9]. Рассмотрим произвольную идеальную $*$-подалгебру A в $LS(M)$, для которой $M\subset A$.

Положим $p_1=p$, $p_2=\mathbf{1}-p$ и $S_{ij}=p_i\,A\,p_j=\{p_ixp_j: x\in A\}$, $i,j=1,2$. Ясно, что S_{ij} есть подалгебра в A. Из равенства

$$x=(p+(\mathbf{1}-p))x(p+(\mathbf{1}-p))=p_1xp_1+p_1xp_2+p_2xp_1+p_2xp_2$$

следует $A=\sum_{i,j=1,2}p_iAp_j$. Кроме того, для $x\in S_{ik}$, $y\in S_{lj}$ имеем, что $xy=0$, если $k\neq l$ и $xy=(p_ixp_k)(p_lyp_j)\in S_{ij}$, т. е. $S_{ik}S_{lj}\subset S_{ij}$ для всех $i,j,k,l=1,2$. Отметим также, что из включения $M\subset A$ следует, что $p_iMp_j\subset S_{ij}$ для любых $i,j=1,2$.

Для каждого $x\in A$ через $z(x)$ обозначим центральный носитель для x, т. е. $z(x):=\mathbf{1}-\sup\{z\in\mathscr{P}(Z(M)): zx=0\}$. Ниже рассмотрим ξ-лиево дифференцирование на алгебрах локально измеримых операторов, где $\xi\neq 1$.

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$pL(\mathbf{1})(\mathbf{1}-p)=(\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1})p=0$$

и

$$(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) = pL(\mathbf{1}-p)p = 0.$$

$\lhd$ Так как $p(\mathbf{1}-p)=0$, то $[L(p),\mathbf{1}-p]_\xi + [p, L(\mathbf{1}-p)]_\xi = 0)$. Таким образом,

$$L(p)(\mathbf{1}-p) - \xi(\mathbf{1}-p)L(p) + pL(\mathbf{1}-p) - \xi L(\mathbf{1}-p)p = 0, \tag{1}$$

следовательно, $(\mathbf{1}-p)p = 0$, $[L(\mathbf{1}-p),p]_\xi + [\mathbf{1}-p, L(p)]_\xi = 0$, т. е.

$$L(\mathbf{1}-p)p - \xi pL(\mathbf{1}-p) + (\mathbf{1}-p)L(p) - \xi L(p)(\mathbf{1}-p) = 0. \tag{2}$$

Умножая равенство (1) слева и справа на p и $\mathbf{1}-p$ соответственно, имеем

$$pL(p)(\mathbf{1}-p) + pL(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p) = 0,$$

и поэтому $pL(\mathbf{1})(\mathbf{1}-p) = 0$. Умножая равенство (2) слева и справа на $\mathbf{1}-p$ и p соответственно, имеем

$$(\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1}-p)p + (\mathbf{1}-p)L(p)p = 0,$$

и поэтому $(\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1})p = 0$. Умножая равенство (1) с обеих сторон на $\mathbf{1}-p$, имеем

$$(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) - \xi(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) = 0,$$

и поэтому $(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) = 0$. Умножая равенство (2) с обеих стороны на p, имеем

$$pL(\mathbf{1}-p)p - \xi pL(\mathbf{1}-p)p = 0,$$

и поэтому $pL(\mathbf{1}-p)p = 0$. $\rhd$

Определим отображение $\delta : LS(M) \to LS(M)$ следующим образом: $\delta(x) = L(x) + ax - xa$ для всех $x \in LS(M)$, где $a = pL(p)(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)L(p)p$. Ясно, что δ является аддитивным отображением и $[\delta(x), y]_\xi + [x, \delta(y)]\xi = \delta([x,y])$ для всех $x, y \in LS(M)$, где $xy = 0$. Кроме того, согласно лемме 1 имеем $p\delta(\mathbf{1})(\mathbf{1}-p) = (\mathbf{1}-p)\delta(\mathbf{1})p = (\mathbf{1}-p)\delta(p)(\mathbf{1}-p) = p\delta(\mathbf{1}-p)p = 0$.

Таким образом,

$$\delta(p) = L(p) + bp - pb = pL(p)p = p\delta(p)p - p(bp-pb)p = p\delta(p)p, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{1}-p) &= L(\mathbf{1}-p) + b(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)b = (\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p) \\ &= (\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)(b(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)b)(\mathbf{1}-p) \\ &= (\mathbf{1}-p)\delta(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p). \end{aligned} \tag{4}$$

Лемма 2. *Для $i = 1, 2$ справедливо $\delta(S_{ii}) \subseteq S_{ii}$.*

$\lhd$ Пусть $x_{11} \in S_{11}$. Так как $x_{11}(\mathbf{1}-p) = 0$, то $[\delta(x_{11}), \mathbf{1}-p]_\xi + [x_{11}, \delta(\mathbf{1}-p)]_\xi = 0$. Из этого равенства и (4) имеем

$$\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p) - \xi(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11}) = 0. \tag{5}$$

Умножая равенство (4) слева на p, получаем

$$p\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p) = 0. \tag{6}$$

Умножая равенство (4) с обеих сторон на $\mathbf{1}-p$, получаем $(\mathbf{1}-\xi)(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p)=0$, откуда следует

$$(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p)=0, \tag{7}$$

поскольку $\xi\neq 1$. С другой стороны, $(\mathbf{1}-p)x_{11}=0$, и мы имеем $[\delta(\mathbf{1}-p),x_{11}]_\xi+[\mathbf{1}-p,\delta(x_{11})]=0$. Таким образом, $(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})-\xi\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p)=0$. Умножая это равенство на p, имеем

$$(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})p=0. \tag{8}$$

Из равенств (6)–(8) получаем $\delta(x_{11})\in S_{11}$. Поэтому $\delta(S_{11})\subseteq S_{11}$. Случай $\delta(S_{22})\subseteq S_{22}$ рассматривается аналогично. $\rhd$

Лемма 3. *$\delta(\mathbf{1})\in Z(LS(M))$ и $\delta(p_i)x_{ij}=x_{ij}\delta(p_j)$ для любых $x_{ij}\in S_{ij}$, $i\neq j=1,2$.*

$\lhd$ Пусть $x_{12}\in S_{12}$. Так как $x_{12}p_1=0$, то имеем

$$\delta(-\xi x_{12})=[\delta(x_{12}),p_1]_\xi+[x_{12},\delta(p_1)]_\xi=\delta(x_{12})p_1-\xi p_1\delta(x_{12})+x_{12}\delta(p_1)-\xi\delta(p_1)x_{12}. \tag{9}$$

Так как $p_2x_{12}=0$, то

$$\delta(-\xi x_{12})=[\delta(p_2),x_{12}]_\xi+[p_2,\delta(x_{12})]_\xi=\delta(p_2)x_{12}-\xi x_{12}\delta(p_2)+p_2\delta(x_{12})-\xi\delta(x_{12})p_2. \tag{10}$$

Из равенств (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned}\delta(x_{12})p_1-\xi p_1\delta(x_{12})p_1+x_{12}\delta(p_1)-\xi\delta(p_1)x_{12}&\\ =\delta(p_2)x_{12}-\xi x_{12}\delta(p_2)+p_2\delta(x_{12})-\xi\delta(x_{12})p_2&.\end{aligned} \tag{11}$$

При $\xi\neq 0$, умножая равенство (11) слева и справа на p_1 и p_2, согласно равенствам (3) и (4) имеем $\delta(p_1)x_{12}=p_1\delta(p_1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(p_2)p_2=x_{12}\delta(p_2)$. При $\xi=0$, используя равенство $(p_1+x_{12})(x_{12}-p_2)=(x_{12}-p_2)(p_1+x_{12})=0$, имеем

$$(\delta(p_1)+\delta(x_{12}))(x_{12}-p_2)+(p_1+x_{12})(\delta(x_{12})-\delta(p_2))=0$$

и

$$(\delta(x_{12})-\delta(p_2))(p_1+x_{12})+(x_{12}-p_2)(\delta(p_1)+\delta(x_{12}))=0,$$

откуда получаем

$$\delta(p_1)x_{12}+\delta(x_{12})x_{12}-\delta(x_{12})p_2+p_1\delta(x_{12})+x_{12}\delta(x_{12})-x_{12}\delta(p_2)=0$$

и

$$\delta(x_{12})p_1+\delta(x_{12})x_{12}+x_{12}\delta(x_{12})-p_2\delta(x_{12})=0.$$

Из последних равенств следует $\delta(p_1)x_{12}=x_{12}\delta(p_2)$. Далее, учитывая равенства (3) и (4), имеем $p_1\delta(p_1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(p_2)p_2$. Таким образом, заключаем, что

$$\delta(p_1)x_{12}=p_1\delta(p_1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(p_2)p_2=x_{12}\delta(p_2)$$

для всех $x_{12}\in S_{12}$. Заметим, что $p_1\delta(p_2)p_1=p_2\delta(p_1)p_2=0$. Отсюда $p_1\delta(1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(\mathbf{1})p_2$, и поэтому

$$\delta(\mathbf{1})x_{12}=(p_1\delta(\mathbf{1})p_1+p_2\delta(\mathbf{1})p_2)x_{12}=x_{12}(p_2\delta(\mathbf{1})p_2+p_1\delta(\mathbf{1})p_1)=x_{12}\delta(\mathbf{1}) \tag{12}$$

для всех $x_{12}\in S_{12}$. Аналогично можно показать, что

$$\delta(p_2)x_{21}=x_{21}\delta(p_1),\quad \delta(\mathbf{1})x_{21}=x_{21}\delta(\mathbf{1}),\quad x_{21}\in S_{21}. \tag{13}$$

Теперь из равенств (12), (13) имеем $\delta(\mathbf{1})\in Z(LS(M))$. $\rhd$

Лемма 4. *Для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 2)$ следующие утверждения эквивалентны:*
1) *если $\xi \neq -1$, то $\delta(x_{ij}) \in S_{ij}$;*
2) *если $\xi = -1$, то $p_1\delta(x_{ij})p_1 = p_2\delta(x_{ij})p_2 = 0$ и $\delta(x_{ij})x_{ij} + x_{ij}\delta(x_{ij}) = 0$.*

$\lhd$ Для любого $x_{12} \in S_{12}$ верно равенство (11). Умножая это равенство с обеих сторон на p_1 и p_2 соответственно и принимая во внимание, что $\xi \neq 1$, а также и равенства (3), (4), легко видеть, что
$$p_1\delta(x_{12})p_1 = p_2\delta(x_{ij})p_2 = 0. \tag{14}$$
Полное доказательство утверждения 1) следует из равенства $p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\xi = 0$.

Для любого x_{12} имеем $x_{12}p_1 = 0$, поэтому
$$\delta(x_{12})p_1 = x_{12}\delta(p_1) = 0. \tag{15}$$

Умножая равенство (15) слева на p_2, получим $p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$. Таким образом, имея ввиду это равенство и равенство (14), имеем $\delta(x_{12}) = p_1\delta(x_{12})p_2 \in S_{12}$.

Случай 2. $\xi \neq 0, -1$.

Пусть $x_{12}, y_{12} \in S_{12}$. Так как $(y_{12} - p_2)(p_1 + x_{12}) = 0$, то согласно равенствам (3), (4) имеем
$$\begin{aligned}\delta(-\xi x_{12} + \xi x_{12}) = \delta([y_{12} - p_2, p_1 + x_{12}]_\xi) = [\delta(y_{12} - p_2), p_1 + x_{12}]_\xi \\ + [y_{12} - p_2, \delta(p_1 + x_{12})]_\xi = \delta(y_{12})p_1 + \delta(y_{12})x_{12} - \xi p_1\delta(y_{12}) - \xi x_{12}\delta(y_{12}) \\ + \xi x_{12}\delta(p_2) + y_{12}\delta(x_{12}) - p_2\delta(x_{12}) - \xi\delta(p_1)y_{12} - \xi\delta(x_{12})y_{12} + \xi\delta(x_{12})p_2.\end{aligned} \tag{16}$$
Умножая равенство (16) с обеих сторон на p_2 и применяя равенство (14), получаем
$$p_2\delta(y_{12})p_1x_{12} = \xi p_2\delta(x_{12})p_1y_{12} \quad (\forall\, x_{12}, y_{12} \in S_{12}). \tag{17}$$
Умножая равенство (9) на p_2 и p_1 слева и справа соответственно, имеем
$$p_2\delta(x_{12})p_1 = p_2\delta(-\xi x_{12})p_1 \quad (\forall\, x_{12} \in S_{12}). \tag{18}$$
Из равенств (17) и (18) имеем
$$-p_2\delta(y_{12})p_1x_{12} = p_2\delta(\xi y_{12})p_1x_{12} = \xi p_2\delta(x_{12})p_1(\xi y_{12}) = \xi^2 p_2\delta(x_{12})p_1y_{12}$$
для всех $x_{12}, y_{12} \in S_{12}$. Таким образом, из равенства (17) вытекает, что
$$p_2\delta(x_{12})p_1y_{12} = 0 \quad (\forall\, x_{12}, y_{12} \in S_{12}). \tag{19}$$
Аналогично, умножая равенство (16) на p_1 с обеих сторон и используя равенства (14) и (18), получаем
$$y_{12}p_2\delta(x_{12})p_1 = 0 \quad (\forall\, x_{12} \in S_{12}). \tag{20}$$
Также заметим, что $p_2\delta(x_{12})p_1y_{21} = y_{21}p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$ для всех $y_{12} \in S_{12}$. Тогда из равенств (19), (20) следует, что $p_2\delta(x_{12})p_1 \in Z(LS(M))$, и поэтому $p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$. Таким образом, доказано утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что при $\xi = -1$ имеет место равенство $xy = 0 \Rightarrow \delta(xy+yx) = \delta(x)y+x\delta(y)+\delta(y)x+y\delta(x)$. Так как $x_{12} \in S_{12}$, $(p_1+x_{12})(x_{12}-p_2) = 0$, то $\delta(p_1+x_{12})(x_{12}-p_2)+(x_{12}-p_2)\delta(p_1+x_{12})+\delta(x_{12}-p_2)(p_1+x_{12})+(p_1+x_{12})\delta(x_{12}-p_2) = 0$.

Отсюда, используя равенство (11), заключаем, что $\delta(x_{12})x_{12} + x_{12}\delta(x_{12}) = 0$. Учитывая это и равенство (14), получаем (2). $\rhd$

Лемма 5. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $\xi \neq 0, -1$, *то* $\delta(\xi xy) = \xi\delta(x)y + \xi x\delta(y)$ *для всех* $x, y \in LS(M)$;

2) *если* $\xi = 0$, *то существует аддитивное дифференцирование* φ *такое, что* $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ *для всех* $x \in LS(M)$;

3) *если* $\xi = -1$, *то* $\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$ *для всех* $x \in LS(M)$, *т. е.* δ *есть аддитивное йорданово дифференцирование.*

$\lhd$ *Случай* 1. $\xi \neq 0, -1$.

В этом случае докажем, что $\delta(\xi xy) = \xi\delta(x)y + \xi x\delta(y)$ для всех $x, y \in LS(M)$.

1. $\delta(\xi x_{ii}y_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ij} + \xi x_{ii}\delta(y_{ij})$ для всех $x_{ii}, y_{ij} \in S_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. На самом деле для всех $x_{ii} \in S_{ii}$, $y_{ij} \in S_{ij}$ имеем $y_{ij}x_{ii} = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению 1) леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} -\delta(\xi x_{ii}y_{ij}) &= \delta([y_{ij}, x_{ii}]_\xi) \\ &= \delta(y_{ij})x_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ij}) + y_{ij}\delta(x_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ij} = -\xi x_{ii}\delta(y_{ij}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ij}, \end{aligned}$$

т. е. $\delta(\xi x_{ii}y_{ij}) = \xi x_{ii}\delta(y_{ij}) + \xi\delta(x_{ii})y_{ij}$ для всех $x_{ii} \in S_{ii}$ и $y_{ij} \in S_{ij}$. Аналогичным образом можно получить, что

2. $\delta(\xi x_{ij}y_{jj}) = \xi x_{ij}\delta(y_{jj}) + \xi\delta(x_{ij})y_{jj}$ для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{jj} \in S_{jj}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$;

3. $\delta(\xi x_{ii}y_{ii} = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}) + \xi x_{ii}\delta(y_{ii})$ для всех $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$, $i = 1, 2$.

Пусть $i \neq j$. Для любых $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$, $i = 1, 2$, и $s_{ij} \in S_{ij}$, согласно п. 1 получим

$$\delta(\xi x_{ii}y_{ii}s_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}s_{ij} + \xi x_{ii}y_{ii}\delta(s_{ij}).$$

С другой стороны,

$$\delta(\xi x_{ii}y_{ii}s_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}s_{ij}\xi x_{ii}\delta(y_{ii}s_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}s_{ij} + \xi^2 x_{ii}\delta(\xi^{-1}y_{ii})s_{ij} + \xi x_{ii}y_{ii}\delta(s_{ij}).$$

Сопоставляя последние два равенства, получаем

$$\Big(\delta(x_{ii}y_{ii}) - \delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(\xi^{-1}y_{ii})\Big)s_{ij} = 0.$$

Следовательно,

$$\Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(yii)\Big)s_{ij} = 0 \tag{21}$$

для всех $s_{ij} \in S_{ij}$. Аналогично для всех $s_{ji} \in S_{ij}$ имеем

$$s_{ji}\Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii})\Big) = 0. \tag{22}$$

Также согласно лемме 2 имеем

$$s_{ij}\Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii})\Big) = \Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii})\Big)s_{ji} = 0.$$

Из равенств (21) и (22) вытекает $\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii}) \in Z(LS(M))$, откуда получаем $\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii}) = 0$.

4. $\delta(\xi x_{ij}y_{ji}) = \xi\delta(x_{ij})y_{ji} + \xi x_{ij}\delta(y_{ji})$ для всех $x_{ij} \in S_{ij}$, $y_{ji} \in S_{ji}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$.

Для любых $x_{ij} \in S_{ij}$, $y_{ji} \in S_{ji}$, $i \neq j$, $(x_{ij}y_{ji} - x_{ij} - y_{ji} + p_j) = 0$. Отсюда, согласно определению $-\delta$, имеем

$$\delta(x_{ij}y_{ji} - \xi x_{ij} - \xi y_{ji}x_{ij}y_{ji} - \xi y_{ji}x_{ij}) = \delta\big([x_{ij}y_{ji} - x_{ij} - y_{ji} + p_j, p_i + y_{ji}]_\xi\big) = 0.$$

Таким образом, согласно лемме 2 и утверждению 1) леммы 4 имеем

$$\delta(\xi x_{ij}y_{ji}) - \delta(\xi x_{ij}) - \delta(\xi y_{ji}x_{ij}) = \delta(x_{ij})y_{ji} + \delta(y_{ji})p_i - \delta(p_j)y_{ji} - \xi\delta(x_{ij})$$
$$- \xi y_{ji}\delta(x_{ij}) - x_{ij}y_{ji}\delta(p_i) + x_{ij}\delta(y_{ji}) + y_{ji}\delta(p_i) - p_j\delta(y_{ji}) - \xi\delta(p_i)x_{ij} - \xi\delta(y_{ji})x_{ij}.$$

Умножая это равенство с обеих сторон на p_j и применяя леммы 2 и 4, получаем $\delta(\xi y_{ji}x_{ij}) = \xi\delta(y_{ji})x_{ij} + \xi y_{ji}\delta(x_{ij})$.

Теперь для произвольных $x, y \in LS(M)$ согласно пп. 1–4 и аддитивности δ имеем $\delta(\xi xy) = \xi\delta(x)y + \xi x\delta(y)$ для всех $x, y \in LS(M)$. Таким образом, в итоге получим утверждение 1) леммы 5.

Случай 2. Пусть δ удовлетворяет условию: если $xy = 0$, то $\delta(x)y + x\delta(y) = 0$. Покажем, что

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(\mathbf{1})xy$$

для всех $x, y \in LS(M)$. Пусть $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. Согласно лемме 2 и утверждению 1) леммы 4 имеем $(x_{ii} + x_{ii}y_{ij})(p_j - y_{ij}) = 0$. Отсюда

$$\delta(x_{ii}y_{ij}) = \delta(x_{ii})y_{ij} + x_{ii}\delta(y_{ij}) - x_{ii}y_{ij}\delta(p_j) \tag{23}$$

для всех $x_{ii} \in S_{ii}$ и $y_{ij} \in S_{ij}$. Из равенства $(p_i - x_{ij})(y_{jj} + x_{ij}y_{jj}) = 0$ вытекает

$$\delta(x_{ij}y_{jj}) = \delta(x_{ij})y_{jj} + x_{ij}\delta(y_{jj}) - \delta(p_i)x_{ij}y_{jj} \tag{24}$$

для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{jj} \in S_{jj}$. Тогда согласно лемме 3 и равенству (23), рассуждая аналогично п. 3 случая 1, имеем

$$\delta(x_{ii}y_{ii}) = \delta(x_{ii})y_{ii} + x_{ii}\delta(y_{ii}) - x_{ii}y_{ii}\delta(p_i) \tag{25}$$

для всех $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$. Теперь, используя равенство $(x_{ij} + x_{ij}y_{ji})(p_i - y_{ji}) = 0$, лемму 2 и утверждение 1) леммы 4, имеем

$$\delta(x_{ij}y_{ji}) = \delta(x_{ij})y_{ji} + x_{ij}\delta(y_{ji}) - x_{ij}y_{ji}\delta(p_i) \tag{26}$$

для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{ji} \in S_{ji}$. Аналогично для аддитивного δ, сопоставляя равенства (23)–(26), получим $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(\mathbf{1})xy$ для всех $x, y \in LS(M)$. Теперь φ определим следующим образом: $\varphi(x) = \delta(x) - \delta(\mathbf{1})x$. Заметим, что $\delta(\mathbf{1}) \in Z(LS(M))$. Таким образом, имеем

$$\varphi(xy) = \delta(xy) - \delta(\mathbf{1})xy = \delta(x)y + x\delta(y) - 2\delta(\mathbf{1})xy$$
$$= (\varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x)y + x(\varphi(y) + \delta(\mathbf{1})y) - 2\delta(\mathbf{1})xy = \varphi(x)y + x\varphi(y)$$

для всех $x, y \in LS(M)$. Поэтому δ является аддитивным дифференцированием и $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ для всех x.

Случай 3. $\xi = -1$.

В этом случае δ удовлетворяет условию

$$xy = 0 \Rightarrow \delta(yx) = \delta(x)y + x\delta(y) + \delta(y)x + y\delta(x).$$

Покажем, что δ — йорданов гомоморфизм, удовлетворяющий условию (3).

Пусть $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. Для любых $x_{ii} \in S_{ii}$ и $y_{ij} \in S_{ij}$ имеем $y_{ij}x_{ii} = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению 2) леммы 4 имеем

$$\delta(x_{ii}y_{ij}) = \delta(x_{ii})y_{ij} + x_{ii}\delta(y_{ij}) + \delta(y_{ij})x_{ii} \tag{27}$$

для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{jj} \in S_{jj}$, поскольку $y_{jj}x_{ij} = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению 2) леммы 4 имеем

$$\delta(x_{ij}y_{jj}) = \delta(x_{ij})y_{jj} + x_{ij}\delta(y_{jj}) + y_{jj}\delta(x_{ij}) \tag{28}$$

для всех $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$. Согласно лемме 3 и равенству (27) аналогично п. 3 случая 1, можно показать, что

$$\delta(x_{ii}y_{ii}) = \delta(x_{ii})y_{ii} + x_{ii}\delta(y_{ii}). \tag{29}$$

Для любых $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{ji} \in S_{ji}$ имеем $(x_{ij}x_{ji} + x_{ij} + x_{ji} + p_j)(p_i - x_{ij} - x_{ji} + x_{ji}x_{ij}) = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению (2) леммы 4 получаем

$$\delta(x_{ij}x_{ji}) = \delta(x_{ij})x_{ji} + x_{ij}\delta(x_{ji}), \quad \delta(x_{ji}x_{ij}) = \delta(x_{ji})x_{ij} + x_{ji}\delta(x_{ij}). \tag{30}$$

Теперь, комбинируя равенства (27)–(30), получаем $\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$ для всех $x \in LS(M)$, т. е. δ — йорданово дифференцирование. $\rhd$

Лемма 6. *Если $\xi \neq 0, -1$, то существует аддитивное дифференцирование φ, удовлетворяющее равенству $\varphi(\xi \mathbf{1}) = \xi\delta(\mathbf{1})$, такое, что $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ для всех x; в частности, для рациональных комплексных ξ, δ является аддитивным.*

$\lhd$ Согласно утверждению 1) леммы 5 имеем $\delta(\xi xy) = \xi(\delta(x)y + x\delta(y)$ для любых $x, y \in LS(M)$. В частности, для любых x, y, где $xy = 0$, имеем $\xi(\delta(x)y + x\delta(y) = \delta(\xi xy) = \delta(0) = 0$. Таким образом, $\delta(x)y + x\delta(y) = 0$ для любых x, y, где $xy = 0$ так, что δ удовлетворяет условию $\xi = 0$. Тогда согласно утверждению 2) леммы 5 существует аддитивное дифференцирование φ такое, что $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ для всех x. Кроме того, $\delta(\xi\mathbf{1}) = \xi\delta(\mathbf{1})\mathbf{1} + \xi\mathbf{1}\delta(\mathbf{1})$, так как $\delta(\xi\ \mathbf{1}\ ) \in Z(LS(M))$ и $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi\delta(\mathbf{1})$ согласно лемме 3. Поскольку δ — аддитивное для любого комплексного рационального числа r и любого $x \in LS(M)$, то имеем $\delta(rx) = r\delta(x)$. Так как $0 = -\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(i^2\mathbf{1}) = \varphi(i\mathbf{1})i\mathbf{1} + i\mathbf{1}\varphi(i\mathbf{1}) = 2i\varphi(i\mathbf{1})$, то $\varphi(i\mathbf{1}) = 0$, $\delta(i\mathbf{1}) = i\delta(\mathbf{1})$, для любого комплексного рационального числа i. Таким образом, если ξ — рациональное комплексное число, то $xi\delta(\mathbf{1}) = \delta(xi\mathbf{1}) = 2xi\delta(\mathbf{1})$. Отсюда $\delta(\mathbf{1}) = 0$, так как $\delta = \varphi$ является аддитивным дифференцированием. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть $LS(M)$ — алгебра локально измеримых операторов, где M не содержит прямого абелевого слагаемого. Пусть $L : LS(M) \to LS(M)$ — аддитивное отображение и $\xi \neq 1$.*

Тогда $L([x,y]_\xi) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi$ для всех $x, y \in LS(M)$, где $xy = 0$ тогда и только тогда, когда $L(1) \in Z(LS(M))$ и выполняются следующие условия:

1) при $\xi \neq 0, -1$ существует аддитивное дифференцирование φ, где $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi L(\mathbf{1})$ такое, что $L(x) = \varphi(x) + L(\mathbf{1})x$ для всех $x \in LS(M)$; в частности, L — аддитивное дифференцирование, где ξ — комплексное рациональное число;

2) при $\xi = 0$ существует аддитивное дифференцирование φ такое, что $L(x) = \varphi(x) + L(\mathbf{1})x$ для всех $x \in LS(M)$;

3) при $\xi = -1$ отображение L является йордановым дифференцированием, т. е. $L(x^2) = L(x)x + xL(x)$ для всех $x \in LS(M)$.

$\lhd$ Ясно, что из каждого утверждения 1)–3) вытекает

$$xy = 0 \Rightarrow L([x,y]_\xi) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi.$$

Пусть утверждение 1) выполняется. Тогда для любых x, y, $xy = 0$, имеем

$$\begin{aligned} L([x,y]_\xi) &= -L(\xi yx) = -(\varphi(\xi yx) + \xi L(\mathbf{1})yx) = -(\varphi(\xi\mathbf{1})yx + \xi\varphi(yx) + \xi L(\mathbf{1})yx) \\ &= -(\xi\varphi(y)x + \xi y\varphi(x) + 2\xi L(\mathbf{1})yx) = \varphi(x)y + x\varphi(y) + 2L(\mathbf{1})xy \\ &\quad -(\xi\varphi(y)x + \xi y\varphi(x) + 2\xi L(\mathbf{1})yx) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi. \end{aligned}$$

Заметим, что $L(x) = \delta(x) + xs - sx$ для всех $x \in LS(M)$ и $L(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1})$. Согласно леммам 5 и 6 отображение L имеет требуемую в теореме 1 форму. $\rhd$

Следствие. *Пусть алгебра фон Неймана M типа I_∞ или типа III. Пусть $L : LS(M) \to LS(M)$ — аддитивное отображение и $L([x,y]_\xi) = [L(x),y]_\xi + [x,L(y)]_\xi$, $\xi \neq 0,1,-1$, для всех $x,y \in LS(M)$, где $xy = 0$.*

Тогда $L = D_a$ для всех $x \in LS(M)$, где D_a — внутреннее дифференцирование на алгебре $LS(M)$.

$\lhd$ Согласно утверждению 1) теоремы 1 существует аддитивное дифференцирование φ, где $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi L(\mathbf{1})$ и $L(x) = \varphi(x) + L(\mathbf{1})x$ для всех $x \in LS(M)$. В случае алгебры фон Неймана M типа I_∞, либо типа III, как показано в [2, следствие 3.4], любое аддитивное ассоциативное дифференцирование на $LS(M)$ является внутренним. Отсюда и из равенства $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi L(\mathbf{1})$ получаем, что $L(1) = 0$. Итак, $L = \varphi = D_a$ для некоторого $a \in LS(M)$. $\rhd$

При $\xi = 1$ получим

Теорема 2 (ср. [12, теорема 2])**.** *Если M — алгебра фон Неймана типа I_∞ либо типа III, то любое аддитивное лиево дифференцирование L на алгебре $LS(M)$ является линейным лиевым дифференцированием и имеет вид $L = D_a + E$, где D_a — внутреннее дифференцирование на алгебре $LS(M)$ и E — линейный $Z(LS(M))$-значный след на $LS(M)$.*

В случае алгебр фон Неймана типа I_∞ теорема 2 имеет существенное уточнение. В [11] установлено, что для алгебр фон Неймана M, имеющих тип I_∞, всегда верно равенство $[LS(M), LS(M)] = LS(M)$. Поэтому для таких алгебр любой $Z(LS(M))$-значный след на $LS(M)$ тождественно равен нулю, что в силу теоремы 2 влечет

Следствие (ср. [12])**.** *Пусть M — алгебра фон Неймана типа I_∞. Тогда любое аддитивное лиево дифференцирование в $LS(M)$ является линейным ассоциативным дифференцированием.*

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность за гостеприимство Технологическому университету Белфорт-Монбельяр, Франция.

Литература

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., and Kudaybergenov K. K.* Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras // J. Func. Anal.—2009.—Vol. 256.—P. 2917–2943.
2. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Additive derivations algebras of measurable operators // J. Operator Theory.—2012.—Vol. 67, № 2.—P. 101–116.
3. *Жураев И. М.* Структура лиевых дифференцирований алгебр измеримых операторов // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 3.—С. 58–62.
4. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. I: Elementary Theory.—N. Y. etc.: Acad. Press, 1983.—398 p.
5. *Kusraev A. G.* Automorphisms and derivations on a universally complete complex f-algebra // Siberian Math. J.—2006.—Vol 47.—P. 77–85.
6. *Mathieu M., Villena A. R.* The structure of Lie derivations on C^*-algebras // J. Func. Anal.—2003.—Vol. 202.—P. 504–525.
7. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.—Київ: Праці Ін-ту матемематики НАН України, 2007.—Т. 69.—390 с.
8. *Robert Miers C.* Lie derivations of von Neumann algebras // Duke Math. J.—1973.—Vol. 40.—P. 403–409.
9. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-Algebras.—N. Y.–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1971.
10. *Segal I.* A non-commutative extention of abstract integration // Ann. Math.—1953.—Vol. 57.—P. 401–457.

11. *Чилин В. И., Жураев И. М.* Коммутаторы локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I // Материалы Республиканской науч. конф.—Ургенч, 2012.—Т. 2.—С. 122–124.
12. *Чилин В. И., Жураев И. М.* Аддитивные лиево дифференцирования на алгебрах локально измеримых операторов // Материалы Республиканской науч. конф.—Ташкент, 2013.—С. 256–258.

Статья поступила 2 марта 2015 г.

Жураев Илхом Мухитдинович
Бухарский государственный университет,
доцент кафедры математики
УЗБЕКИСТАН, 100174, Бухара, Мухаммад Икбол, 11
E-mail: `ijmo64@mail.ru`

ξ-LIE DERIVATIONS ON ALGEBRAS OF LOCALLY MEASURABLE OPERATORS

Juraev I. M.

We study ξ-Lie derivations on algebras of locally measurable operators $LS(M)$, where M is a von Neumann algebra without central summands of type I_1.

Key words: von Neumann algebra, locally measurable operator, derivation, Lie derivations, ξ-Lie derivations, center valued trace.