Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 2, С. 69–78

УДК **512.55**

ДИЗЪЮНКТНО ПОЛНЫЕ $C_\infty(Q)$-МОДУЛИ

В. И. Чилин, Ж. А. Каримов

Для регулярного дизъюнктно полного $C_\infty(Q)$-модуля X вводится понятие паспорта $\Gamma(X)$, состоящего из однозначно определенных разбиения единицы булевой алгебры, отвечающей стоуновскому компакту Q, и набора попарно различных кардинальных чисел. Доказывается, что $C_\infty(Q)$-модули X и Y являются изоморфными тогда и только тогда, когда $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$.

Ключевые слова: $C_\infty(Q)$-базис Гамеля, однородный модуль, σ-конечномерный модуль.

1. Введение

При решении задачи «внутреннего» описания класса C^*-алгебр, близких по своей алгебраической и порядковой структуре к алгебрам фон Неймана, в работе [9] И. Капланским было выделено семейство AW^*-алгебр, ставших предметом многочисленных исследований, относящихся к теории операторных алгебр (см. обзор [8]). Одним из важных результатов, полученных в этом направлении, стала реализация произвольной AW^*-алгебры M типа I в виде $*$-алгебры всех линейных ограниченных операторов, действующих в специальном банаховом модуле над центром $Z(M)$ алгебры M [10]. Банахова $Z(M)$-значная норма в этом модуле порождалась скалярным произведением со значениями в коммутативной AW^*-алгебре $Z(M)$. Впоследствии, такие модули стали называться модулями Капланского — Гильберта (МКГ). Детальное изложение свойств МКГ дано, например, в [6, 7.4]. Центральным местом в теории МКГ является представление таких модулей в виде прямой суммы однородных МКГ (см. [6, 7.4.7], [11]).

В связи с развитием теории некоммутативного интегрирования важное место среди операторных алгебр стали занимать $*$-алгебры $LS(M)$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, либо AW^*-алгебре M. В случае алгебр фон Неймана M, центр $Z(LS(M))$ в алгебре $LS(M)$ отождествляется с алгеброй $L^0 := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех классов равных почти всюду измеримых комплексных функций, заданных на некотором измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной локально конечной мерой μ [7, 2.1, 2.2]. Если же M — AW^*-алгебра, то $Z(LS(M))$ есть расширенная f-алгебра $C_\infty(Q)$, отвечающая стоуновскому компакту Q для булевой алгебры центральных проекторов из M [8]. Естественно возникает вопрос о возможности реализации $*$-алгебр $LS(M)$ в виде $*$-алгебры линейных L^0-ограниченных ($C_\infty(Q)$-ограниченных) операторов, действующих в соответствующем МКГ над L^0 либо $C_\infty(Q)$. Для решения этой задачи необходимо построение теории МКГ над $C_\infty(Q)$, подобно тому, как это было сделано И. Капланским в [11] для модулей над коммутативными AW^*-алгебрами. Частично, для МКГ над L^0, эта задача решена в [3], где дано разложение МКГ над L^0 в прямую сумму однородных МКГ.

Каждый МКГ над L^0 обладает свойством регулярности и дизъюнктной полноты (определения см. ниже в разделе 2). В связи с этим, естественно рассматривать общий класс регулярных дизюнктно полных модулей над $C_\infty(Q)$ для стоуновских компактов Q, отвечающим полным булевым алгебрам $\mathscr{B}$, и для этого класса модулей устанавливать структурную теорему о возможности их разложения в прямую сумму однородных модулей. Настоящая работа посвящена решению этой задачи. Следует отметить, что в случае, когда булева алгебра $\mathscr{B}$ не является мультинормируемой, понятие γ-однородности $C_\infty(Q)$-модуля требует модификации, подобно той, что сделана в [6, 7.4.7] при введении строго γ-однородных МКГ над коммутативными AW^*-алгебрами. В настоящей работе доказывается, что для мульти-σ-конечных булевых алгебр $\mathscr{B}$, т. е. тех алгебр, которые изоморфны прямому произведению булевых алгебр счетного типа, понятия γ-однородности и строгой γ-однородности $C_\infty(Q)$-модуля совпадают. В частности, это верно и для мультинормируемых булевых алгебр.

Центральным в работе является понятие паспорта для точного регулярного дизъюнктно полного $C_\infty(Q)$-модуля X. Паспорт $\Gamma(X)$ для X состоит из однозначно определенных разбиения единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ и набора попарно различных кардиналов. Доказывается, что равенство паспортов $\Gamma(X)$ и $\Gamma(Y)$ есть необходимое и достаточное условие для изоморфизма $C_\infty(Q)$-модулей X и Y.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{B}$ — произвольная булева алгебра с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Для каждого ненулевого $e \in \mathscr{B}$ положим $\mathscr{B}_e = \{q \in \mathscr{B} : q \leqslant e\}$. Относительно частичного порядка, индуцированного из $\mathscr{B}$, множество $\mathscr{B}_e$ является булевой алгеброй с нулем $\mathbf{0}$ и единицей e.

Говорят, что $D \subset \mathscr{B}$ минорантное подмножество для $E \subset \mathscr{B}$, если для каждого ненулевого $e \in E$ существует такое $\mathbf{0} \neq q \in D$, что $q \leqslant e$. Нам понадобится следующее важное свойство полных булевых алгебр.

Теорема 2.1 [6, 1.1.6]. *Пусть $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра, $\mathbf{0} \neq e \in \mathscr{B}$ и D — минорантное подмножество для $\mathscr{B}_e$. Тогда существует такое дизъюнктное подмножество $D_1 \subset D$, что $\sup D_1 = e$.*

Говорят, что булева алгебра $\mathscr{B}$ имеет счетный тип (или $\mathscr{B}$ — σ-конечна), если любое семейство ненулевых попарно дизъюнктных элементов из $\mathscr{B}$ не более чем счетно. Если на булевой алгебре $\mathscr{B}$ существует строго положительная конечная мера, то $\mathscr{B}$ обязательно имеет счетный тип [2, гл. I, § 6].

Полную булеву алгебру $\mathscr{B}$ будем называть *мульти-σ-конечной*, если в $\mathscr{B}$ имеется такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$, что булева алгебра $\mathscr{B}_{e_i}$ имеет счетный тип, для всех $i \in I$. Примером мульти-σ-конечной булевой алгебры служит любая мультинормируемая булева алгебра, т. е. такая полная булева алгебра $\mathscr{B}$, которая допускает разделяющее семейство конечных вполне аддитивных мер [6, 1.2.10].

Пусть Q — стоуновский компакт, соответствующий полной булевой алгебре $\mathscr{B}$. Обозначим через $C_\infty(Q)$ множество всех непрерывных функций $\alpha : Q \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. При естественном определении алгебраических операций и частичного порядка в $C_\infty(Q)$ оно становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел и расширенной порядково полной векторной решеткой. Функция $\mathbf{1}_Q$, тождественно равная единице на Q, служит единицей алгебры $C_\infty(Q)$ и порядковой единицей в векторной решетке $C_\infty(Q)$ [6, 1.4.2].

Множество всех идемпотентов из $C_\infty(Q)$ является полной булевой алгеброй относительно частичного порядка, индуцируемого из $C_\infty(Q)$, которая изоморфна исходной булевой алгебре $\mathscr{B}$. В дальнейшем эти две булевы алгебры отождествляются. При этом отождествлении единица $\mathbf{1}$ из $\mathscr{B}$ совпадает с функцией $\mathbf{1}_Q$, а нуль $\mathbf{0}$ из $\mathscr{B}$ с функцией, тождественно равной нулю. Алгебру $C_\infty(Q)$ будем обозначать через $L^0_{\mathbf{R}}(\mathscr{B})$, а ее комплексификацию через $L^0_{\mathbf{C}}(\mathscr{B})$. В случае, когда булева алгебра $\mathscr{B}$ и поле скаляров фиксированы, алгебры $L^0_{\mathbf{R}}(\mathscr{B})$ и $L^0_{\mathbf{C}}(\mathscr{B})$ будем обозначать через L^0, либо через $L^0(\mathscr{B})$.

Пусть X — левый унитальный $L^0(\mathscr{B})$-модуль с алгебраическими операциями $x+y$ и αx, $x, y \in X$, $\alpha \in L^0(\mathscr{B})$. Поскольку алгебра $L^0(\mathscr{B})$ коммутативна, то левый $L^0(\mathscr{B})$-модуль X становится правым $L^0(\mathscr{B})$-модулем, если положить $x\alpha := \alpha x$, $x \in X$, $\alpha \in L^0(\mathscr{B})$. В дальнейшем $L^0(\mathscr{B})$-бимодуль X будем называть просто $L^0(\mathscr{B})$-модулем.

$L^0(\mathscr{B})$-модуль называется точным, если для любого ненулевого $\alpha \in L^0(\mathscr{B})$ существует такое $x \in X$, что $\alpha x \neq 0$. Ясно, что для точного $L^0(\mathscr{B})$-модуля X множество eX есть точный $L^0(\mathscr{B}_e)$-модуль для любого $0 \neq e \in \mathscr{B}$, при этом, eX является $L^0(\mathscr{B})$-подмодулем в X.

L^0-модуль X назовем регулярным, если из условия $ex = 0$ для всех $e \in A \subset \mathscr{B}$, где $x \in X$, следует, что $(\sup A)\, x = 0$. В этом случае, для каждого $x \in X$ определен идемпотент $s(x) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \mathscr{B} : ex = 0\}$, который называется носителем элемента x. Если X — регулярный L^0-модуль, то, очевидно, eX также является регулярным eL^0-модулем для любого ненулевого $e \in \mathscr{B}$. Легко видеть, что носители элементов из регулярного L^0-модуля X обладают следующими свойствами: $s(x)x = x$, $s(\alpha x) = s(\alpha)s(x)$, $s(x+y) \leqslant s(x) \vee s(y)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in L^0$.

Пусть X — регулярный L^0-модуль и $Y \subset X$. Идемпотент $s(Y) = \sup\{s(y) : y \in Y\}$ будем называть носителем подмножества Y. Ясно, что регулярный L^0-модуль X является точным тогда и только тогда, когда $s(X) = \mathbf{1}$.

Будем говорить, что регулярный L^0-модуль X является дизъюнктно полным (d-полный), если для любого набора $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ и любого разбиения $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ существует такое $x \in X$, что $e_i x = e_i x_i$ для всех $i \in I$. В этом случае, элемент x называется перемешиванием набора $\{x_i\}_{i\in I}$ относительно разбиения единицы $\{e_i\}_{i\in I}$ и обозначается через $\mathrm{mix}_{i\in I}(e_i x_i)$. Перемешивание $\mathrm{mix}_{i\in I}(e_i x_i)$ определено однозначно, поскольку из равенств $e_i x = e_i x_i = e_i y$, $x, y \in X$, $i \in I$, следует, что $e_i(x-y) = 0$ для всех $i \in I$, откуда, в силу регулярности L^0-модуля X, вытекает равенство $x = y$.

Множество всех перемешиваний $\mathrm{mix}_{i\in I}(e_i x_i)$, где $\{x_i\}_{i\in I} \subset E \subset X$, а $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$ называется циклической оболочкой подмножества E в X и обозначается через $\mathrm{mix}(E)$. Если $E = \mathrm{mix}(E)$, то E называется циклическим множеством в X (ср. [5, 1.1.2]). Таким образом, регулярный L^0-модуль X является d-полным L^0-модулем в том и только в том случае, когда X — циклическое множество.

Утверждение 2.2. *Если X — d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, то eX также есть d-полный $L^0(\mathscr{B}_e)$-модуль для любого ненулевого $e \in \mathscr{B}$.*

$\lhd$ Как уже отмечалось, eX является регулярным $L^0(\mathscr{B}_e)$-модулем в случае, когда X — регулярный $L^0(\mathscr{B})$-модуль. Далее, если $\{x_i\}_{i\in I} \subset eX$ и $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы e булевой алгебры $e\mathscr{B}$, то $\{\{e_i\}_{i\in I}, \mathbf{1} - e\}$ есть разбиение единицы $\mathbf{1}$ булевой алгебры $\mathscr{B}_e$. Взяв набор $\{\{x_i\}_{i\in I}, 0\} \subset X$ и используя d-полноту L^0-модуля X, выберем $x \in X$ так, чтобы $(\mathbf{1} - e)x = 0$ и $e_i x = x_i$ для всех $i \in I$. Для $y = ex \in eX$ имеем, что $e_i y = x_i$ при всех $i \in I$. $\rhd$

Нам понадобятся следующие легко проверяемые свойства циклических оболочек множеств.

Утверждение 2.3. *Пусть X — d-полный L^0-модуль, E — непустое подмножество из X, $\alpha \in L^0$. Тогда*

(i) $\mathrm{mix}(\mathrm{mix}(E)) = \mathrm{mix}(E)$;

(ii) $\mathrm{mix}(\alpha E) = \alpha\,\mathrm{mix}(E)$;

(iii) *Если* Y — L^0*-подмодуль в* X, *то* $\mathrm{mix}(Y)$ — d*-полный* L^0*-подмодуль в* X;

(iv) *Если* U — *изоморфизм из* L^0*-модуля* X *на* L^0*-модуль* Z, *то* Z *является* d*-полным* L^0*-модулем и* $\mathrm{mix}(U(E)) = U(\mathrm{mix}(E))$.

Отметим также следующее полезное

Утверждение 2.4. (i) *В любом точном* d*-полном* L^0*-модуле* X *существует такой элемент* x, *что* $s(x) = \mathbf{1}$;

(ii) *Если* Y — d*-полный* L^0*-подмодуль в регулярном* L^0*-модуле* X *и для любого* $0 \neq e \in \mathscr{B}$ *существует такой ненулевой идемпотент* $g_e \leqslant e$, *что* $g_eY = g_eX$, *то* $Y = X$.

$\lhd$ (i). Поскольку $\mathbf{1} = s(X) = \sup\{s(x) : x \in X\}$, то для любого ненулевого $g \in \mathscr{B}$ существует такое $x_g \in X$, что $p_g = gs(x_g) \neq 0$, и если $y_g = p_g x_g$, то $s(y_g) = p_g \leqslant g$. В силу теоремы 2.1, найдется такой набор $\{e_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathscr{B}$, что $\sup_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$ и $e_i = s(y_i)$ для некоторого $y_i \in X$. Поскольку X — d-полный L^0-модуль, то имеется такой элемент $x \in X$, для которого $e_i x = e_i y_i$, в частности, $e_i = s(e_i y_i) = s(e_i x) \leqslant s(x)$ для всех $i \in I$. Следовательно, $s(x) = \mathbf{1}$.

(ii) Используя теорему 2.1, выберем такой набор $\{e_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathscr{B}$, что $\sup_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$ и $e_iY = e_iX$ для каждого $i \in I$. Если $x \in X$, то $e_i x \in e_i X = e_i Y \subset Y$. Так как Y — d-полный L^0-модуль, то существует такое $y \in Y$, что $e_i y = e_i x$ для всех $i \in I$, и поэтому $x = y \in Y$. $\rhd$

Далее нам понадобится разложение точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля в виде прямого произведения точных d-полных $L^0(\mathscr{B}_e)$-модулей, где $0 \neq e \in \mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра, X — точный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$, $e_i \neq 0$ для любого $i \in I$. Рассмотрим прямое произведение

$$\prod_{i\in I} e_i X = \Big\{\{y_i\}_{i\in I} : y_i \in e_i X\Big\}$$

$L^0(\mathscr{B})$-подмодулей $e_i X$ в X, $i \in I$, с покоординатными алгебраическими операциями и определим отображение $U : X \to \prod_{i\in I} e_i X$, полагая $U(x) = \{e_i x\}_{i\in I}$. Обычным образом устанавливается следующее

Утверждение 2.5. (i) $\prod_{i\in I} e_i X$ *есть точный* L^0*-модуль.*

(ii) *Если* X — d*-полный* L^0*-модуль, то* $\prod_{i\in I} e_i X$ *также является* d*-полным* L^0*-модулем и* U *есть изоморфизм из* X *на* $\prod_{i\in I} e_i X$.

3. Однородные L^0-модули

L^0*-линейной оболочкой* непустого множества Y из L^0-модуля X называется L^0-подмодуль в X вида

$$\mathrm{Lin}(Y, L^0) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i : \alpha_i \in L^0,\ y_i \in Y,\ i = 1, \dots, n,\ n \in \mathbf{N}\right\},$$

где $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел. Если X — d-полный L^0-модуль, то в силу утверждения 2.3 (iii) $\mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(Y, L^0))$ есть d-полный L^0-подмодуль в X.

Система $\{x_i\}_{i\in I}$ из L^0-модуля X называется L^0*-линейно независимой*, если для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L^0$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$, $n \in \mathbf{N}$, равенство $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0$ влечет равенства

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. L^0-линейно независимая система $\{x_i\}_{i\in I}$ из d-полного L^0-модуля X называется *L^0-базисом Гамеля*, если $\operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0)) = X$.

Из теоремы 2.1 вытекает следующее

Утверждение 3.1. *Для L^0-линейно независимой системы $\{x_i\}_{i\in I}$ в d-полном L^0-модуле X следующие условия эквивалентны:*

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ — L^0-базис Гамеля;

(ii) Для любых $x \in X$, $0 \neq e \in \mathscr{B}$ существует такой ненулевой идемпотент $g \leqslant e$, что $gx \in g\operatorname{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0)$.

Отметим, что L^0-линейная оболочка конечных L^0-линейно независимых систем всегда является циклическим множеством, т. е. верно следующее

Утверждение 3.2. *Если $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — L^0-линейно независимое подмножество в d-полном L^0-модуле X, то $\operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(A, L^0)) = \operatorname{Lin}(A, L^0)$.*

$\lhd$ Пусть $x \in \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(A, L^0))$, $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы и $\{y_i\}_{i\in I} \subset \operatorname{Lin}(A, L^0)$ такие, что $e_i x = e_i y_i$ для всех $i \in I$. Так как $e_i x \in \operatorname{Lin}(A, L^0)$, то $e_i x = \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(i)} x_j$ для некоторых $\alpha_j^{(i)} \in L^0$, $j = 1, \ldots, k$. Выберем такое $\beta_j \in L^0$, что $e_i\beta_j = e_i\alpha_j^{(i)}$ для всех $i \in I$, где $j \in \{1, \ldots, k\}$. Ясно, что $e_i x = e_i\left(\sum_{j=1}^k \beta_j x_j\right)$ при каждом $i \in I$, что влечет равенство $x = \sum_{j=1}^k \beta_j x_j \in \operatorname{Lin}(A, L^0)$. $\rhd$

Пусть γ — некоторый кардинал. Точный d-полный L^0-модуль X назовем *γ-однородным*, если в X имеется L^0-базис Гамеля $\{x_i\}_{i\in I}$ с $\operatorname{card} I = \gamma$. Будем говорить, что L^0-модуль X однороден, если он является γ-однородным L^0-модулем для некоторого кардинала γ. Если X — γ-однородный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, $0 \neq e \in \mathscr{B}$, то, очевидно, eX также γ-однородный $L^0(\mathscr{B}_e)$-модуль.

Естественно ожидать, что однородный L^0-модуль не может быть одновременно γ-однородным и λ-однородным при $\gamma \neq \lambda$. Ситуация здесь аналогична тому же положению, что при классификации модулей Капланского — Гильберта (МКГ) над коммутативными AW^*-алгебрами $\mathscr{A}(\mathscr{B})$ с булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$. Для произвольной полной булевой алгебры $\mathscr{B}$ не удается доказать равенство $\lambda = \gamma$ при предположении, что X является одновременно γ-однородным и λ-однородным. В связи с этим, в [6, 7.4.6] дается понятие строгой γ-однородности МКГ X, с помощью которого, затем, и устанавливается описание произвольных МКГ. В то же время, для мульти-σ-конечных булевых алгебр $\mathscr{B}$ в [11] доказывается равенство $\lambda = \gamma$ для $\mathscr{A}(\mathscr{B})$ — МКГ, являющихся одновременно γ-однородными и λ-однородными. Фактически это означает, что в этом случае понятия строгой γ-однородности и γ-однородности совпадают.

Следуя [6, 7.4.7], ниже дается понятие строгого γ-однородного $L^0(\mathscr{B})$-модуля, что позволяет дать представление произвольного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля в виде прямого произведения строго γ-однородных $L^0(\mathscr{B})$-модулей.

Пусть X — точный d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, $0 \neq e \in \mathscr{B}$. Через $\varkappa(e) = \varkappa_X(e)$ обозначим наименьший кардинал γ такой, что $L^0(\mathscr{B}_e)$-модуль eX является γ-однородным. Если X — однороден, то $\varkappa(e)$ определен для всех ненулевых $e \in \mathscr{B}$.

Будем говорить, что $L^0(\mathscr{B})$-модуль X *строго γ-однороден* (ср. [6, 7.4.6]), если X — однороден и $\gamma = \varkappa(e)$ для всех ненулевых $e \in \mathscr{B}$. Будем говорить также, что L^0-модуль X строго однороден, если он строго γ-однороден для некоторого кардинала γ.

Ясно, что любой строго γ-однородный $L^0(\mathscr{B})$-модуль является γ-однородным $L^0(\mathscr{B})$-модулем. Ниже мы установим, что эти два понятия совпадают в случае мульти-σ-конечных булевых алгебр $\mathscr{B}$. Сначала покажем, что для $n \in \mathbf{N}$ всякий n-однородный

$L^0(\mathscr{B})$-модуль является строго n-однородным. Следующая лемма является L^0-вариантом известного факта из линейной алгебры и доказывается аналогичным образом (см., например, [4, гл. 2, § 9]).

Лемма 3.3. *Пусть X — произвольный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, $0 \neq e \in \mathscr{B}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ и $\{y_j\}_{j=1}^k \subset eX$. Если $\{y_j\}_{j=1}^k \subset \mathrm{Lin}(\{ex_i\}_{i=1}^n, eL^0(\mathscr{B}))$ и элементы $y_1, \ldots, y_k$ — $eL^0(\mathscr{B})$-линейно независимы, то $k \leqslant n$.*

Из леммы 3.3 непосредственно вытекает

Теорема 3.4. (i) *Если $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^k$ — L^0-базисы Гамеля в $L^0(\mathscr{B})$-модуле, то $n = k$;*

(ii) *Каждый n-однородный $L^0(\mathscr{B})$-модуль является строго n-однородным $L^0(\mathscr{B})$-модулем.*

Следующая теорема является вариантом теоремы 3.4 для бесконечных кардиналов, в случае, когда булева алгебра $\mathscr{B}$ имеет счетный тип.

Теорема 3.4. *Если λ и γ — бесконечные кардиналы, $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра счетного типа и X — d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, являющийся одновременно λ-однородным и γ-однородным, то $\gamma = \lambda$.*

$\lhd$ Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$ — два $L^0(\mathscr{B})$-базиса Гамеля в X, т. е.

$$\mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0(\mathscr{B}))) = X = \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{y_j\}_{j\in J}, L^0(\mathscr{B})))$$

и $\mathrm{card}\, I = \lambda$, $\mathrm{card}\, J = \gamma$. Зафиксируем $j_0 \in J$. Поскольку $y_{j_0} \in \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0(\mathscr{B})))$ и булева алгебра $\mathscr{B}$ имеет счетный тип, то найдутся такие счетное разбиение $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ и набор $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0(\mathscr{B}))$, что $e_n y_{j_0} = e_n a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Используя включение $a_n \in \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0(\mathscr{B}))$, выберем такие $x_{i_k(j_0,n)}$ и $\alpha_{i_k(j_0,n)} \in L^0(\mathscr{B})$, $k = 1, \ldots, m(n)$, что $a_n = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_{i_k(j_0,n)} x_{i_k(j_0,n)}$. Положим $I(j_0) = \{i_k(j_0, n) : k = 1, \ldots, m(n),\ n \in \mathbf{N}\}$ и $I(J) = \bigcup_{j\in J} I(j)$. Ясно, что множество $I(j_0)$ — не более чем счетно и $I(J) \subset I$. При этом, $y_j \in \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I(j)}, L^0(\mathscr{B})))$ для каждого $j \in J$.

Покажем, что $I(J) = I$. Предположим, что существует $i_0 \in I \setminus I(J)$. Поскольку $x_{i_0} \in \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{y_j\}_{j\in J}, L^0(\mathscr{B})))$ и булева алгебра $\mathscr{B}$ имеет счетный тип, то существует такое разбиение единицы $\{g_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ и набор $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathrm{Lin}(\{y_j\}_{j\in J}, L^0(\mathscr{B}))$, что $g_k x_{i_0} = g_k b_k = g_k \sum_{s=1}^{p(k)} \beta_{j_s(i_0,k)} y_{j_s(i_0,k)}$ для некоторых $\beta_{j_s(i_0,k)} \in L^0$, $y_{j_s(i_0,k)} \in \{y_j\}_{j\in J}$, $s = 1, \ldots, p(k)$, при этом, $y_{j_s(i_0,k)} \in \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I(j_s(i_0,k))}, L^0(\mathscr{B}))) \subset \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I(J)}, L^0(\mathscr{B})))$. Следовательно, $g_k b_k \in \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I(J)}, L^0(\mathscr{B})))$ для всех $k \in \mathbf{N}$, и поэтому $x_{i_0} \in \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I(J)}, L^0(\mathscr{B})))$ (см. утверждение 2.3 (i)). В частности, существует такое $0 \neq e \in \mathscr{B}$, что $0 \neq e x_{i_0} = \sum_{t=1}^{l} e\delta_{i_t} x_{i_t}$, где $i_t \in I(J)$, $\delta_{i_t} \in L^0(\mathscr{B})$, $t = 1, \ldots, l$, что противоречит $L^0(\mathscr{B})$-линейной независимости набора $\{x_i\}_{i\in I}$. Таким образом, $I = I(J)$.

Так как γ — бесконечный кардинал, то $\mathrm{card}\, I(j) \leqslant \aleph_0 \leqslant \gamma$ для всех $j \in J$, где $\aleph_0$ — счетный кардинал. Из теоремы 24 ([1, гл. 3, § 6]) следует, что $\lambda = \mathrm{card}\, I = \mathrm{card}\, I(J) = \mathrm{card}\left(\bigcup_{j\in J} I(j)\right) \leqslant \mathrm{card}\ J = \gamma$.

Аналогично показывается, что $\mathrm{card}\, J \leqslant \mathrm{card}\, I$, и потому $\mathrm{card}\, I = \mathrm{card}\, J$, т. е. $\lambda = \gamma$. $\rhd$

Из теоремы 3.5, примененной к $eL^0(\mathscr{B})$-модулю eX, вытекает

Следствие 3.6. *Пусть λ и γ — бесконечные кардиналы и X — d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, являющийся одновременно λ-однородным и γ-однородным. Если в $\mathscr{B}$ существует такой ненулевой элемент e, что булева алгебра $\mathscr{B}_e$ имеет счетный тип, то $\lambda = \gamma$.*

Следствие 3.7. *Если $\mathscr{B}$ — мульти-σ-конечная булева алгебра, γ — бесконечный кардинал и X — γ-однородный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, то модуль X является строго γ-однородным.*

$\lhd$ Поскольку $eL^0(\mathscr{B})$-модуль eX является γ-однородным, где $0 \neq e \in \mathscr{B}$, то для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует $eL^0(\mathscr{B})$-независимый набор в eX, содержащий n элементов. Согласно лемме 3.3, $eL^0(\mathscr{B})$-модуль eX не является n-однородным для любого $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $0 \neq e \in \mathscr{B}$ и булева алгебра $e\mathscr{B}$ имеет счетный тип. Если eX — λ-однородный $eL^0(\mathscr{B})$-модуль для некоторого бесконечного кардинала λ, то, используя теорему 3.5, получим, что $\lambda = \gamma$, т. е. $\varkappa_X(e) = \gamma$.

Пусть теперь e — произвольный ненулевой элемент из $\mathscr{B}$. Поскольку булева алгебра $\mathscr{B}$ — мульти-σ-конечная, то существует такое $0 \neq g \in \mathscr{B}$, что $g \leqslant e$ и булева алгебра $g\mathscr{B}$ имеет счетный тип. Следовательно, $\gamma = \varkappa_X(g) \leqslant \varkappa_X(e) \leqslant \gamma$, т. е. $\varkappa_X(e) = \gamma$. $\rhd$

Приведем примеры γ-однородных $L^0(\mathscr{B})$-модулей для произвольного кардинала γ. Пусть $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра, I — некоторое множество индексов и $\operatorname{card} I = \gamma$. Прямое произведение

$$Y = \prod_{i\in I} L^0(\mathscr{B}) = \Big\{\hat{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i\in I} : \alpha_i \in L^0(\mathscr{B}),\ i \in I\Big\}$$

с покоординатными алгебраическими операциями есть точный d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль.

Для каждого $j \in I$ рассмотрим элемент $\hat{g}_j = \{g_i^{(j)}\}_{i\in I}$ из Y, где $g_i^{(j)} = 0$ при $i \neq j$ и $g_i^{(i)} = \mathbf{1}$, $i \in I$. Ясно, что система $\{\hat{g}_j\}_{j\in I}$ — $L^0(\mathscr{B})$-линейно независима, и поэтому $L^0(\mathscr{B})$-подмодуль $X = \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(\{\hat{g}_j\}_{j\in I}, L^0(\mathscr{B})))$ в Y является γ-однородным $L^0(\mathscr{B})$-модулем.

Следующая теорема устанавливает изоморфизм γ-однородных $L^0(\mathscr{B})$-модулей.

Теорема 3.8. *Если X и Y — γ-однородные $L^0(\mathscr{B})$-модули, то X и Y — изоморфны.*

$\lhd$ Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — $L^0(\mathscr{B})$-базис Гамеля в X, $\{y_i\}_{i\in I}$ — L^0-базис Гамеля в Y, $\operatorname{card} I = \gamma$, $X_0 = \operatorname{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0(\mathscr{B}))$, $Y_0 = \operatorname{Lin}(\{y_i\}_{i\in I}, L^0(\mathscr{B}))$. Любое $x \in X_0$, $y \in Y_0$ однозначно представимо в виде $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k}$, $y = \sum_{l=1}^m \beta_l y_{i_l}$ для некоторых $\alpha_k, \beta_l \in L^0(\mathscr{B})$, $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$, $n, m \in \mathbf{N}$. Отображение $U_0 : X_0 \to Y_0$, определяемое равенством $U_0\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{i_k}$ есть L^0-линейная биекция из X_0 на Y_0.

Для каждого $a \in X$ существуют такие набор $\{a_j\}_{j\in J} \subset X_0$ и разбиение единицы $\{e_j\}_{j\in J}$ в $\mathscr{B}$, что $e_j a = e_j a_j$ для всех $j \in J$. Согласно d-полноте $L^0(\mathscr{B})$-модуля Y, найдется единственное $b \in Y$, для которого $e_j b = e_j U_0(a_j)$ для всех $j \in J$. Положив $U(a) = b$, получим L^0-линейную биекцию из X на Y. $\rhd$

Из теорем 3.4 и 3.8 вытекает

Следствие 3.9. *Для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует единственный с точностью до изоморфизма строго n-однородный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, который изоморфен $(L^0(\mathscr{B}))^n$.*

Следующее утверждение дает возможность «склеивать» γ-однородные (строго γ-однородные) $L^0(\mathscr{B})$-модули.

Утверждение 3.10. *Пусть X — d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, $\{e_i\}_{i\in I}$ — набор попарно дизъюнктных ненулевых элементов из $\mathscr{B}$ и $e = \sup_{i\in I} e_i$. Если $e_i X$ — γ-однородный (соответственно, строго γ-однородный) $e_i L^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $i \in I$, то $eL^0(\mathscr{B})$-модуль eX также является γ-однородным (соответственно, строго γ-однородным).*

$\lhd$ Пусть $\{x_j^{(i)}\}_{j\in J}$ — L^0-базис Гамеля в $e_i X$, $\operatorname{card} J = \gamma$. Положим $x_j = \operatorname{mix}_{i\in I}(e_i x_j^{(i)})$, $j \in J$, где перемешивание берется в d-полном eL^0-модуле eX. Набор $\{x_j\}_{j\in J}$ является $eL^0(\mathscr{B})$-линейно независимым в eX и $eX = \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(\{x_j\}_{j\in J}, eL^0))$, т. е. eL^0-модуль eX является γ-однородным.

Предположим теперь, что $e_i X$ — строго γ-однородный $e_i L^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $i \in I$. Согласно доказанному выше, $eL^0(\mathscr{B})$-модуль X является γ-однородным. Если $0 \neq q \in \mathscr{B}_e$, то из равенства $e = \sup_{i\in I} e_i$ следует, что существует такое $i_0 \in I$, что

$p = qe_{i_0} \neq 0$. Так как $e_{i_0}L^0(\mathscr{B})$-модуль $e_{i_0}X$ строго γ-однороден, то $\varkappa(p) = \gamma$. Поэтому из неравенств $p \leqslant q \leqslant e$ следует, что $\gamma = \varkappa(p) \leqslant \varkappa(q) \leqslant \varkappa(e) \leqslant \gamma$, т. е. $\varkappa(q) = \gamma$. $\triangleright$

4. Классификация точных d-полных $L^0(\mathscr{B})$-модулей

Основной целью этого параграфа является представление любого точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля в виде прямого произведения строго однородных $L^0(\mathscr{B})$-модулей.

Теорема 4.1. *Для любого точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля X существует такой ненулевой идемпотент $e \in \mathscr{B}$, что eX есть строго однородный $eL^0(\mathscr{B})$-модуль.*

$\triangleleft$ Поскольку X — точный d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль, то существует такое $x_0 \in X$, что $s(x_0) = \mathbf{1}$ (утверждение 2.4 (i)). Если $X = \operatorname{mix}(\{x_0\})$, то X — строго 1-однородный модуль, и теорема 4.1 доказана.

Предположим, что $X \neq \operatorname{mix}(\{x_0\})$ и рассмотрим семейство

$$\mathscr{E} = \{A \subset X : A - L^0\text{-линейно независимое множество}, \ x_0 \in A\}$$

с частичным порядком по включению. Согласно лемме Цорна, в $\mathscr{E}$ существует максимальный элемент D. Если D — L^0-базис Гамеля в X, то X — $(\operatorname{card} D)$-однородный $L^0(\mathscr{B})$-модуль.

Если $X \neq \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B})))$, то найдется ненулевое $e \in \mathscr{B}$, для которого выполняется следующее условие:

(1) Если $0 \neq g \in \mathscr{B}_e$, то $g \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(D, L^0)) \neq gX$.

Обозначим через $\mathscr{P}$ множество всех тех $0 \neq e \in \mathscr{B}$, для которых верно свойство (1) и положим $e_0 = \sup \mathscr{P}$. Покажем, что случай $e_0 = \mathbf{1}$ невозможен. Если $e_0 = \mathbf{1}$, то для каждого ненулевого $p \in \mathscr{B}$ верно неравенство $pX \neq p \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B})))$. В этом случае, для любого $0 \neq p \in \mathscr{B}$ найдется такой ненулевой идемпотент $q \leqslant p$, что для любого $0 \neq g \in \mathscr{B}_q$ существует $0 \neq x_g \in gX$, обладающее следующими свойствами: $s(x_g) = g$ и $rx_g \notin \operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B}))$ для всех $0 \neq r \in \mathscr{B}_g$.

Используя теорему 2.1, выберем разбиение $\{g_j\}_{j \in J}$ идемпотента q и набор $\{x_{g_j}\}_{j \in J}$ из qX, для которых $x_{g_j} \in g_jX$, $s(x_{g_j}) = g_j$, $rx_{g_j} \notin \operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B}))$ при всех $0 \neq r \in \mathscr{B}_{g_i}$. Поскольку qX — d-полный $qL^0(\mathscr{B})$-модуль, то существует такое $x \in qX$, что $g_jx = x_{g_j}$, в частности, $s(x) = q$, при этом, $rx \notin \operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B}))$ для всех $0 \neq r \in \mathscr{B}_q$.

Снова используя теорему 2.1, выберем разбиение $\{q_l\}_{l \in L}$ единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ и набор $\{x_l\}_{l \in L}$ из X, для которых $s(x_l) = q_l$ и $rx_l \notin \operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B}))$ при всех $0 \neq r \in \mathscr{B}_{q_l}$. В силу d-полноты $L^0(\mathscr{B})$-модуля X существует такое $\hat{x} \in X$, что $q_l\hat{x} = x_l$ для всех $l \in L$. Ясно, что $s(\hat{x}) = \mathbf{1}$ и $r\hat{x} \notin \operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B}))$ для любого $0 \neq r \in \mathscr{B}$. Это означает, что семейство $D \cup \{\hat{x}\}$ — $L^0(\mathscr{B})$-линейно независимо, что противоречит максимальности набора D. Следовательно, случай $e_0 = \mathbf{1}$ невозможен, т. е. $e = \mathbf{1} - e_0 \neq 0$. Согласно построению идемпотента e_0, каждое $0 \neq r \in \mathscr{B}_e$ не обладает свойством (1), т. е. найдется такой ненулевой идемпотент $p_r \leqslant r$, что $p_r \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B}))) = p_rX$. Из утверждения 2.4 (ii) следует, что $eX = \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(eD, L^0(\mathscr{B}))) = e \operatorname{mix}(\operatorname{Lin}(D, L^0(\mathscr{B})))$, т. е. eX есть γ-однородный $eL^0(\mathscr{B})$-модуль для $\gamma = \operatorname{card}(eD)$.

Пусть γ_e есть наименьший кардинал во множестве кардиналов $\{\varkappa(p) : 0 \neq p \leqslant e\}$, т.е. $\gamma_e = \varkappa(p)$ для некоторого ненулевого $p \leqslant e$. Из выбора идемпотента p следует, что $\gamma_e = \varkappa(p) = \varkappa(q)$ для всех $0 \neq q \in \mathscr{B}_p$. Это означает, что $pL^0(\mathscr{B})$-модуль pX является строго γ_e-однородным. $\triangleright$

Следующая теорема дает разложение точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля в прямое произведение строго однородных $L^0(\mathscr{B})$-модулей.

Теорема 4.2. *Для каждого точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля X существуют такие набор попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов $\{e_i\}_{i\in I}$ и набор попарно различных кардиналов $\{\gamma_i\}_{i\in I}$, что $\sup_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$ и e_iX есть строго γ_i-однородный $e_iL^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $i \in I$. При этом, $L^0(\mathscr{B})$-модули X и $\prod_{i\in I} e_iX$ являются изоморфными, а наборы $\{e_i\}_{i\in I}$ и $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ определяются однозначно.*

$\lhd$ Согласно теореме 4.1 для каждого ненулевого идемпотента $e \in \mathscr{B}$ существует такой ненулевой идемпотент $g \leqslant e$, что gX есть строго γ_g-однородный gL^0-модуль. Используя теорему 2.1, выберем такой набор $\{q_j\}_{j\in J}$ попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов, что $\sup_{j\in J} q_j = \mathbf{1}$ и q_jX есть строго λ_j-однородный $q_jL^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $j \in J$. Разделим множество кардинальных чисел $A = \{\lambda_j\}_{j\in J}$ на непересекающиеся подмножества A_i, каждое их которых содержит все равные между собой кардинальные числа из A, и обозначим элемент из A_i через γ_i. Согласно утверждению 3.10, для $e_i = \sup\{q_j : \lambda_j \in A_i\}$ имеем, что $e_iL^0(\mathscr{B})$-модуль e_iX является строго γ_i-однородным. Кроме того, в силу утверждения 2.5 (ii), $L^0(\mathscr{B})$-модули X и $\prod_{i\in I} e_iX$ являются изоморфными.

Предположим, что имеются другие наборы попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов $\{p_j\}_{j\in J}$ и попарно различных кардинальных чисел $\{\mu_j\}_{j\in J}$, для которых $\sup_{j\in J} p_j = \mathbf{1}$ и p_jX есть строго μ_j-однородный $p_jL^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $j \in J$. Если имеется два различных индекса $i_1, i_2 \in I$, для которых $e_{i_1}p_j \neq 0$ и $e_{i_2}p_j \neq 0$, то

$$\mu_j = \varkappa(p_j) = \varkappa(e_{i_1}p_j) = \varkappa(e_{i_1}) = \gamma_{i_1} \neq \gamma_{i_2} = \varkappa(e_{i_2}) = \varkappa(e_{i_2}p_j) = \mu_j.$$

Следовательно, $e_ip_j = 0$ для всех $i \in I$, кроме одного индекса, который мы обозначим через $i(j)$. Ясно, что $p_j \leqslant e_{i(j)}$ и $\mu_j = \gamma_{i(j)}$. Если $p_j \neq e_{i(j)}$, то найдется такой индекс $j_1 \neq j$, $j_1 \in J$, что $e_{i(j)}p_{j_1} \neq 0$. Следовательно, $\mu_j = \gamma_{i(j)} = \mu_{j_1}$, что неверно. Таким образом, $p_j = e_{i(j)}$ и $\mu_j = \gamma_{i(j)}$. Аналогично, для каждого $i \in I$ существует единственный индекс $j(i)$ такой, что $e_i = p_{j(i)}$ и $\gamma_i = \mu_{j(i)}$. $\rhd$

Разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ и набор кардинальных чисел $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ из теоремы 4.2 будем называть паспортом для точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля X и обозначать через $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)}$.

Теорема 4.3. *Точные d-полные $L^0(\mathscr{B})$-модули X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$.*

$\lhd$ Пусть $\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)} = \Gamma(X) = \Gamma(Y) = \{(e_i(Y), \gamma_i(Y))\}_{i\in I(Y)}$, т. е. $I(X) = I(Y) := I$, $e_i(X) = e_i(Y) := e_i$ и $\gamma_i(X) = \gamma_i(Y) := \gamma_i$ для всех $i \in I$. Согласно теореме 4.2 существует изоморфизм U из $L^0(\mathscr{B})$-модуля X на $L^0(\mathscr{B})$-модуль $\prod_{i\in I} e_iX$ и изоморфизм V из $L^0(\mathscr{B})$-модуля Y на $L^0(\mathscr{B})$-модуль $\prod_{i\in I} e_iY$, где $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I}$, $V(y) = \{e_iy\}_{i\in I}$, при этом e_iX (соответственно, e_iY) — строго γ_i-однородный $e_iL^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $i \in I$. В силу теоремы 3.8, существует изоморфизм U_i из $e_iL^0(\mathscr{B})$-модуля e_iX на $e_iL^0(\mathscr{B})$-модуль e_iY. Задавая отображение $\Phi : X \to Y$, с помощью равенства $\Phi(x) = V^{-1}(\{U_i(e_ix)\}_{i\in I})$, получим, что Φ есть изоморфизм из X на Y.

Обратно, если Ψ — изоморфизм из X на Y и $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)}$ — паспорт для точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля X, то, положив $Y_i = U(e_i(X)X) = e_i(X)U(X) = e_i(X)Y$ получим, что $\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I}$ является паспортом для точного d-полного $L^0(\mathscr{B})$-модуля Y. $\rhd$

Дадим приложение теоремы 4.2 к описанию точных конечномерных и σ-конечномерных d-полных модулей.

Точный d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль X назовем конечномерным (σ-конечномерным), если существуют такие разбиение $\{e_i\}_{i=1}^{\gamma}$ единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ и набор $\{n_i\}_{i=1}^{\gamma}$ натуральных чисел, $\gamma \in \mathbf{N}$ (соответственно, $\gamma = \infty$), что $n_i < n_{i+1}$ и $e_i X$ есть n_i-однородный $e_i L^0(\mathscr{B})$-модуль для всех $i = 1, \ldots, \gamma - 1$ (соответственно, $i = 1, 2, \ldots$). Другими словами, конечномерный (σ-конечномерный) $L^0(\mathscr{B})$-модуль есть точный d-полный $L^0(\mathscr{B})$-модуль X, паспорт которого имеет вид $\Gamma(X) = \{(e_i(X), n_i(X))\}_{i=1}^{\gamma}$, где $n_i(X) \in \mathbf{N}$.

Из теоремы 4.2 и следствия 3.9 вытекает следующее описание всех конечномерных и σ-конечномерных $L^0(\mathscr{B})$-модулей.

Теорема 4.4. *Если X — конечномерный (σ-конечномерный) $L^0(\mathscr{B})$-модуль, то существуют такие однозначно определенные разбиение $\{e_i\}_{i=1}^{\gamma}$ единицы булевой алгебры $\mathscr{B}$ и строго возрастающий набор $\{n_i\}_{i=1}^{\gamma}$ натуральных чисел, $\gamma \in \mathbf{N}$ (соответственно, $\gamma = \infty$), для которых $L^0(\mathscr{B})$-модуль X — изоморфен $L^0(\mathscr{B})$-модулю $\prod_{i=1}^{\gamma} e_i(L^0(\mathscr{B}))^{n_i}$.*

Литература

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.—М.: Наука, 1977.—368 с.
2. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—319 с.
3. *Каримов Ж. А.* Модули Капланского — Гильберта над алгеброй измеримых функций // Узб. мат. журн.—2010.—№ 4.—С. 74–81.
4. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.—М.: Наука, 1975.—432 с.
5. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
6. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—620 с.
7. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Тр. ин-та математики НАН Украины.—2007.—Т. 69.—307 с.
8. *Чилин В. И.* Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики: Новейшие направления.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.
9. *Kaplansky J.* Projections in Banach algebras // Ann. Math.—1951.—Vol. 53.—P. 235–249.
10. *Kaplansky J.* Algebras of type I // Ann. Math.—1952.—Vol. 56.—P. 450–472.
11. *Kaplansky J.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—Vol. 75, № 4.—P. 839–858.

Статья поступила 27 ноября 2012 г.

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана
профессор кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz;

Каримов Жасурбек Алишерович
Национальный университет Узбекистана
ассистент кафедры математического анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: karimovja@mail.ru

LATERALLY COMPLETE $C_\infty(Q)$-MODULES

Chilin V. I., Karimov J. A.

Let X be a regular laterally complete $C_\infty(Q)$-module and $\mathscr{B}$ be a Boolean algebra whose Stone space is Q. We introduce the passport $\Gamma(X)$ for X consisting of uniquely defined partition of unity in $\mathscr{B}$ and set of pairwise different cardinal numbers. It is proved that $C_\infty(Q)$-modules X and Y are isomorphic if and only if $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$.

Key words: Hamel $C_\infty(Q)$-basis, homogeneous module, σ-finite dimensional module.