Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 22–31

УДК **519.542**

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМ ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ, II[1]

А. С. Кондратьев

К 60-летию
Владимира Амурхановича Койбаева

Обзор недавно полученных автором совместно со своими учениками результатов относительно конечных групп, граф простых чисел которых имеет небольшое число вершин. Уточнено описание главных факторов 4-примарных конечных групп с несвязным графом простых чисел. Описаны конечные почти простые 5-примарные и 6-примарные группы и их графы простых чисел. Описаны главные факторы конечных неразрешимых 5-примарных группах G с несвязным графом Грюнберга — Кегеля таких, что $|\pi(G/F(G))| \leqslant 4$. Решена задача реализации абстрактных графов с числом вершин, не превосходящим пяти, как графов простых чисел конечных групп. Описаны конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами. Описаны конечные почти простые группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. Доказана распознаваемость групп $E_7(2)$, $E_7(3)$ и ${}^2E_6(2)$ по графу простых чисел. Классифицированы абсолютно неприводимые $SL_n(p^f)$-модули над полем простой характеристики p, на которые элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы $SL_n(p^f)$ действует свободно, в следующих трех случаях: а) вычет числа p^f по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, главный фактор, простой спектр, граф простых чисел, распознаваемость, модулярное представление.

Введение

Изучение конечных групп в зависимости от их арифметических свойств (порядков элементов и подгрупп, мощностей классов сопряженных элементов, различных π-свойств, степеней неприводимых характеров и т. д.) является важным направлением в теории конечных групп, имеющим богатую историю. Классификация конечных простых групп во многом сводит это изучение к случаю *почти простых* групп, т. е. групп A со свойством $\mathrm{Inn}(P) \leqslant A \leqslant \mathrm{Aut}(P)$, где P — некоторая конечная неабелева простая группа.

Пусть G — конечная группа. Множество простых делителей числа $|G|$ будем называть *простым спектром* группы G и обозначать через $\pi(G)$. *Спектром* же группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Граф

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности, соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

$\Gamma(G)$ можно рассматривать как подмножество спектра $\omega(G)$, состоящее из произведений двух различных простых чисел, входящих в $\omega(G)$.

Понятие графа простых чисел возникло при исследовании некоторых когомологических вопросов, связанных с целочисленными представлениями конечных групп, и оказалось весьма плодотворным.

Малоизвестен факт, что граф $\Gamma(G)$, в отличие от спектра $\omega(G)$, может быть однозначно определен по таблице характеров группы G.

Граф коммутативности $\Delta(G)$ группы G есть граф с множеством вершин $G \setminus Z(G)$, две вершины x, y которого смежны тогда и только тогда, когда $xy = yx$. Графы коммутативности впервые были исследованы Брауэром и Фаулером в 1955 г. для того, чтобы доказать фундаментальный результат для классификации конечных простых групп о конечности множества изоморфных типов конечных простых групп с заданным централизатором инволюции. С тех пор эти графы являются популярным предметом изучения в теории групп. Несложно доказать, что если конечные неабелевы группы G и H, порядки центров которых совпадают, имеют изоморфные графы коммутативности, то $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Приведенные факты показывают, что граф $\Gamma(G)$, наряду со спектром $\omega(G)$, является фундаментальным арифметическим инвариантом группы G.

Интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости — характеризации группы по некоторому набору ее параметров с точностью до изоморфизма. Примерами таких проблем являются проблемы распознаваемости конечных групп по спектру или по графу простых чисел. Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* (соответственно *по графу простых чисел*), если для любой конечной группы H равенство $\omega(H) = \omega(G)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(H)$) влечет изоморфизм $H \cong G$.

К настоящему времени по проблеме распознаваемости по спектру конечных простых групп достигнут впечатляющий прогресс. Так, она практически сведена к случаю почти простых групп.

Задача распознаваемости конечных групп по графу простых чисел является частным случаем общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел. В рамках этой общей задачи прежде всего наше внимание привлекает более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Конечные почти простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [1], автора [2], Иийёри и Ямаки [3] и Лучидо [4]. Весьма полезный критерий смежности вершин в графах простых чисел конечных простых групп найден в работах А. В. Васильева и Е. П. Вдовина [5, 6].

В данной работе дан обзор недавно полученных автором совместно со своими учениками результатов относительно конечных групп, граф простых чисел которых имеет небольшое число вершин. Он продолжает обзор автора [7] на ту же тему.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [8–10]. Конечная группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$.

1. Конечные n-примарные группы для $n \leqslant 6$

В рамках задачи подробного изучения класса конечных групп с несвязным графом простых чисел в работах автора и И. В. Храмцова (см. [11–14]) были проведены исследования конечных групп, граф простых чисел которых несвязен и имеет 3 или 4 вершины. В недавних работах [15–18] нами было уточнено описание главных факторов 4-примарных конечных групп с несвязным графом простых чисел.

В дальнейшем исследование конечных n-примарных групп для небольших n было продолжено. Главной целью здесь является описание главных факторов конечных неразрешимых не почти простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

В работах [19, 20] автором были определены конечные почти простые 5-примарные группы и их графы простых чисел. В частности, доказана следующая теорема, которую мы приводим в исправленном и уточненном виде.

Теорема 1. *Конечная почти простая группа G с цоколем P является 5-примарной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа P изоморфна одной из групп A_{11}, A_{12}, $L_2(q)$ для $q \in \{2^6, 2^8, 2^9, 5^3, 5^4, 7^3, 7^4, 11^2, 17^2, 19^2\}$, $L_3(9)$, $L_3(27)$, $L_4(q)$ для $q \in \{4, 5, 7\}$, $L_5(2)$, $L_5(3)$, $L_6(2)$, $U_3(q)$ для $q \in \{16, 17, 25, 81\}$, $U_4(q)$ для $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, $U_5(3)$, $U_6(2)$, $S_4(q)$ для $q \in \{8, 16, 17, 25, 49\}$, $S_6(3)$, $S_8(2)$, $O_7(3)$, $O_8^+(3)$, $O_8^-(2)$, $G_2(q)$ для $q \in \{4, 5, 7, 8\}$, M_{22}, J_3, HS, He или M^cL;*

(2) *$G \cong L_2(2^p)$, где $p \geqslant 11$ — простое число и $|\pi(2^{2p} - 1)| = 4$;*

(3) *$G \cong \mathrm{Aut}(L_2(2^p))$, где $p \geqslant 7$, $2^p - 1$ и $(2^p + 1)/3$ — различные простые числа;*

(4) *$G \cong \mathrm{Aut}(L_2(3^p))$ или $O^2(\mathrm{Aut}(L_2(3^p)))$, где $p \geqslant 5$ — простое число и $|\pi((3^p - 1)/2)| = |\pi((3^p + 1)/4)| = 1$;*

(5) *$G \cong L_2(p)$ или $PGL_2(p)$, где $p \geqslant 29$ — простое число и $|\pi(p^2 - 1)| = 4$;*

(6) *$G \cong L_2(p^r)$ или $PGL_2(p^r)$, где $p \in \{3, 5, 7, 17\}$, r — простое число, $3 < r \neq p$ и $|\pi(p^{2r} - 1)| = 4$;*

(7) *$U_3(2^p) \leqslant G \leqslant PGU_3(2^p) : 2$, где $p \geqslant 5$ и $2^p - 1$ — простые числа и $|\pi((2^p + 1)/3)| = |\pi((2^{2p} - 2^p + 1)/3)| = 1$;*

(8) *группа P изоморфна $L_3^\epsilon(p)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$, p — простое число, $17 \neq p \geqslant 11$, $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ и $\left|\pi(\frac{p^2+\epsilon p+1}{(3,p-\epsilon 1)})\right| = 1$;*

(9) *$G \cong S_4(p)$ или $PGSp_4(p)$, где $p \geqslant 11$ — простое число, $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ и $p^2 + 1 = 2r$ или $2r^2$ для некоторого нечетного простого числа r;*

(10) *$G \cong Sz(2^p)$, где $p \geqslant 7$ и $2^p - 1$ — простые числа и $|\pi(2^{2p} + 1)| = 3$;*

(11) *$G \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$.*

В качестве следствия теоремы 1 существенно уточнен список конечных простых 5-примарных групп, полученный в [21, 22]. Результаты статьи [20] показывают также, что конечные простые 5-примарные группы, кроме групп $L_4(q)$ для $q \in \{4, 7\}$ и $U_4(q)$ для $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, имеют несвязный граф простых чисел.

Используя результаты работ [11] и [12] и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP [23], В. А. Колпакова и автор в [24] получили описание главных факторов коммутантов конечных неразрешимых 5-примарных групп G с несвязным графом $\Gamma(G)$ в случае, когда $G/F(G)$ — почти простая n-примарная группа для $n \leqslant 4$.

Недавно В. А. Колпакова и автор в [25] определили конечные почти простые 6-примарные группы и их графы простых чисел. В частности, доказана следующая теорема, которую мы приводим в исправленном и уточненном виде.

Теорема 2. *Если конечная почти простая группа G с цоколем P является 6-примарной, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа P изоморфна одной из групп A_n для $n \in \{13, 14, 15, 16\}$, $L_2(q)$ для $q \in \{2^{10}, 2^{16}, 3^6, 3^8, 3^{10}, 5^5, 11^4, 17^3, 17^4\}$, $L_3(q)$ для $q \in \{2^4, 2^7, 2^9, 5^2, 7^2\}$, $L_4(q)$ для $q \in \{2^3, 3^2, 17\}$, $L_5(7)$, $L_6(3)$, $L_7(2)$, $U_3(q)$ для $q \in \{2^9, 3^3, 5^3, 5^4, 7^2, 7^3, 17^2\}$, $U_4(q)$ для $q \in \{2^3, 2^4, 5^2\}$, $U_5(q)$ для $q \in \{4, 5, 9\}$, $U_6(3)$, $U_7(2)$, $O_7(q)$ для $q \in \{5, 7\}$, $O_9(3)$, $PSp_4(q)$ для $q \in \{2^5, 3^3, 3^4, 3^5, 11^2, 17^2\}$, $PSp_6(q)$ для $q \in \{4, 5, 7\}$, $PSp_8(3)$, $O_8^+(q)$ для $q \in \{4, 5, 7\}$,*

$O_8^-(3)$, $O_{10}^+(2)$, $O_{10}^-(2)$, ${}^3D_4(q)$ *для* $q \in \{4,5\}$, $G_2(q)$ *для* $q \in \{3^2, 17\}$, ${}^2G_2(3^3)$, $F_4(2)$, Suz, Ru, Co_2, Co_3, M_{23}, M_{24}, J_1, Fi_{22}, HN;

(2) $G \cong \mathrm{Aut}(L_2(2^r))$, *где* $r \geqslant 11$ — *простое число,* $r \notin \pi(P)$ *и* $|\pi(2^{2r}-1)| = 4$;

(3) $G \cong L_2(2^r)$, *где* $r \geqslant 37$ — *простое число,* $r \notin \pi(P)$ *и* $|\pi(2^{2r}-1)| = 5$;

(4) $G \cong L_2(2^{2r})$ *или* $O^r(\mathrm{Aut}(L_2(2^{2r})))$, *где* $r \geqslant 7$ *и* $2^r - 1$ — *простые нечетные числа,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = 1$ *и* $|\pi(2^{2r}+1)| = 2$;

(5) $G \cong L_2(2^{r^2})$, *где* $r \geqslant 7$ — *простое число,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(2^{r^2}-1)| = 2$ *и* $|\pi(2^{r^2}+1)| = |\pi(2^{2r}-1)| = 3$;

(6) $P \cong L_2(3^{2r})$ *и* $G \leqslant O^r(\mathrm{Aut}(P))$, *где* $r > 13$ — *простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{3^r-1}{2})| = |\pi(\frac{3^r+1}{4})| = 1$ *и* $|\pi(\frac{3^{2r}+1}{2})| = 2$;

(7) $P \cong L_2(3^{r^2})$ *или* $O^r(\mathrm{Aut}(P))$, *где* r — *простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{3^r+1}{4})| = |\pi(\frac{3^r-1}{2})| = 1$ *и* $|\pi(3^{2r^2}-1)| = 5$;

(8) $P \cong L_2(p)$, *где* $p \geqslant 131$ — *простое число и* $|\pi(p^2-1)| = 5$;

(9) $P \cong L_2(p^2)$, *где* $p \geqslant 29$ — *простое число,* $|\pi(p^2-1)| = 4$ *и* $|\pi(p^2+1)| = 2$;

(10) $P \cong L_2(p^2)$, *где* $p \geqslant 13$ — *простое число и* $|\pi(p^2-1)| = |\pi(p^2+1)| = 3$;

(11) $G \cong L_2(p^r) : r$ *или* $\mathrm{Aut}(L_2(p^r))$, *где* $p \in \{3, 5, 7, 17\}$ *и* r — *простые числа,* $r \notin \pi(P)$, $p^r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ *для* $\varepsilon \in \{+,-\}$, *и* $|\pi(p^r - \varepsilon 1)| = |\pi(\frac{p^r+\varepsilon 1}{2})| = 2$;

(12) $G \cong L_2(p^r)$ *или* $PGL_2(p^r)))$, *где* p *и* r — *нечетные простые числа,* $r \notin \pi(P)$ *и* $|\pi(p^{2r}-1)| = 5$;

(13) $P \cong L_3^{\varepsilon}(2^r)$ *и* $G \leqslant O^r(\mathrm{Aut}(P))$, *где* $\varepsilon \in \{+,-\}$, r *и* 2^r-1 — *простые числа,* $r \geqslant 5$ *при* $\varepsilon = +$ *и* $r \geqslant 19$ *при* $\varepsilon = -$, $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = 1$ *и* $|\pi(\frac{2^{2r}+\varepsilon 2^r+1}{(3,\, 2^r-\varepsilon 1)})| = 2$;

(14) $G \cong L_3^{\varepsilon}(3^r)$ *или* $L_3^{\varepsilon}(3^r) : 2$, *где* $\varepsilon \in \{+,-\}$, r — *простое число,* $r \geqslant 7$ *при* $\varepsilon = +$ *и* $r \geqslant 5$ *при* $\varepsilon = -$, $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{3^r-1}{2})| = |\pi(\frac{3^r+1}{4})| = 1$ *и* $|\pi(3^{2r}+\varepsilon 3^r+1)| = 2$;

(15) $P \cong L_3^{\varepsilon}(p)$, *где* $p \geqslant 41$ — *простое число,* $\varepsilon \in \{+,-\}$, $|\pi(p^2-1)| = 4$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\varepsilon p+1}{(3,\, p-\varepsilon 1)})| = 1$;

(16) $P \cong L_3^{\varepsilon}(p)$, *где* p — *простое число,* $\varepsilon \in \{+,-\}$, $p \geqslant 11$ *при* $\varepsilon = +$ *и* $p \geqslant 31$ *при* $\varepsilon = -$, $|\pi(p^2-1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\varepsilon p+1}{(3,\, p-\varepsilon 1)})| = 2$;

(17) $P \cong U_3(2^r)$ *и* $P : r \leqslant G$, *где* $r \geqslant 5$ *и* 2^r-1 — *простые числа,* $r \notin \pi(G)$ *и* $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = |\pi(\frac{2^{2r}-2^r+1}{3})| = 1$;

(18) $P \cong L_4^{\varepsilon}(p)$, *где* $\varepsilon \in \{+,-\}$, p — *простое число,* $p \geqslant 19$ *для* $\varepsilon = +$ *и* $p \geqslant 11$ *для* $\varepsilon = -$, $|\pi(p^2-1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\varepsilon p+1}{(3,\, p-\varepsilon 1)})| = |\pi(\frac{p^2+1}{2})| = 1$;

(19) $G \cong PSp_4(2^r)$, *где* $r > 5$ *и* 2^r-1 — *простые числа,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = 1$ *и* $|\pi(2^{2r}+1)| = 2$;

(20) $G \cong PSp_4(3^r)$ *или* $PGp_4(3^r)$, *где* $r > 5$ — *простое число,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(\frac{3^r-1}{2})| = |\pi(\frac{3^r+1}{4})| = 1$ *и* $|\pi(3^{2r}+1)| = 3$;

(21) $P \cong PSp_4(p)$, *где* $p \geqslant 29$ — *простое число,* $|\pi(p^2-1)| = 4$ *и* $|\pi(\frac{p^2+1}{2})| = 1$;

(22) $P \cong PSp_4(p)$, *где* $p \geqslant 13$ — *простое число,* $|\pi(p^2-1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+1}{2})| = 2$;

(23) $G \cong G_2(p)$, *где* $p \geqslant 13$ — *простое число,* $|\pi(p^2-1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\epsilon p+1}{(3,p-\epsilon 1)})| = 1$ *для* $\epsilon \in \{+,-\}$;

(24) $G \cong Sz(2^r)$, *где* $r \geqslant 13$ — *простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(2^r-1)| = 1$ *и* $|\pi(2^{2r}+1)| = 4$;

(25) $G \cong Sz(2^r)$, *где* $r \geqslant 11$ — *простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(2^r-1)| = 2$ *и* $|\pi(2^{2r}+1)| = 3$;

(26) $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(2^r))$, *где* $r \geqslant 7$ *и* 2^r-1 — *простые числа, и* $|\pi(2^{2r}+1)| = 3$.

В качестве следствия теоремы 2 существенно уточнен список конечных простых 6-примарных групп, полученный Джафарзаде и Иранманешем в [21]. В этой же их статье была поставлена следующая проблема 3.12: *для каких степеней q простых чисел число $q^2 - 1$ имеет не более пяти различных простых делителей?*

Частный случай этой проблемы, когда $|\pi(q^2-1)| \leqslant 2$, хорошо известен (см., например, статью Герцога [26]): $|\pi(q^2-1)| \leqslant 2$ тогда и только тогда, когда $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$.

Случаи, когда число $|\pi(q^2-1)|$ равно 3, 4 и 5 рассмотрены соответственно автором и И. В. Храмцовым [11, 12], автором [20] и В. А. Колпаковой и автором [25]. Таким образом, получена классификация степеней q простых чисел таких, что $|\pi(q^2-1)| \leqslant 5$. Дальнейшее уточнение этой классификации приводит к диофантовым уравнениям, решение которых трудно и для современной теории чисел. Например, уже вопрос конечности множества степеней q простых чисел таких, что $|\pi(q^2-1)| = 3$, равносилен до сих пор открытому вопросу Ши 13.65 из «Коуровской тетради» [27].

2. Конечные группы с заданными свойствами графа простых чисел и смежные вопросы

В работе [28] автором доказано, что группы $E_7(2)$ и $E_7(3)$ распознаются по графу простых чисел. Как следствие, завершено положительное решение поставленной в обзоре [29] проблемы В. Д. Мазурова о том, что любая конечная простая группа, граф простых чисел которой имеет по крайней мере три компоненты связности, либо распознаваема по спектру, либо изоморфна A_6. В недавней работе [30] автором доказано, что группа ${}^2E_6(2)$ распознается по графу простых чисел. Заметим, что графы простых чисел групп ${}^2E_6(2)$, $E_7(2)$ и $E_7(3)$ состоят соответственно из 8, 12 и 15 вершин.

Вызывает интерес проблема о реализуемости абстрактного конечного графа в виде графа простых чисел некоторой конечной группы. Работ, посвященных этой проблеме совсем не много. В неопубликованной бакалаврской работе И. Н. Жаркова, студента В. Д. Мазурова, было доказано, что цепь реализуется как граф простых чисел некоторой конечной группы тогда и только тогда, когда ее длина не превосходит 4. Интересно, что аналогичная проблема рассматривалась Тонг — Вьетом [31] для графа, который строится по конечной группе G по следующему правилу: множеством его вершин являются простые делители степеней неприводимых характеров группы G, и две вершины p и q смежны в нем тогда и только тогда, когда pq делит степень некоторого неприводимого характера группы G.

Конечно, в общем случае сформулированная проблема имеет отрицательное решение. Например, из [1–3] легко следует, что граф, состоящий из пяти попарно не смежных вершин (5-коклика) не может быть графом простых чисел конечной группы. Однако в работе А. Л. Гаврилюка, автора, Н. В. Масловой и И. В. Храмцова [32] было показано, что для любого графа, имеющего не более пяти вершин, кроме 5-коклики, эта проблема имеет положительное решение.

Лючидо [32] описала конечные простые группы G такие, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями, т. е. связными графами, не содержащими циклы. Кроме того, в этой работе описано строение конечной группы, граф простых чисел которой является деревом. О. А. Алексеева и автор рассматривают более общую задачу описания строения конечной группы G такой, что граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников (3-циклов). В случае, когда исследуемая группа G почти проста, в работе [34] мы получили следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — конечная почти простая группа с цоколем P. Если граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа* P *изоморфна одной из групп* A_n *для* $n \in \{5,6,7\}$, $L_2(q)$ *для* $q \in \{7, 2^3, 3^4, 11, 13, 17, 5^2, 7^2, 2^9\}$, $L_3(q)$ *для* $q \in \{3,4,5,17\}$, $U_3(q)$ *для* $q \in \{3,7\}$, $L_4(3)$, $U_4(q)$ *для* $q \in \{2,3\}$, $G_2(3)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{22};

(2) *группа* G *изоморфна одной из групп* A_8, $L_2(q)$ *для* $q \in \{2^4, 2^6\}$, $L_3(q)$ *для* $q \in \{7,8,9\}$, $L_3(7):2$, $L_3(9):2$, $U_3(q)$ *для* $q \in \{4,5,8\}$, $U_3(5):2$, $U_3(8):3$, $U_5(2)$, ${}^2G_2(27)$;

(3) $P \cong L_2(q)$ *для* $q \in \{5^3, 17^2\}$ *и* $PGL_2(q) \not\leqslant G$;

(4) $P \cong L_2(q)$, *где* $q \in \{2^p, 3^p\}$, p *— нечетное простое число и* $|\pi(q-1)| \leqslant 2 \geqslant |\pi(q+1)|$;

(5) $G \cong L_2(p)$, *где* $p > 17$ *— простое число и* $|\pi(p-1)| \leqslant 2 \geqslant |\pi(p+1)|$;

(6) $G \cong PGL_2(p)$, *где* $p > 17$ *— простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна и* $|\pi(p^2-1)| = 3$;

(7) $G \cong L_2(q)$, *где* $q = p^r$, $p \in \{3,5,7,17\}$, r *— простое число,* r *не делит* $|G|$, $q \equiv \varepsilon 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ *для* $\varepsilon \in \{+,-\}$, $|\pi(q-\varepsilon 1)| = \pi((q+\varepsilon 1)/2)| = 2$;

(8) $G \cong U_3(q)$, *где* $q = 2^p$, $p \geqslant 5$, $q-1$ *и* $(q+1)/3$ *— простые числа,* $|\pi((q^2-q+1)/3)| = 1$ *и* p *не делит* $|G|$;

(9) $P \cong L_3^{\epsilon}(p)$, *где* $\epsilon \in \{+,-\}$, $p \geqslant 11$ *— простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна,* $(p-\epsilon 1)_3 = 3$, $|\pi(p^2-1)| = 3$ *и* $|\pi((p^2+\epsilon p+1)/3)| = 1$;

(10) $P \cong Sz(2^f)$, *где либо* $f = 9$, *либо* f *— нечетное простое число и* $\max\{|\pi(q-1)|, |\pi(q-\sqrt{2q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \leqslant 2$;

(11) $G \cong {}^2G_2(q)$, *где* $q = 3^p$, $p \geqslant 5$ *— простое число, не делящее* $|G|$, $|\pi((q-1)/2)| = |\pi((q+1)/4)| = 1$ *и* $|\pi(q-\sqrt{3q}+1)| \leqslant 2 \geqslant |\pi(q+\sqrt{3q}+1)|$.

Из теоремы 3 и [1–3] легко выводится

Следствие. *Пусть* G *— конечная почти простая группа и граф* $\Gamma(G)$ *не содержит треугольников. Тогда*

(1) *каждая связная компонента графа* $\Gamma(G)$ *является деревом;*

(2) *если группа* G *проста, то граф* $\Gamma(G)$ *несвязен;*

(3) $|\pi(G)| \leqslant 8$ *и равенство достигается, если* $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(2^9))$.

Заметим, что теорема 3 существенно уточняет полученный в [33] список конечных простых групп таких, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями. Доказательство теоремы 3 использует результаты о конечных почти простых n-примарных групп для $n \leqslant 6$ (см. [11, 12, 20, 25]).

Лючидо и Могхаддамфар [35] определили конечные простые неабелевы группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются полными графами (кликами). А. В. Васильев и Е. П. Вдовин [5] устранили ошибки и неточности, допущенные в этой статье. М. Р. Зиновьева и В. Д. Мазуров [37] определили конечные простые неабелевы группы, графы простых чисел которых совпадают с графами простых чисел групп Фробениуса или 2-фробениусовых групп.

В работе М. Р. Зиновьевой и автора [38] классифицированы конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами. Получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* G *— конечная почти простая, но не простая, группа. Все связные компоненты графа* $\Gamma(G)$ *являются кликами тогда и только тогда, когда граф* $\Gamma(G)$ *несвязен и* G *изоморфна группе из следующего списка:*

(1) S_6, M_{10}, $PGL_2(9)$, S_8, S_{12}, $\mathrm{Aut}(L_2(8))$, $\mathrm{Aut}(L_3(3))$, $L_3(4):2_1$, $L_3(8):2$, $L_3(8):3$, $\mathrm{Aut}(L_3(8))$, $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, $U_3(9):2$, $\mathrm{Aut}(U_3(9))$, $\mathrm{Aut}(U_5(2))$, $\mathrm{Aut}({}^3D_4(2))$, $\mathrm{Aut}(Sz(32))$;

(2) $L_2(2^m))\langle f\rangle$, *где* f *— полевой автоморфизм группы* $L_2(2^m)$ *и* $|f| = 2^k > 1$;

(3) $PGL_2(p)$, *где* $p > 3$ *— простое число Ферма или Мерсенна;*

(4) $L_2(p^m)\langle df\rangle$, *где* p — *нечетное простое число,* m *четно,* d *и* f — *диагональный и инволютивный полевой автоморфизмы группы* $L_2(p^m)$ *соответственно;*

(5) $L_3(2^m)\langle x\rangle$, *где* $m \geqslant 5$, $(2^m-1)_3 \neq 3$, $|x| = 2\cdot 3^k$, x^2 — *полевой автоморфизм, а* x^{3^k} — *графовый автоморфизмы группы* $L_3(2^m)$*;*

(6) $L_3(p):2$, *где* $p \geqslant 127$ — *простое число Мерсенна и* $(p-1)_3 \geqslant 9$*;*

(7) $U_3(2^m)\langle f\rangle$, *где* $(2^m+1)_3 \neq 3$, f — *полевой автоморфизм группы* $U_3(2^m)$ *и* $|f| = 2^l\cdot 3^k$ *для* $l > 0$*;*

(8) $U_3(p):2$, *где* $p \geqslant 17$ — *простое число Ферма и* $(p+1)_3 \geqslant 9$*;*

(9) $G_2(3^m))\langle f\rangle$, *где* f — *полевой автоморфизм группы* $G_2(3^m)$ *и* $\varnothing \neq \pi(|f|) \subseteq \{2,3\}$*;*

(10) $PSp_4(q)\langle f\rangle)$, *где* f — *полевой автоморфизм группы* $PSp_4(q)$ *и* $|f| = 2^k > 1$*;*

(11) $PSp_4(q))\langle df\rangle$, *где* d *и* f — *диагональный и полевой автоморфизмы группы* $PSp_4(q)$ *соответственно и* $|f| = 2^k > 1$.

Доказательство теоремы 4 использует результаты Лючидо [4] о конечных почти простых группах с несвязными графами простых чисел.

Пусть G — конечная группа и V — G-модуль над некоторым полем. Говорят, что нетривиальный элемент группы G действует *свободно* (или *без неподвижных точек*) на V, если он не имеет ненулевых неподвижных векторов в V. Большой интерес вызывает проблема *описания неприводимых G-модулей, где некоторый элемент простого порядка из G действует свободно.* Результаты по этой проблеме находят многочисленные приложения, в частности, при исследовании распознаваемости конечных простых групп по спектру или по графу простых чисел, а также при изучении строения конечных групп с несвязным графом простых чисел (см., например, обзоры [7, 28] и работу И. Д. Супруненко и А. Е. Залесского [39]).

Пусть p — простое число, $q = p^l$, $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, P — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $G = SL_n(q)$ — специальная линейная группа степени $n \geqslant 2$ над полем $\mathbb{F}_q$. *Циклом Зингера* группы G (соответственно $G/Z(G) = L_n(q)$) называется любая ее циклическая подгруппа порядка $(q^n-1)/(q-1)$ (соответственно $(q^n-1)/(q-1)(n,q-1)$) (см. теорему II.7.3 из [8]). Автором была поставлена задача *классификации неприводимых G-модулей над полем P, где нецентральный элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы G действует свободно.* Именно так действуют нетривиальные элементы из цикла Зингера группы G на ее естественном модуле над полем P. Заметим также, что если H — конечная группа с несвязным графом простых чисел такая, что $F(H) \neq 1$, $\overline{H} = H/F(G) \cong L_n(q)$ и $n \geqslant 3$, то действие (сопряжением) группы H на $F(H)$ индуцирует на каждом главном факторе группы H, входящем в $F(H)$, точный неприводимый $\overline{H}$-модуль (над некоторым полем простого порядка), на котором все нетривиальные элементы из цикла Зингера группы $\overline{H}$ действуют свободно [7]. Поэтому уточнение строения группы H во многом сводится к изучению таких $\overline{H}$-модулей.

Автор, А. А. Осиновская и И. Д. Супруненко в работе [40] решили эту сложную задачу в следующих трех случаях: а) вычет числа p^f по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$. Это обобщает, в частности, результаты Г. Хигмена (см. теорему 8.2 из [41]) и У. Стюарта (см. [42, предложение 3.2]), которые были получены в случае, когда $m = 3$ и $n = 2$. Р. Уилсон [43] определил неприводимые представления в характеристике 2 квазипростых групп Шевалле над конечными полями характеристики 2, где некоторый элемент порядка 3 не имеет собственного значения 1, т. е. действует в соответствующем модуле без неподвижных точек. А. Е. Залесский, В. Лемпкен и П. Фляйшманн (см. [44, теорему 0.1]) описали абсолютно неприводимые подгруппы полной линейной группы над конечным полем характеристики 2, порожденные классом сопряженных элементов порядка 3, действующих без неподвижных точек. В статье А. Е. Залесского [45] приведен обзор результатов о собственных значениях элементов в представлениях алгебраических групп и конечных групп Шевалле, особое внимание уделяется собственному значению 1, что связано с указанной выше проблемой.

Литература

1. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra.—1981.—Vol. 69, № 2.—P. 487–513.
2. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб.—1989.—Т. 180, № 6.—С. 787–797.
3. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic // J. Algebra.—1993.—Vol. 155, № 2.—P. 335–343; Corrigenda: J. Algebra.—1996.—Vol. 181, № 2.— P. 659.
4. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—1999.—Vol. 102.—P. 1–22; Addendum: Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—2002.—Vol. 107.—P. 189–190.
5. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика.—2005.—Т. 44, № 6.—С. 682–725.
6. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика.—2011.—Т. 50, № 4.—С. 425–470.
7. *Кондратьев А. С.* О конечных группах с небольшим простым спектром // Мат. форум. Т. 6. Группы и графы.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—С. 52–70.—(Итоги науки. Юг России).
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.—Berlin: Springer-Verlag, 1967.—793 s.
9. *Aschbacher M.* Finite group theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.—274 p.
10. *Conway J. H. et. al.* Atlas of finite groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.
11. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.— 2010.—Т. 16, № 3.—С. 150–158.
12. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.— 2011.—Т. 17, № 4.—С. 142–159.
13. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О непростых конечных трипримарных группах с несвязным графом простых чисел // Сиб. электрон. мат. изв.—2012.—Т. 9.—С. 472–477.
14. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* Вполне приводимость некоторых $GF(2)A_7$-модулей // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2012.—Т. 18, № 3.—С. 139–143.
15. *Храмцов И. В.* О конечных непростых 4-примарных группах // Сиб. электрон. мат. изв.—2014.—Т. 11.—С. 695–708.
16. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных группах, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный $L_3(17)$ // Алгебра и мат. логика: теория и приложения.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.—С. 81–82.
17. *Кондратьев А. С., Супруненко И. Д., Храмцов И. В.* О модулярных представлениях группы $L_3(17)$ // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск: ИМ СО РАН и НГУ, 2014.—С. 63.
18. *Храмцов И. В.* О конечных группах, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный группе $L_2(81)$ // Тр. междунар. школы-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В. В. Кабанова.—Нальчик: Изд-во КБГУ, 2014.—С. 56–58.
19. *Kondrat'ev A. S.* Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Изв. Гомельского гос. ун-та.—2014.—№ 3 (84).—С. 58–60.
20. *Kondrat'ev A. S.* Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Сиб. эл. матем. изв.—2014.—Т. 11.—С. 634–674.
21. *Jafarzadeh A., Iranmanesh A.* On simple K_n-groups for $n = 5, 6$ // London Math. Soc. Lecture Note Ser.—2007.—Vol. 340.—P. 517–526.
22. *Zhang L., Shi W., Lv H., Yu D., Chen S.* OD-characterization of finite simple K_5-groups.—Preprint, 2011.
23. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.4.12.—2008.—URL: http://www.gap-system.org.
24. *Колпакова В. А., Кондратьев А. С.* О конечных неразрешимых 5-примарных группах G с несвязным графом Грюнберга — Кегеля таких, что $|\pi(G/F(G))| \leqslant 4$ // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск: ИМ и НГУ, 2014.—С. 62.

25. *Колпакова В. А., Кондратьев А. С.* Конечные почти простые 6-примарные группы и их графы Грюнберга — Кегеля // Алгебра и приложения: Тр. междунар. конф. по алгебре, посвящ. 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина.—Нальчик: КБГУ, 2014.—С. 63–66.
26. *Herzog M.* On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra.—1968.—Vol. 10, № 3.—P.—P. 383–388.
27. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Ред. Мазуров В. Д., Хухро В. И.—Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.
28. *Кондратьев А. С.* Распознаваемость групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$ по графу простых чисел // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН.—2014.—Т. 20, № 2.—С. 223–229.
29. *Мазуров В. Д.* Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та.—2005.—№ 36.—С. 119–138.—(Математика и механика. Вып. 7).
30. *Кондратьев А. С.* Распознаваемость по графу простых чисел группы ${}^2E_6(2)$ // Материалы Междунар. симпозиума «Абелевы группы», посвящ. 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова.—М.: МПГУ, 2014.—С. 35–37.
31. *Tong-Viet H. P.* Groups whose prime graphs have no triangles // J. Algebra.—2013.—Vol. 378.—P. 196–206.
32. *Gavrilyuk A. L., Khramtsov I. V., Kondrat'ev A. S., Maslova N. V.* On realizability of a graph as the prime graph of a finite group // Сиб. эл. матем. изв.—2014.—Т. 11.—С. 246–257.
33. *Lucido M. C.* Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8).—2002.—Vol. 5-B, № 1.—P. 131–148.
34. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Конечные почти простые группы, графы Грюнберга — Кегеля которых не содержат треугольников // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск: ИМ и НГУ, 2014.—С. 50.
35. *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory.—2004.—Vol. 7, № 3.—P. 373–384.
36. *Зиновьева М. Р., Мазуров В. Д.* О конечных группах с несвязным графом простых чисел // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2012.—Т. 18, № 3.—С. 99–105.
37. *Зиновьева М. Р., Кондратьев А. С.* Классификация конечных почти простых групп с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами // Теория групп и ее приложения: Тр. межднар. школы-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В. В. Кабанова.—Нальчик: Изд-во КБГУ, 2014.—С. 25–26.
38. *Suprunenko I. D., Zalesski A. E.* Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput.—2007.—Vol. 17, № 5–6.—P. 1249–1261.
39. *Кондратьев А. С., Осиновская А. А., Супруненко И. Д.* О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 179–186.
40. *Higman G.* Odd Characterizations of Finite Simple Groups: Lecture Notes.—Michigan: Univ. Michigan, 1968.—77 p.
41. *Stewart W. B.* Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc.—1973.—Vol. 426, № 4.—P. 653–680.
42. *Wilson R.* Certain representations of Chevalley groups over $CF(2^n)$ // Comm. Algebra.—1975.—Vol. 3, № 4.—P. 319–364.
43. *Fleischmann P., Lempken W., Zalesskii A. E.* Linear groups over $GF(2^k)$ generated by a conjugacy class of a fixed point free element of order 3 // J. Algebra.—2001.—Vol. 244, № 2.—P. 631–663.
44. *Suprunenko I. D., Zalesski A. E.* Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput.—2007.—Vol. 17, № 5–6.—P. 1249–1261.
45. *Zalesski A. E.* On eigenvalues of group elements in representations of algebraic groups and finite Chevalley groups // Acta Appl. Math.—2009.—Vol. 108, № 1.—P. 175–195.

Статья поступила 29 апреля 2015 г.

Кондратьев Анатолий Семенович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
зав. сектором
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
профессор
РОССИЯ, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

ON FINITE GROUPS WITH SMALL SIMPLE SPECTRUM, II

Kondratiev A. S.

This is a survey of the results about finite groups whose prime graphs have a small number of vertices obtained recently by the author jointly with his pupils. It is refined a description of the chief factors of 4-primary groups, whose prime graphs are disconnected. The finite almost simple 5-primary and 6-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs are determined. The chief factors of the commutator subgroups of finite non-solvable groups G with disconnected Gruenberg–Kegel graph having exactly 5 vertices are described in the case when $G/F(G)$ is an almost simple n-primary group for $n \leqslant 4$. The problem of the realizability of a graph with at most five vertices as the prime graph of a finite group is solved. The finite almost simple groups with prime graphs, whose the connected components are complete graphs, are determined. The finite almost simple groups whose prime graphs do not contain triangles are determined. It is proved that the groups $^2E_6(2)$, $E_7(2)$ and $E_7(3)$ are recognizable by the prime graph. Absolutely irreducible $SL_n(p^f)$-modules over a field of prime characteristic p, where an element of a given prime order m from a Zinger cycle of $SL_n(p^f)$ acts freely, are classified in the following three cases: a) the residue of q modulo m generates the multiplicative group of the field of order m (in particular, this holds for $m = 3$); b) $m = 5$; c) $n = 2$.

Key words: finite group, almost simple group, chief factor, prime spectrum, prime graph, recognizability, modular representation.