Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 11–17

УДК **512.5**

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСВЕКЦИИ В НАДГРУППАХ НЕРАСЩЕПИМОГО МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА[1]

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $GL(n,k)$ богата трансвекциями, если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ на всех позициях (i,j), $i \neq j$. В настоящей работе мы доказываем, что если подгруппа H содержит нерасщепимый максимальный тор и элементарную трансвекцию на некоторой одной позиции, то она богата трансвекциями. Доказано также, что если подгруппа H содержит циклическую матрицу-перестановку порядка n и элементарную трансвекцию позиции (i,j) такой, что НОД $(i-j,n)=1$, то подгруппа H богата трансвекциями.

Ключевые слова: надгруппа, промежуточная подгруппа, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция, элементарная трансвекция.

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $GL(n,k)$ богата трансвекциями [1], если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ на всех позициях (i,j), $i \neq j$ (для некоторых $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$). В настоящей работе мы доказываем, что если подгруппа H содержит нерасщепимый максимальный тор и элементарную трансвекцию на некоторой одной позиции, то она богата трансвекциями. Нам представляется интересным и следующий результат, доказанный в работе: если подгруппа H содержит циклическую матрицу-перестановку порядка n и элементарную трансвекцию позиции (i,j) такой, что НОД $(i-j,n)=1$, то подгруппа H богата трансвекциями.

Отметим, что первый из сформулированных результатов доказан в [2], однако, доказательство, приведенное в [2] достаточно сложное, и сопровождается громоздкими вычислениями.

1. Формулировка результатов и обозначения. Сформулируем основные результаты работы. Для цикла $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n)$ длины n через (π) обозначим матрицу-перестановку порядка n.

Теорема 1. *Пусть подгруппа H, $H \leqslant GL(n,k)$, содержит элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$ (для некоторых $i \neq j$, $\xi \neq 0$) и матрицу-перестановку (π) порядка n. Если НОД $(i-j,n)=1$, то подгруппа H богата трансвекциями.*

Теорема 2. *Пусть H — подгруппа полной линейной группы $GL(n,k)$, содержащая нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, связанный с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k нечетной характеристики (минизотропный тор). Если H содержит элементарную трансвекцию, то подгруппа H богата трансвекциями.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1, если $t_{21}(\xi) \in H$ или $t_{n,1}(\xi) \in H$, $\xi \neq 0$, то подгруппа H богата трансвекциями.*

---

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00469.

Следствие 2. *Пусть $n = p$ — простое натуральное число, подгруппа H содержит элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$, $i \neq j$, $\xi \neq 0$, и циклическую матрицу-перестановку (π) порядка p. Тогда подгруппа H богата трансвекциями.*

В работе приняты следующие стандартные обозначения: $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — отрезок натурального ряда, $n \geqslant 2$; $\epsilon_s = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $1 \leqslant s \leqslant n$, — стандартный базис арифметического n-мерного пространства k^n; e_{ij} — матрица у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; e — единичная матрица порядка n; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция, $\alpha \in k$; k — поле нечетной характеристики.

Пусть $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n)$ — цикл длины n, положим $\sigma = \pi^{k-1} = (1\ 2\ \ldots\ n)^{k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & n-k+2 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & n-1 & n & 1 & \ldots & k-1 \end{pmatrix}.$$

Для произвольной перестановки ω через (ω) обозначается матрица-перестановка, элементы которой определяются формулой: $(\omega)_{ij} = \delta_{i,\omega(j)}$, где δ_{rs} — символ Кронекера. Нетрудно проверяется формула ($a = (a_{ij})$)

$$((\omega)^{-1} a(\omega))_{ij} = a_{\omega(i)\omega(j)}, \tag{1}$$

$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x, y.

Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ рассмотрим матрицу $c(x)$, элементы которой вычисляются по формулам ($d \in k$)

$$(c(x))_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\theta = \sqrt[n]{d}$ образуют стандартный базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени n поля k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении ее в $GL(n, k)$. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{c(x) : x \in k^n \setminus \bar{0}\}.$$

Заметим, что тор $T = T(d)$ содержит циклическую мономиальную матрицу порядка n (по модулю скалярных матриц). А именно, таковой матрицей является $c(0, 1, 0, \ldots, 0)$.

2. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.

Лемма 1. *Пусть $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n)$ — цикл длины n, далее, $\sigma = \pi^{k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда*
1) *порядок $|\sigma|$ элемента σ равен*

$$|\sigma| = \frac{n}{(n, k-1)},$$

где $(n, k-1) =$ НОД$(n, k-1)$, причем этот порядок совпадает с наименьшим m, для которого $\sigma^m(1) = 1 : |\sigma| = \min\{m : \sigma^m(1) = 1\}$;
2) *для любых $i \neq j$ имеем $i - j \equiv (\sigma(i) - \sigma(j)) (\mathrm{mod}\ n)$;*

3) *имеет место формула*

$$\sigma(i) = \pi^{k-1}(i) = \begin{cases} i+k-1, & 1 \leqslant i \leqslant n-k+1; \\ i+k-1-n, & n-k+2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases} \tag{2}$$

$\lhd$ 1) Первая формула справедлива для любого элемента a конечного порядка n. Вторая часть утверждения легко вытекает из того, что

$$\pi^m(1) = 1 \Longleftrightarrow \pi^m = (1).$$

2) Достаточно рассмотреть три случая $1 \leqslant j < i \leqslant n-k+1$, $n-k+2 \leqslant j < i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant n-k+1$, $n-k+2 \leqslant i \leqslant n$. Во всех случаях $i-j \equiv (\sigma(i)-\sigma(j)) (\operatorname{mod} n)$.

3) Формула (2) вытекает из определения перестановки σ. $\rhd$

Замечание 1. В дальнейшем мы предполагаем, что подгруппа H содержит матрицу-перестановку (π).

Предложение 1. *Пусть $j \geqslant 2$, $k = n-j+2$, $\sigma = \pi^{k-1}$. Тогда имеет место формула*

$$(\sigma)^{-1} t_{ij}(\alpha)(\sigma) = t_{\sigma(i)1}(\alpha), \tag{3}$$

где $\sigma(j) = 1$, $i-j \equiv (\sigma(i)-1)(\operatorname{mod} n)$. В частности, если $t_{ij}(\alpha) \in H$ для некоторых $i \neq j$, то $t_{r1}(\alpha) \in H$ для $r = \sigma(i)$. Далее, если $t_{r1}(\alpha) \in H$ для всех $r \geqslant 2$ (и некоторых ненулевых $\alpha \in k$), то подгруппа H богата трансвекциями. Аналогично, если для некоторого r, $1 \leqslant r \leqslant n$, мы имеем $t_{rj}(\alpha) \in H$ для всех $j \neq r$ (и некоторых ненулевых $\alpha \in k$), то подгруппа H богата трансвекциями.

$\lhd$ Достаточно воспользоваться формулами (1) и (2). $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Пусть $t_{ij}(\alpha) \in H$ (для некоторых $i \neq j$, $\alpha \neq 0$) и НОД$(i-j, n) = 1$. Тогда согласно предложению 1 $t_{\sigma(i)1}(\alpha) \in H$, причем $(\sigma(i) - 1) \equiv (i-j)(\operatorname{mod} n)$, а потому НОД$(\sigma(i)-1, n) = 1$ (если $j \geqslant 2$, то берем $\sigma = \pi^{k-1}$ и $k-1 = n-j+1$). Таким образом, можно считать, что $t_{k1}(\alpha) \in H$, НОД$(k-1, n) = 1$ (а потому, согласно лемме 1 порядок перестановки $\sigma = \pi^{k-1}$ равен n). Имеем $\sigma(1) = k$, $\sigma^{-1}(k) = 1$, $t_{\sigma(1),1}(\alpha) \in H$ и согласно формуле (1) $t_{\sigma^{-s}(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha) \in H$, $0 \leqslant s \leqslant n-2$. Используя известную коммутационную формулу

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta), \quad i \neq j, \ i \neq r, \ r \neq j, \tag{4}$$

получаем

$$[[\ldots[[t_{\sigma(1),1}(\alpha), t_{1,\sigma^{-1}(1)}(\alpha)], t_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-2}(1)}(\alpha)], \ldots], t_{\sigma^{-s}(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha)]$$

$$= t_{\sigma(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha^{s+2}), \quad 0 \leqslant s \leqslant n-2.$$

Отметим, что $\sigma^{-s-1}(1) \neq \sigma(1)$ для всех s, $0 \leqslant s \leqslant n-2$. Поэтому ($\sigma(1) = k$) мы имеем $t_{kj}(\xi) \in H$ для всех $j \neq k$ (и для некоторого $\xi \neq 0$). Тогда согласно предложению 1 подгруппа H богата трансвекциями. $\rhd$

3. Доказательство теоремы 2

В силу предложения 1, теоремы 1 и следствия 1 в дальнейшем мы предполагаем, что $t_{k1}(\alpha) \in H$, $3 \leqslant k \leqslant n-1$, $q = k-1$, $2 \leqslant q \leqslant n-2$, НОД$\,(q,n) = b \geqslant 2$, $q = q_1 \cdot b$, $n = n_1 \cdot b$. Далее, $n_1 \geqslant 2$ (иначе $n \leqslant q$), причем $n_1 = 2$ только в одном случае: когда $n = 2b$ — четно и $k = b+1$. В остальных случаях $n_1 \geqslant 3$.

Определим действие группы $\langle \pi \rangle$, на множестве $I_n \times I_n$ всех позиций квадратной матрицы порядка n. А именно, полагаем $\pi \circ (i,j) = (\pi(i), \pi(j))$.

Лемма 2. *Множество $I_n \times I_n$ представляется в виде объединения n орбит, каждая из которых содержит n элементов (пар):*

$$O_0 = \big\{(1,1), \ldots, (n,n)\big\}, \quad O_1 = \big\{(2,1), (3,2), \ldots, (n, n-1), (1,n)\big\},$$

$$O_i = \big\{(i+1,1),\ (i+2,2),\ (i+3,3), \ldots, (n, n-i),\ (1, n-i+1),\ (2, n-i+2), \ldots, (i,n)\big\},$$

где $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Далее, нетрудно видеть, что

$$O_q = \big\{(r,s) \in I_n \times I_n :\ r - s \equiv (q) (\operatorname{mod} n)\big\},\ 0 \leqslant q \leqslant n-1.$$

Непосредственно из формулы (1) и леммы 2 вытекает следующая

Лемма 3. *Пусть $t_{rs}(\beta) \in H$, где $r-s \equiv q(\operatorname{mod} n)$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$ (т. е. $(r,s) \in O_q$). Тогда $t_{ij}(\xi) \in H$ для любой позиции $(i,j) \in O_q$ (при некотором $\xi \neq 0$) такой, что $i-j \equiv q(\operatorname{mod} n)$. В частности, $t_{q+1,1}(\xi) \in H$.*

Из (4) и леммы 3 вытекает следующая

Лемма 4. *Пусть $t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta) \in H$, $i \neq j$. Тогда $t_{kl}(\gamma) \in H$ для любых k, l, $k - l \equiv (i-j)(\operatorname{mod} n)$ (при некотором $\gamma \in k$).*

Замечание 2. В дальнейшем (для удобства вычислений), если один из индексов (i или j) элементарной трансвекции $t_{ij}(*)$ не содержится в I_n, то мы рассматриваем не сами индексы, а их остатки при делении на n. Так, например, запись $t_{2,n+3}(a)$ понимается как $t_{2,3}(a)$.

Лемма 5. *Пусть n произвольно, причем мы дополнительно предполагаем, что, если $n = 2m$, то $k \neq m+1$. Тогда $t_{ql+1,1}(\gamma) \in H$, $1 \leqslant l \leqslant n_1 - 1$.*

$\lhd$ Заметим, что в условиях леммы 5 мы имеем $n_1 \geqslant 3$ и порядок перестановки σ равен n_1. Доказательство леммы проведем аналогично теореме 1. По условию $t_{k1}(\alpha) \in H$. Имеем $\sigma(1) = k$, $\sigma^{-1}(k) = 1$, $t_{\sigma(1),1}(\alpha) \in H$ и согласно формуле (1) $t_{\sigma^{-s}(1), \sigma^{-s-1}(1)}(\alpha) \in H$, $0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2$. Используя формулу (4), получаем

$$[[\ldots[[t_{\sigma(1),1}(\alpha), t_{1,\sigma^{-1}(1)}(\alpha)], t_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-2}(1)}(\alpha)], \ldots], t_{\sigma^{-(s-1)}(1),\sigma^{-s}(1)}(\alpha)]$$

$$= t_{\sigma(1),\sigma^{-s}(1)}(\alpha^{s+2}), \quad 0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2.$$

Отметим, что $\sigma^{-s}(1) \neq \sigma(1)$ для всех s, $0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2$ (так как порядок перестановки σ равен n_1). Согласно лемме 1 (2) имеем $\sigma^{-(r-1)}(1) - \sigma^{-r}(1) \equiv (\sigma^1(1) - \sigma^0(1))(\operatorname{mod} n) \equiv (k-1)(\operatorname{mod} n)$ Осталось заметить, что

$$\sigma(1) - \sigma^{-s}(1) = (\sigma(1) - \sigma^0(1)) + (\sigma^0(1) - \sigma^{-1}(1)) + (\sigma^{-1}(-1) - \sigma^{-2}(1))$$
$$+ \ldots + (\sigma^{-(s-1)}(1) - \sigma^{-s}(1)) \equiv (s+1)(k-1)(\operatorname{mod} n) \equiv (s+1)q(\operatorname{mod} n).$$

Следовательно (так как $t_{\sigma(1),\sigma^{-s}(1)}(\alpha^{s+2}) \in H$), по лемме 3 мы имеем $t_{q(s+1)+1,1}(\gamma) \in H$, $0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2$. Осталось положить $l = s+1$. $\rhd$

Замечание 3. Так как НОД$(q,n) = b \geqslant 2$, то $ql+1$ не делится на b, а потому и на n. Далее, очевидно, что ql не делится на n.

Следствие. *В условиях леммы* 5 *имеем* $t_{-q+1,1}(\gamma), t_{-2q+1,1}(\gamma) \in H$.

$\lhd$ Напомним, что $n_1 \geqslant 3$. Имеем $qn_1 \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$. Отсюда $q(n_1-1) \equiv (-q)(\operatorname{mod} n)$. Но по лемме 5 мы имеем $t_{q(n_1-1)+1,1}(\gamma) \in H$. Тогда по лемме 3 мы имеем $t_{-q+1,1}(\gamma) \in H$. Аналогично $q(n_1-2) \equiv (-2q)(\operatorname{mod} n)$. Но по лемме 5 мы имеем $t_{q(n_1-2)+1,1}(\gamma) \in H$. Снова пользуясь леммой 3, мы получаем $t_{-2q+1,1}(\gamma) \in H$. $\rhd$

Далее, для векторов $\overline{x}, \overline{y} \in k^n$ рассмотрим билинейную форму

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x}) = y_1x_1 + dy_nx_2 + dy_{n-1}x_3 + \ldots + dy_3x_{n-1} + dy_2x_n.$$

С вектором $\overline{\alpha} = (0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ связана матрица — (общая) трансвекция:

$$A = e + \overline{\alpha}^T \cdot \varepsilon_1.$$

Лемма 6 [2, предложение 6]**.** *Пусть* $c^{-1}(\overline{x}) = c(\overline{x}')$. *Положим*

$$S = S(\overline{x}) = (c^{-1}(\overline{x}) - (\overline{x}', \alpha)E)Ac(\overline{x}).$$

Тогда $[S]_{1i} = \delta_{1i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $[S,A] = SAS^{-1}A^{-1} = E + \gamma \cdot \varepsilon_1$, *где* $\overline{\gamma} = (0, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$, $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, *причем* $\gamma = (S-E)\overline{\alpha}^T$. *Далее,*

$$\overline{\gamma} = \big[(\overline{x}, \overline{\alpha})c^{-1}(\overline{x}) - (\overline{x}', \overline{\alpha})c(\overline{x}) - (\overline{x}, \overline{\alpha})(\overline{x}', \overline{\alpha})\big]\overline{\alpha}^T. \tag{5}$$

Лемма 7. *Пусть* $2 \leqslant k \leqslant n-1$ *и* $t_{k1}(\xi) \in H$, $\xi \neq 0$. *Тогда* $t_{k1}(\lambda) \cdot t_{k+1,1}(\lambda) \in H$ *для некоторого* $\lambda \neq 0$.

$\lhd$ В (5) положим

$$\overline{x} = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0), \quad c(\overline{x}) \longleftrightarrow 1 + \theta, \quad \theta^n = d,$$

$$\begin{aligned}(1+\theta)^{-1} &= \frac{1}{1+d(-1)^{n-1}}(1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \ldots + (-1)^{n-1}) \longleftrightarrow x' \\ &= \frac{1}{1+d(-1)^{n-1}}(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}).\end{aligned}$$

Далее, положим $A = t_{k1}(\xi)$, $\overline{\alpha} = \xi \cdot \epsilon_k$. Имеем $(\overline{x}, \overline{\alpha}) = 0$, так как $k \leqslant n-1$

$$(\overline{x}', \overline{\alpha}) = \frac{d\xi(-1)^{n-k+1}}{1+d(-1)^{n-1}}, \quad c(\overline{x})\overline{\alpha}^T = \xi(\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1})^T.$$

Отсюда найдем $\overline{\gamma}$ из (5):

$$\overline{\gamma} = -(\overline{x}', \overline{\alpha})c(\overline{x})\overline{\alpha}^T = \lambda(\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1})^T, \quad \lambda = -\frac{d\xi^2(-1)^{n-k+1}}{1+d(-1)^{n-1}}.$$

Поэтому из леммы 6 следует, что $E + \gamma \cdot \varepsilon_1 = t_{k1}(\lambda) \cdot t_{k+1,1}(\lambda) \in H$. $\rhd$

Предложение 2. $t_{ij}(\lambda) \in H$, $\lambda \neq 0$ *для любых* i, j, $i - j \equiv (2k-1)(\operatorname{mod} n)$.

$\lhd$ Напомним (см. начало параграфа), что мы предполагаем $3 \leqslant k \leqslant n-1$. Положим $r = 2k$, если $2k \leqslant n$. Если же $2k > n$ (при этом ясно, что $2k < 2n$), то полагаем $r = 2k - n$ — остаток при делении $2k$ на n, $1 \leqslant r \leqslant n$. Тогда $r \neq k$, $r \neq k+1$ и $r \neq 1$

(иначе, если $r = 1$, то $2k - n = 1$; тогда $2k - 1 = n$, а потому НОД$\,(k-1, 2k-1) = 1 =$ НОД$\,(k-1, n)$, что противоречит условию). Согласно лемме 3, так как $t_{k1}(\xi) \in H$, то мы имеем $t_{r,k+1}(\gamma) \in H$. Теперь из леммы 7 получаем

$$[t_{r,k+1}(\gamma),\ t_{k1}(\lambda) \cdot t_{k+1,1}(\lambda)] = t_{r1}(\gamma\lambda) \in H,$$

где $r - 1 \equiv (2k-1)(\operatorname{mod} n)$. Осталось воспользоваться леммой 3. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим два возможных случая:

а) $n = 2m$, $k = m+1$, $q = k-1 = m$. Согласно предложению 2 мы имеем $t_{2k,1}(\gamma) \in H$, но $2k - 1 = 2m + 1 \equiv 1(\operatorname{mod} n)$, а потому по лемме 3 $t_{21}(\gamma) \in H$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 подгруппа H богата трансвекциями.

б) Пусть n — произвольно, причем, если $n = 2m$, то $k \neq m+1$. Согласно предложению 2 мы имеем $t_{2k,1}(\gamma) \in H$. Или, $t_{2q+2,1}(\gamma) \in H$. Далее, согласно следствию из леммы 5 мы имеем $t_{-2q+1,1}(*) \in H$. Отсюда согласно лемме 3 мы имеем $t_{1,2q+1}(*) \in H$. Следовательно, согласно лемме 4 мы имеем $t_{z+1,1}(\gamma) \in H$, $\ z = (2q+2) - (2q+1) = 1(\operatorname{mod} n)$. Откуда по лемме 3 мы имеем $t_{21}(\gamma) \in H$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 подгруппа H богата трансвекциями. $\rhd$

Авторы выражают благодарность профессору Я. Н. Нужину за внимание к настоящей работе.

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, k)$, содержащие нерасщепимый тор.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—182 с.—(Итоги науки. ЮФУ. Сер. мат. монография. Вып. 2).

Статья поступила 29 октября 2014 г.

Дряева Роксана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

ELEMENTARY TRANSVECTIONS IN THE OVERGROUPS OF A NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Dryaeva R. Y., Koibaev V. A.

A subgroup H of the general linear group $GL(n,k)$ is rich in transvections if H contains elementary transvections $t_{ij}(\alpha)$ at all positions (i,j), $i \neq j$. In this paper we show that if a subgroup H contains a non-split maximal torus and elementary transvection in one position, than H is rich in transvections. It is also proved that if a subgroup H contains a cyclic permutation of order n and elementary transvection at position (i,j) such that numbers $i-j$ and n are coprime, then H is rich in transvections.

Key words: overgroup, intermediate subgroup, non-split maximal torus, transvection, elementary transvection.