Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 47–55

УДК **512.542**

НЕРАСПОЗНАВАЕМЫЕ ПО СПЕКТРУ КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ИМ ГРУППЫ[1]

В. Д. Мазуров

К 60-летию
Владимира Амурхановича Койбаева

Работа является обзором результатов, касающихся строения групп, изоспектральных нераспознаваемым по спектру конечным простым группам.

Ключевые слова: конечная группа, распознаваемость по спектру, изоспектральные группы, критическая группа.

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*. Поскольку множество $\omega(G)$ замкнуто по отношению делимости, оно однозначно определяется любым своим подмножеством, замыкание которого по делимости совпадает с $\omega(G)$. Обозначим через $\mu(G)$ множество максимальных по делимости элементов спектра G. Более общо, если M — любое конечное непустое множество натуральных чисел, то через $\mu(M)$ будем обозначать множество максимальных по делимости элементов M. Ясно, что $\mu(G) = \mu(\omega(G))$.

Скажем, что G *распознаваема* (более точно, распознаваема по спектру в классе конечных групп), если любая конечная группа, изоспектральная G, изоморфна G. Группа G *нераспознаваема по спектру*, если существует бесконечно много попарно неизоморфных групп, изоспектральных G. *Накрытием* G называется любая группа H, содержащая нормальную подгруппу N (называемую *ядром* накрытия), для которой $H/N \simeq G$. Группа G *распознаваема среди своих накрытий*, если любое ее накрытие, изоспектральное G, изоморфно G.

Работа представляет собой обзор результатов, касающихся строения групп, изоспектральных нераспознаваемым по спектру конечным простым группам. Предполагается, что в будущем ее расширенный вариант станет частью большого обзора, посвященного вопросам распознаваемости конечных групп по спектру.

В. Дж. Ши [1] первым отметил, что группа G, содержащая нетривиальную абелеву нормальную подгруппу V, нераспознаваема. В [2] приведен набросок доказательства того, что это утверждение остается верным, если требование коммутативности V заменить на принадлежность экспоненты V к спектру G. В действительности, такое обобщение не верно: противоречащий пример построен в [3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-90013.

В [4] доказано, что группа нераспознаваема тогда и только тогда, когда она изоспектральна группе, содержащей нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу. В этой же работе сформулировано определение критической группы. Группа G называется *критической* относительно данного конечного множества ω (или ω-критической), если $\omega(G) = \omega$ и спектр любой собственной секции группы G (т. е. фактор группы H/K, где $K \lhd H \leqslant G$ и либо $K \neq 1$, либо $H \neq G$), отличен от ω. Там же доказано, что для любого ω, число ω-критических групп конечно.

Нам потребуется несколько дополнительных понятий. Действие группы A на группе B называется *свободным*, если для $a \in A$, $b \in B$ равенство $b^a = b$ выполняется только в случаях $a = 1$ или $b = 1$. *Группой Фробениуса* называется полупрямое произведение группы B на группу A, в котором действие A на B сопряжениями является свободным. *Удвоенной группой Фробениуса* называется группа G, содержащая нормальную подгруппу Фробениуса H с ядром A такую, что G/A является группой Фробениуса с ядром H/A. Можно показать, что удвоенная группа Фробениуса G представима в виде $G = ABC$, где AB — нормальная в G группа фробениуса с нильпотентным ядром A и циклическим дополнением B, а CB — группа Фробениуса с ядром B и циклическим дополнением C.

Таблица 1

Нераспознаваемые простые группы

	G	Условия на G	$\mu(L)$	H
1	A_6		3,4,5	$2^4 : A_5$
2	A_{10}		8,9,10,12,15,21	$(7^4 \times 3^{12}) : (2.L_2(5).2)$
3	$L_3(3)$		6,8,13	$13^4 : (2.S_4)$
4	$L_4(q)$	$q = 13^{24}$	$13(q-1), q^2-1, 13(q^2-1)/4,$	$13^{2304} : L_4(q)$
			$(q^3-1)/4, (q^3+q^2+q+1)/4$	
5	$U_3(3)$		7,8,12	$2^6 : U_3(3)$
6	$U_3(5)$		6,7,8,10	$2^9 : L_3(4)$
7	$U_3(7)$		43,48,56	$2^{42} : U_3(7)$
8	$U_4(2)$		5,9,12	$3^4 : S_5$
9	$U_5(2)$		8,11,12,15,18	$3^5 : M_{11}$
10	$S_4(q)$	$q = 3$	5,9,12	$3^4 : S_5$
		$q = 2^m$, $m > 1$	$4, 2(q \pm 1), q^2 \pm 1$	$2^{8m} : L_2(q^2)$
		$q = 3^{2m}$	$9, 3(q \pm 1), (q^2 \pm 1)/2$	$3^{28m} : L_2(q^2)$
		$q = p^m$, $p > 3$ простое	$p(q \pm 1), (q^2 \pm 1)/2$	$p^{8m} : (L_2(q^2).2)$
11	$O_9(q)$	$q = p^m, p$ простое	$\mu(M)$ где M состоит из	$p^{8m} : O_8^-(q)$
			$(q^4 \pm 1)/(2, q-1),$	
			$p(q^3 \pm 1)/(2, q-1),$	
			$(q^2 \pm q + 1)(q^2-1)/(2, q-1),$	
			$p(q^2+1)(q \pm 1)/(2, q-1),$	
			$p(q^2-1);$	
			$4(q^2 \pm 1, 8(q \pm 1)$, если $p = 2$;	
			$9(q^2 \pm 1)/2$, если $p = 3$;	
			$25(q \pm 1)/2$, если $p = 5$;	
			49, если $p = 7$.	
12	${}^3D_4(2)$		8,12,13,18,21,28	2^{24}: ${}^3D_4(2)$
13	J_2		7,8,10,12,15	$2^6 : A_8$

На протяжении всей работы используются обозначения из [5].

Все известные к настоящему времени нераспознаваемые по спектру конечные простые группы перечислены в таблице 1.

В столбце H таблицы указано композиционное строение одной из групп, изоспектральных группе G и содержащих нетривиальную абелеву нормальную подгруппу. Как уже отмечалось, из существования одной такой группы вытекает нераспознаваемость группы G.

Ниже приведена известная к настоящему времени информация о строении групп, изоспектральных перечисленным в таблице группам.

1. A_6. Пусть V — естественный двумерный модуль для $SL_2(4) \simeq A_5$ над полем порядка 4 и H — полупрямое произведение V на $SL_2(4)$. Тогда $\omega(H) = \omega(A_6)$. Любая группа, изоспектральная A_6 и отличная от A_6, является расширением элементарной абелевой 2-группы посредством A_5 [6]. Список $\omega(A_6)$-критических групп с точностью до изоморфизма исчерпывается двумя группами: A_6 и H [7].

2. A_{10}. Пусть $\overline{S}$ — подгруппа $L_2(5^2)$, изоморфная S_5, и S — ее прообраз в $SL_2(5^2)$. Он является расширением группы порядка 2 посредством S_5, обладающим единственной инволюцией. Кроме того, S содержит подгруппу S_0 индекса 2, изоморфную $SL_2(5)$. Группа S_0 изоморфна подгруппе группы $SL_2(7^2)$, поэтому естественный $SL_2(7^2)$-модуль V размерности 2 над полем порядка 7^2 можно рассматривать как точный S_0-модуль. Пусть $W = V^S$ — S-модуль, индуцированный модулем V, R — нормализатор в S подгруппы X порядка 5. Тогда R — полупрямое произведение группы X на циклическую подгруппу, порожденную элементом y порядка 8, индуцирующим в X автоморфизм порядка 4. Пусть A — одномерный R-модуль над конечным полем порядка 9, точный на $\langle y \rangle$, и $B = A^S$ — соответствующий индуцированный S-модуль. Для естественного полупрямого произведения $H = (W \times B) : S$ справедливо равенство $\omega(A_{10}) = \omega(H)$ [8].

Любая группа, изоспектральная A_{10} и отличная от A_{10}, является полупрямым произведением абелевой $\{3, 7\}$-группы на S [9]. Любая $\omega(A_{10})$-критическая группа изоморфна A_{10} или определенной выше в этом пункте группе H [10].

3. $L_3(3)$. Группа $SL_2(13)$ содержит подгруппу $U \simeq SL_2(3)$, которая действует свободно на естественном двумерном $SL_2(13)$-модуле W над полем порядка 13. Пусть K — расширение U посредством группы порядка 2, обладающее единственной инволюцией (такое расширение существует: см. выше пункт 2, посвященный нераспознаваемости A_{10}) и V — модуль для K, полученный индуцированием с модуля W, рассматриваемого как U-модуль. Для естественного полупрямого произведения $H = V : K$ справедливо равенство $\omega(L_3(3)) = \omega(H)$ [8]. Группу H можно следующим образом задать с помощью образующих и определяющих соотношений. Подгруппа K изоморфна $\langle x, y | x^4 = y^3 = (xy)^8 = x^2(xy)^4 = 1 \rangle$ и отображение

$$x \to \begin{bmatrix} \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad y \to \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & 5 \\ \dots & \dots & 5 & \dots \end{bmatrix}$$

после выбора базиса v_1, v_2, v_3, v_4 в V продолжается до вложения K в $GL(V)$. Отсюда непосредственно могут быть получены определяющие соотношения для H в образующих x, y, v_1, v_2, v_3, v_4. Список $\omega(L_3(3))$-критических подгрупп исчерпывается группой H и самой группой $L_3(3)$ [7].

4. $L_4(q)$. Пусть p — простое число, F — поле порядка $q = p^n$ и $G = SL_4(q)$. Для FG-модуля U обозначим через U^{ρ^i}, $i = 0, 1, \dots$, скручивание U с помощью i-ой степени автоморфизма Фробениуса ρ поля F, посылающего каждый элемент $x \in F$ в x^p. Обозначим через $\Lambda^2 U$ внешний квадрат модуля U.

Если $q = 13^{24}$, V — естественный 4-мерный модуль для G над F и

$$W = V^{\rho^5} \otimes V^{\rho^{11}} \otimes \Lambda^2 V,$$

то W является $L_4(q)$-модулем и полупрямое произведение $W : L_4(q)$ изоспектрально $L_4(q)$. В частности, $L_4(13^{24})$ нераспознаваема среди своих накрытий [11]. Видимо, подобные примеры существуют и для некоторых других q.

5. $U_3(3)$. Группа $U_3(3)$ обладает абсолютно неприводимым 6-мерным обыкновенным представлением (см. [5]). Его редукция по модулю 2 реализуется над полем порядка 2. Пусть H — расщепляемое расширение соответствующего 6-мерного пространства V над полем порядка 2 посредством $U_3(3)$. Тогда $\omega(U_3(3)) = \omega(H)$ [8]. В частности, $U_3(3)$ не распознаваема среди накрытий.

Линейные преобразования векторного пространства V, представленные в некотором базисе матрицами

$$a = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

над полем порядка 2 порождают подгруппу U изоморфную $U_3(3)$. Соответствующее расщепляемое расширение V посредством U изоморфно H [13].

Если A — группа, порожденная следующими матрицами над полем порядка 7:

$$a = \begin{bmatrix} 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & -1 & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

то A изоморфна некоммутативному полупрямому произведению группы порядка 3 на циклическую группу порядка 8 и полупрямое произведение соответствующей элементарной абелевой группы порядка 7^4 на A является группой Фробениуса, изоспектральной $U_3(3)$ [14].

6. $U_3(5)$. Пусть $L = L_3(4)$, V — абсолютно неприводимый 9-мерный L-модуль над полем порядка 2 и H — расщепляемое расширение V посредством L. Тогда $\omega(U_3(5)) = \omega(H)$ [12].

Группа L изоморфна $\langle a, b : \ a^2 = b^4 = (ab)^7 = (ab^2)^5 = (abab^2)^7 = (ababab^2ab^{-1})^5 = 1 \rangle$. Линейные преобразования векторного пространства V, представленные в его некотором базисе матрицами

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$[b] = \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

задают соответствующее действие L на V [13].

7. $U_3(7)$. Группа $L = U_3(7)$ обладает абсолютно неприводимым обыкновенным представлением размерности 42 с характером $\chi = \chi_2$ в обозначениях [5]. Его 2-редукция Φ реализуется над полем порядка 2. Если V — соответствующий L-модуль и H — естественное полупрямое произведение группы V на L, то $\omega(L) = \omega(H)$ [12].

Две матрицы размерности 42 над полем порядка 2, порождающие подгруппу $GL(42, 2)$, которая реализует Φ, приведены в [13].

8. $U_4(2) \simeq S_4(3)$. Пусть W — подстановочный модуль над полем порядка 3 для группы $S = S_5$, т. е. модуль с базой $w_1, \dots, w_5$, на которой любая подстановка $\pi \in S$ действует по правилу: $w_i\pi = w_{i\pi}$, $i = 1, \dots, 5$. Пусть V — тензорное произведение модуля $W/\langle w_1 + \dots + w_5\rangle$ на нетривиальный одномерный S-модуль. Группа S_5 порождается подстановками $a = (1, 2, 3, 4, 5)$ и $(1, 2)$. Базис V можно выбрать так, чтобы элементы a и b представлялись в нем матрицами

$$\begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dots & 2 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

соответственно. Пусть H — естественное полупрямое произведение модуля V на S. Тогда $\omega(U_4(2)) = \omega(H)$ [12].

Определим следующие (4×4)-матрицы над полем F порядка 3:

$$a = \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \dots & 1 & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Они порождают в $GL(4,3)$ группу Фробениуса K порядка 20. Обозначим через V соответствующий четырехмерный KF-модуль.

Введем четыре матрицы 17×17, записанные в блочном виде следующим образом:

$$A = \mathrm{diag}(1, a, a, a, a), \quad B = \mathrm{diag}(1, b, b, b, b),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & b & b^2 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & -b^2 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & b^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & d & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где $d = (1, 0, 0, 0) \in F^4$.

Группа $H = \langle A, B, C, D \rangle = (V \oplus V \oplus V \oplus V) : (V.V) : K$ является удвоенной группой Фробениуса порядка $5648590729620 = 2^2 \cdot 3^{24} \cdot 5$, изоспектральной $U_4(2)$ [15].

9. $U_5(2)$. Пусть $M = M_{11}$ и V — абсолютно неприводимый 5-мерный M-модуль над полем порядка 3 с характером Брауэра, значения которого представлены в таблице 2 (см. [16]):

Таблица 2

g^M	1A	2A	4A	5A	8A	8B	11A	11B
$\chi(g)$	5	1	-1	0	$-1+\sqrt{-2}$	$-1-\sqrt{-2}$	$-1+\sqrt{-11}$	$-1-\sqrt{-11}$

Если H — расщепляемое расширение V посредством M, то $\omega(U_5(2)) = \omega(H)$ [12].

Группа M порождается подстановками

$$a = (2,6)(4,9)(5,11)(8,10), \quad b = (1,4,3,10)(6,7,9,11).$$

В подходящем базисе V действие M на V определяется матрицами

$$[a] = \begin{bmatrix} \dots & 1 & 2 & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \dots & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{bmatrix}, \quad [b] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Если V — 5-мерный $U_5(2)$-модуль над полем порядка 9, то полупрямое произведение V на $U_5(2)$ изоспектрально $U_5(2)$. В частности, $U_5(2)$ нераспознаваема среди накрытий [17].

Группа $U = U_5(2)$ изоморфна $\simeq \langle a, b \mid a^2 = b^5 = (ab)^{11} = [a,b]^3 = [a,b^2]^3 = [a,bab]^3 = [a,bab^2]^3 = 1 \rangle$. Действие U на модуле V, рассматриваемом как 10-мерное векторное пространство над полем порядка 3 задается в подходящем базисе V матрицами (см. [13])

$$[a] = \begin{bmatrix} \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 & \dots & 2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 2 & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$[b] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

10. $S_4(q)$. Группа $S_4(3)$ изоморфна $U_4(2)$ (см. п. 8 выше).

Пусть F — конечное поле порядка $q = p^n > 3$, где p — простое число, и $W_i = W_i(q)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, — пространство однородных полиномов степени i от переменных x_1, x_2 над F. Пусть α — автоморфизм F, отображающий каждый элемент из F в его p-ю степень. Для $j = 0, \dots, n-1$ превратим W_i в $SL_2(q)$-модуль $W_i^j = W_i^j(q)$, полагая для $f(x_1, x_2) \in W_i$ и $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(q)$

$$f(x_1, x_2)a = f(a_{11}^{\alpha^j} x_1 + a_{12}^{\alpha^j} x_2, a_{21}^{\alpha^j} x_1 + a_{22}^{\alpha^j} x_2).$$

В частности, W_0^j — тривиальный одномерный $SL_2(q)$-модуль. Модули $W(i_0, \dots, i_{n-1}) = \bigotimes_{j=0}^{n-1} W_{i_j}^j$ составляют полное множество попарно неэквивалентных абсолютно неприводимых $SL_2(q)$-модулей над полем характеристики p. Если q нечетно, то центр группы $SL_2(q)$ действует тривиально на $W(i_0, \dots, i_{n-1})$ (и поэтому $W(i_0, \dots, i_{n-1})$ является $L_2(q)$-модулем) в точности тогда, когда $i_0 + \dots + i_{n-1}$ — четное число. Пусть $L = L_2(q^2)$.

Если $q = p^n$, где $p > 3$ — простое число, то положим $V = W_1^0 \otimes W_1^n$. Пусть σ — полевой автоморфизм порядка 2 группы L. Определим действие σ на $W_1^0 \otimes W_1^n$ правилом

$$\Bigl(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_i \otimes x_j)\Bigr)\sigma = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_j \otimes x_i).$$

Тем самым V превращается в $\overline{L}$-модуль, где $\overline{L} = L\langle\sigma\rangle$. Для естественного полупрямого произведения $H = V\overline{L}$ имеет место равенство $\omega(H) = \omega(S_4(q))$ [12].

Если $q = 3^{2m}$, то положим $V = W_1^{2m} \otimes W_1^{2m+1} \otimes W_2^0$. Пусть $H = VL$ — естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_4(q))$ [12].

Если $q = 2^n$, где $n > 1$, то положим $V = W_1^0 \otimes W_1^n$. Пусть $H = VL$ — естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_4(q))$ [18].

11. $O_9(q)$. Пусть V — естественный 8-мерный модуль для $L = O_8^-(q)$ над полем порядка q и $H = VL$ — естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(O_9(q))$ [19].

Если $q = 2$, I — группа, изоспектральная $O_9(2)$, и $L = O_8^-(2)$, то I изоморфна $O_9(q)$ или $O_8^-(2).2$, или же $I/N \simeq O_8^-(2)$, где N — нетривиальная 2-группа и существует I-главный фактор N, изоморфный V. Любой I-главный фактор N изоморфен либо V, либо одному из алгебраически сопряженных 8-мерных I-модулей над полем порядка 4 [20].

12. ${}^3D_4(2)$. Пусть $G = {}^3D_4(2)$, V — 24-мерный G-модуль над полем порядка 2, эквивалентный модулю, возникающему при действии G на аддитивной группе 8-мерного

G-модуля над полем порядка 8. Тогда полупрямое произведение H модуля V на G изоспектрально G. В частности, G нераспознаваема по спектру среди своих накрытий.

G обладает единственным с точностью до алгебраической сопряженности 8-мерным модулем V над полем F порядка 8. В подходящем базисе V

$$a = \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^6 & z^6 & \dots & z^6 & z^6 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ z^4 & z^4 & \dots & z^3 & z^3 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} z & z & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & z & \dots \\ z & z^5 & \dots & z & \dots & z^6 & \dots & z^6 \end{bmatrix},$$

где z — порождающий элемент мультипликативной группы F.

Если H изоспектральна G, то H — накрытие G, ядро которого — 2-группа N, и каждый G-главный фактор N как G-модуль подобен V [21].

13. J_2. Пусть W — 8-мерный подстановочный модуль для $A = A_8$ над полем порядка 2, V — 6-мерный композиционный фактор W и H — расщепляемое полупрямое произведение V на A. Тогда $\omega(H) = \omega(J_2)$ [22]. Если I — группа, изоспектральная J_2, то I изоморфна или J_2, или S_8, или расширению такой нетривиальной 2-группы U посредством A_8, что любой I-главный фактор U изоморфен V [23]. Любая критическая относительно $\omega(J_2)$ группа изоморфна J_2, S_8 или H [10].

Литература

1. *Shi W. J.* A characteristic property of the Mathieu groups // Chinese Ann. Math. Ser. A.—1988.—Vol. 9, № 5.—P. 575–580.—(in Chinese).
2. *Chigira N. and Shi W. J.* More on the set of element orders in finite groups // Northeast. Math. J.—1996.—Vol. 12, № 3.—P. 257–260.
3. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных непростых групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика.—1997.—Т. 36, № 3.—С. 304–322.
4. *Мазуров В. Д., Ши В. Дж.* Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика.—2012.—Т. 51, № 2.—С. 239–243.
5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of Finite Groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.
6. *Brandl R., Shi W. J.* Finite groups whose element orders are cosecutive integers // J. Algebra.—1991.—Vol. 143, № 2.—P. 388–400.
7. *Lytkin Yu. V.* On groups critical with respect to a set of natural numbers // Sib. Èlektron. Mat. Izv.—2013.—Vol. 10.—P. 666–675.
8. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика.—1998.—Т. 37, № 6.—С. 651–666.
9. *Старолетов А. М.* Группы, изоспектральные знакопеременной группе степени 10 // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 3.—С. 638–648.

10. Лыткин Ю. В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сиб. мат. журн.—2015.—Т. 56, № 1.—С. 122–128.
11. *Zavarnitsine A. V.* Exceptional action of the simple groups $L_4(q)$ in the defining characteristic // Sib. Èlektron. Mat. Izv.—2008.—Vol. 5.—P. 68–74.
12. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика.—2002.—Т. 41, № 2.—С. 166–198.
13. *Wilson R. et. al.* Atlas of finite group representations.—[URL: http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/].
14. *Алеева М. Р.* О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, № 3.—С. 323–339.
15. *Заварницин А. В.* Разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$ // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 1.—С. 26–31.
16. *Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R.* An Atlas of Brauer Characters.—Oxford: Clarendon Press, 1995.
17. *Grechkoseeva M. A.* On element orders in covers of finite simple classical groups // J. Algebra.—2011.—Vol. 339.—P. 304–319.
18. *Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Ч. П.* Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика.—2000.—Т. 39, № 5.—С. 567–585.
19. *Grechkoseeva M. A., Staroletov A. M.* Unrecognizability by spectrum of finite simple orthogonal groups of dimension nine // Sib. Èlektron. Mat. Izv.—2014.—Vol. 11.—P. 921–928.
20. *Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R.* The recognition of the simple group $S_8(2)$ by its spectrum // Algebra Colloquium.—2006.—Vol. 3, № 4.—P. 643–646.
21. *Мазуров В. Д.* Нераспознаваемость конечной простой группы ${}^3D_4(2)$ по спектру // Алгебра и логика.—2013.—Т. 52, № 5.—С. 601–605.
22. *Praeger C. E., Shi W. J.* A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra.—1994.—Vol. 22, № 5.—P. 1507–1530.
23. *Mazurov V. D., Shi W. J.* A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloquium.—1998.—Vol. 5, № 3.—P. 285–288.

Статья поступила 29 апреля 2015 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр-т Академика Коптюга, 4
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

UNRECOGNIZABLE BY SPECTRUM FINITE SIMPLE GROUPS AND THEIR ISOSPECTRAL GROUPS

Mazurov V. D.

This is a survey of results concerning the structure of groups isospectral with finite simple groups which are unrecognizable by spectrum.

Key words: finite group, recognizability by spectrum, isospectral groups, critical group.