Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 30–43

УДК **517.95**

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я. Т. Мегралиев

В работе исследована одна обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием первого рода. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Введение

Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики. В последнее время обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2, 3], В. К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А. М. Денисова [5].

В работах [6–9] исследовались обратные краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в прямоугольной области.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием переопределения.

Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений были исследованы в работах [10–12].

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,T) = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{3}$$

и с дополнительным интегральным условием

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,dx = h(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{4}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

Определение. Классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) все условия (1)–(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Для исследования задачи (1)–(4) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{5}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(T) = 0, \tag{6}$$

где $a(t) \in C[0,T]$ — заданная функция, а $y = y(t)$ — искомая функция, причем под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Лемма 1 [8]. *Пусть функция $a(t) \in C[0,T]$ такая, что*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \leqslant R = \mathrm{const}.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}T^2R < 1.$$

Тогда задача (5), (6) *имеет только тривиальное решение.*

Наряду с обратной краевой задачей (1)–(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^2(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$ из соотношений (1)–(3),

$$h''(t) + u_x(1,t) = a(t)h(t) + \int\limits_0^1 f(x,t)\,dx \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{7}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x,t)\,dx = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и выполняются условия согласования*

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx = h(0), \quad \int\limits_0^1 \psi(x)\,dx = h'(T). \tag{8}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Каждое классическое решение* $\{u(x,t), a(t)\}$ *задачи* (1)–(4) *является и решением задачи* (1)–(3), (7).

2. *Каждое решение* $\{u(x,t), a(t)\}$ *задачи* (1)–(3), (7) *такое, что*

$$\frac{1}{2}T^2 \left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} < 1, \tag{9}$$

является классическим решением (1)–(4).

$\lhd$ Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)–(4). Из (4) видно, что

$$\int\limits_0^1 u_t(x,t)dx = h'(t), \quad \int\limits_0^1 u_{tt}(x,t)\,dx = h''(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{10}$$

Проинтегрировав уравнение (1) по x от 0 до 1 и учитывая условия (3), имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^1 u(x,t)dx + u_x(1,t) = a(t)\int\limits_0^1 u(x,t)dx + \int\limits_0^1 f(x,t)dx \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{11}$$

Отсюда с учетом (4) и (10) приходим к выполнению (7).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (7), причем выполнено условие (9). Тогда из (7) и (11) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int\limits_0^1 u(x,t)\,dx - h(t)\right) = a(t)\left(\int\limits_0^1 u(x,t)\,dx - h(t)\right) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{12}$$

Далее в силу (2) и условий согласования (8) имеем:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 u(x,t)\,dx - h(0) = \int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx - h(0) = 0, \\ \int\limits_0^1 u_t(x,T)\,dx - h'(T) = \int\limits_0^1 \psi(x)\,dx - h'(T) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Из (12) и (13) в силу леммы 1 заключаем, что выполняется условие (4). $\rhd$

2. Сведения из теории спектральных задач и определение некоторых пространств

Известно [13], что последовательности функции

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k-1}(x) = \cos\lambda_k x, \quad X_{2k}(x) = x\sin\lambda_k x \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

$$Y_0(x) = 2\,(1-x)\,, \quad Y_{2k-1}(x) = 4\,(1-x)\cos\lambda_k x, \quad Y_{2k}(x) = 4\sin\lambda_k x \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

образуют биортогональную систему, и система (14) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда произвольная функция $g\,(x) \in L_2\,(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд:

$$g(x) = g_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} X_{2k}(x),$$

где коэффициенты g_0, g_{2k-1}, g_{2k} вычисляются по формулам

$$g_0 = \int_0^1 g\left(x\right) Y_0\left(x\right)\,dx, \quad g_{2k-1} = \int_0^1 g\left(x\right) Y_{2k-1}\left(x\right)\,dx, \quad g_{2k} = \int_0^1 g\left(x\right) Y_{2k}\left(x\right)\,dx.$$

Из (15) имеем:

$$Y_0'\left(x\right) = -2, \quad Y_{2k-1}'\left(x\right) = -4\lambda_k\left(1-x\right)\sin\lambda_k x - 4\cos\lambda_k x, \quad Y_{2k}'\left(x\right) = 4\lambda_k\cos\lambda_k x,$$

$$Y_0^{(2i)}\left(x\right) = 0, \quad Y_{2k}^{(2i)}\left(x\right) = \left(-1\right)^i\lambda_k^{2i}Y_{2k}\left(x\right),$$

$$Y_{2k-1}^{(2i)}\left(x\right) = \left(-1\right)^i\lambda_k^{2i}Y_{2k-1}\left(x\right) + 2i\left(-1\right)^{i+1}\lambda_k^{2i-1}Y_{2k}\left(x\right) \quad \left(i \geqslant 0,\ k = 1,2,\ldots\right). \tag{16}$$

Отсюда получаем

$$Y_k^{(2i+1)}\left(0\right) = Y_k^{(2i+1)}\left(1\right), \quad Y_k^{(2i)}\left(1\right) = 0 \quad \left(k = 1,2,\ldots\right). \tag{17}$$

Теперь предположим, что

$$g\left(x\right) \in C^{2i-1}\left[0,1\right], \quad g^{(2i)}\left(x\right) \in L_2(0,1),$$

$$g^{(2s)}\left(0\right) = g^{(2s)}\left(1\right), \quad g^{(2s+1)}\left(0\right) = 0 \quad \left(s = \overline{0, i-1}\right). \tag{18}$$

Далее с учетом (17) и (18), интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^1 g^{(2i)}\left(x\right) Y_k\left(x\right)\,dx = \int_0^1 g\left(x\right) Y_k^{(2i)}\left(x\right)\,dx \quad \left(k = 1,2,\ldots\right). \tag{19}$$

Из (16) имеем:

$$Y_{2k}(x) = \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\,Y_{2k}^{(2i)}(x),$$

$$\begin{aligned} Y_{2k-1}(x) &= \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\left\{Y_{2k-1}^{(2i)}(x) + 2i(-1)^i\lambda_k^{2i-1}Y_{2k}(x)\right\} \\ &= \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}Y_{2k-1}^{(2i)}(x) + 2i\frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}}Y_{2k}^{(2i)}(x) \quad \left(i \geqslant 1,\ k = 1,2,\ldots\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда с учетом (19) и (20) находим:

$$\begin{aligned} g_{2k} &= \int_0^1 g(x)Y_{2k}(x)\,dx = \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int_0^1 g(x)Y_{2k}^{(2i)}(x)\,dx \\ &= \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int_0^1 g^{(2i)}(x)Y_{2k}(x)\,dx = \frac{4(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int_0^1 g^{(2i)}(x)\sin\lambda_k x\,dx, \end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
g_{2k-1} &= \int\limits_0^1 g(x)Y_{2k-1}(x)\,dx \\
&= \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int\limits_0^1 g(x)Y_{2k-1}^{(2i)}(x)\,dx + \frac{2i(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1 g(x)Y_{2k}^{(2i)}(x)\,dx \\
&= \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)Y_{2k-1}(x)\,dx + \frac{2i(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)Y_{2k}(x)\,dx \\
&= \frac{4(-1)^i}{\lambda_k^{i}}\int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)\,(1-x)\cos\lambda_k x\,dx + \frac{8i(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)\sin\lambda_k x\,dx \\
&= \frac{4(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)\,(1-x)\cos\lambda_k x\,dx - \frac{8i(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int\limits_0^1 g^{(2i-1)}(x)\cos\lambda_k x\,dx \\
&= \frac{4(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int\limits_0^1 \Big(g^{(2i)}(x)\,(1-x) - 2ig^{(2i-1)}(x)\Big)\cos\lambda_k x\,dx.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Отсюда имеем

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{2i}g_{2k}\right)^2 = 8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)\sqrt{2}\sin\lambda_k x\,dx\right)^2 \leqslant 8\left\|g^{(2i)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2, \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{2i}g_{2k-1}\right)^2 &= 8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 \Big(g^{(2i)}(x)\,(1-x) - 2ig^{(2i-1)}(x)\Big)\sqrt{2}\cos\lambda_k x\,dx\right)^2 \\
&\leqslant 8\left\|g^{(2i)}(x)\,(1-x) - 2ig^{(2i-1)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Далее, пусть

$$
g(x)\in C^{2i}[0,1], \quad g^{(2i+1)}(x)\in L_2(0,1),
$$

$$
g^{(2s-1)}(0)=0, \quad g^{(2s)}(0)=g^{(2s)}(1) \quad (i\geqslant 1,\ s=0,1,\ldots,i).
$$

Тогда из (21) и (22), соответственно, получаем:

$$
g_{2k} = \int\limits_0^1 g(x)Y_{2k}(x)\,dx = \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1 g^{(2i+1)}(x)\cos\lambda_k x\,dx,
$$

$$
\begin{aligned}
g_{2k-1} &= \int\limits_0^1 g(x)Y_{2k-1}(x)\,dx \\
&= \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1 g^{(2i+1)}(x)\,(1-x) - (2i+1)g^{(2i)}(x)\sin\lambda_k x\,dx.
\end{aligned}
$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{2i+1}g_{2k}\right)^2=8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 g^{(2i+1)}(x)\sqrt{2}\cos\lambda_k x\,dx\right)^2\leqslant 8\left\|g^{(2i+1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{2i+1}g_{2k-1}\right)^2&=8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1\left(g^{(2i+1)}(x)\,(1-x)-(2i+1)g^{(2i)}(x)\right)\sqrt{2}\cos\lambda_k x\,dx\right)^2\\&\leqslant 8\left\|g^{(2i+1)}(x)\,(1-x)-(2i+1)g^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}\quad(i\geqslant 1).\end{aligned} \tag{26}$$

Теперь рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B^{\alpha}_{2,T}$ совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\,\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12}<\infty,$$

причем $\alpha\geqslant 0$ — фиксированное число.

В этом множестве операции сложения и умножения на числа (действительные) определим обычным образом; под нулевым элементом этого множества будем понимать функцию $u(x,t)\equiv 0$ на D_T, а норму в этом множестве определим формулой

$$\|u(x,t)\|_{B^{\alpha}_{2,T}}=J_T(u).$$

По схеме [9] докажем, что все эти пространства банаховы. Действительно, справедливость первых двух аксиом нормы очевидна, а справедливость третьей аксиомы нормы легко устанавливается с помощью сумматорного неравенства Минковского; следовательно, $B^{\alpha}_{2,T}$ является линейным нормированным пространством. Докажем его полноту. Пусть

$$u_n(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,n}(t)X_k(x)\quad(n=1,2,\ldots)$$

— произвольная последовательность фундаментальная в $B^{\alpha}_{2,T}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что

$$\begin{aligned}&\|u_n(x,t)-u_m(x,t)\|_{B^{\alpha}_{2,T}}\\&=\|u_{0,n}(t)-u_{0,m}(t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\,\|u_{2k-1,n}(t)-u_{2k-1,m}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12}\\&+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\,\|u_{2k,n}(t)-u_{2k,m}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12}<\varepsilon\quad(\forall\,n,m\geqslant n_\varepsilon).\end{aligned} \tag{27}$$

Следовательно, при любом фиксированном k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\|u_{0,n}(t) - u_{0,m}(t)\|_{C[0,T]} < \varepsilon,$$

$$\|u_{2k-1,n}(t) - u_{2k-1,m}(t)\|_{C[0,T]} < \varepsilon,$$

$$\|u_{2k,n}(t) - u_{2k,m}(t)\|_{C[0,T]} < \varepsilon \quad (\forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon).$$

А это означает, что последовательность $\{u_{0,n}(t)\}_{n-1}^{\infty}$ и при любом фиксированном k $(k = 1, 2, \ldots)$ последовательности $\{u_{2k-1,n}(t)\}_{n-1}^{\infty}$, $\{u_{2k,n}(t)\}_{n-1}^{\infty}$ фундаментальны в $C[0,T]$ и, следовательно, в силу полноты $C[0,T]$, сходятся в пространстве $C[0,T]$:

$$\begin{gathered} u_{0,n}(t) \overset{C[0,T]}{\longrightarrow} u_{0,0}(t) \in C[0,T], \quad n \to \infty, \\ u_{2k-1,n}(t) \overset{C[0,T]}{\longrightarrow} u_{2k-1,0}(t) \in C[0,T], \quad n \to \infty, \\ u_{2k,n}(t) \overset{C[0,T]}{\longrightarrow} u_{2k,0}(t) \in C[0,T], \quad n \to \infty. \end{gathered} \tag{28}$$

Далее в силу (27) для любого фиксированного номера N:

$$\begin{gathered} \|u_{0,n}(t) - u_{0,m}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^\alpha \left\| u_{2k-1,n}(t) - u_{2k-1,m}(t) \right\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{2k,n}(t) - u_{2k,m}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad (\forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon). \end{gathered} \tag{29}$$

Пользуясь соотношениями (28) и переходя к пределу при $m \to \infty$ в (29), получаем

$$\begin{gathered} \|u_{0,n}(t) - u_{0,0}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^\alpha \left\| u_{2k-1,n}(t) - u_{2k-1,0}(t) \right\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{2k,n}(t) - u_{2k,0}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall\, n \geqslant n_\varepsilon). \end{gathered} \tag{30}$$

Отсюда, в силу произвольности N (или, что одно и тоже, переходя к пределу при $N \to \infty$), получаем:

$$\begin{gathered} \|u_{0,n}(t) - u_{0,0}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \left\| u_{2k-1,n}(t) - u_{2k-1,0}(t) \right\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{2k,n}(t) - u_{2k,0}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall\, n \geqslant n_\varepsilon). \end{gathered} \tag{31}$$

Примем обозначение

$$u_0(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,0}(t) X_k(x).$$

Так как $u_0(x,t) = [u_0(x,t) - u_{n_\varepsilon}(x,t)] + u_{n_\varepsilon}(x,t)$ и в силу (31) $u_0(x,t) - u_{n_\varepsilon}(x,t) \in \in B_{2,T}^\alpha$, а также $u_{n_\varepsilon}(x,t) \in B_{2,T}^\alpha$, то получаем, что

$$u_0(x,t) \in B_{2,T}^\alpha.$$

Таким образом, в силу (31) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что

$$\|u_n(x,t) - u_0(x,t)\|_{B^\alpha_{2,T}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall\, n \geqslant n_\varepsilon).$$

А это означает, что последовательность $u_n(x,t)$ сходится в $B^\alpha_{2,T}$ к элементу $u_0(x,t) \in B^\alpha_{2,T}$. Этим полнота и, следовательно, банаховость пространства $B^\alpha_{2,T}$ доказана.

2. Через E^α_T обозначим пространство $B^\alpha_{2,T} \times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t) = \{u(x,t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E^\alpha_T} = \|u(x,t)\|_{B^\alpha_{2,T}} + \|a(t)\|_{C[0,T]}\,.$$

Очевидно, что E^α_T является банаховым пространством.

3. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Так как система (14) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, то каждое решение задачи (1)–(3), (7) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{34}$$

где

$$u_k(t) = \int\limits_0^1 u(x,t) Y_k(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{35}$$

причем $X_k(x)$ и $Y_k(x)$ определены соотношениями (14) и (15) соответственно.

Применяя метод разделения переменных для определения искомых функций $u_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, из (1) и (2) имеем

$$u_0''(t) = a(t) u_0(t) + f_0(t), \tag{36}$$

$$u_{2k}''(t) - \lambda_k^2 u_{2k}(t) = a(t) u_{2k}(t) + f_{2k}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{37}$$

$$u_{2k-1}''(t) - \lambda_k^2 u_{2k-1}(t) = a(t) u_{2k-1}(t) + f_{2k-1}(t) - 2\lambda_k u_{2k}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{38}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(T) = \psi_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{39}$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)\, u_k(t), \quad f_k(t) = \int\limits_0^1 f(x,t) Y_k(x)\, dx,$$

$$\varphi_k = \int\limits_0^1 \varphi(x) Y_k(x)\, dx, \quad \psi_k = \int\limits_0^1 \psi(x) Y_k(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Решая задачу (36)–(39), находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int\limits_0^T G_0(t,\tau) F_0(\tau; u, a)\, d\tau, \tag{40}$$

$$u_{2k}(t)=\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\,\varphi_{2k}+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\,\psi_{2k}$$
$$+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)\,F_{2k}(\tau;u,a)\,d\tau \quad (k=1,2,\ldots), \tag{41}$$

$$u_{2k-1}(t)=\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\,\varphi_{2k-1}+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\,\psi_{2k-1}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a)\,d\tau$$
$$+\frac{1}{ch^2(\lambda_k T)}\Bigg\{\Big[Tsh(\lambda_k t)+tch(\lambda_k T)sh(\lambda_k(T-t))\Big]\varphi_{2k}+\Big[Tsh(\lambda_k T)sh(\lambda_k t)$$
$$-tch(\lambda_k T)ch(\lambda_k t)+\frac{1}{2\lambda_k}ch(\lambda_k T)sh(\lambda_k t)\Big]\frac{1}{\lambda_k}\psi_{2k}\Bigg\} \tag{42}$$
$$-2\lambda_k\int\limits_0^T G_k(t,\tau)\left(\int\limits_0^T G_k(\tau,\xi)F_{2k}(\xi;u,a)\,d\xi\right)d\tau \quad (k=1,2,\ldots),$$

где

$$G_0(t,\tau)=\begin{cases}-t, t\in[0,\tau],\\ -\tau, t\in[\tau,T],\end{cases}$$

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}\frac{-1}{2\lambda_k ch(\lambda_k T)}\Big[sh\big(\lambda_k\big(T+t-\tau\big)\big)-sh\big(\lambda_k\big(T-(t+\tau)\big)\big)\Big], & t\in[0,\tau],\\ \frac{1}{2\lambda_k ch(\lambda_k T)}\Big[sh(\lambda_k(T-(t+\tau)))-sh(\lambda_k(T-(t-\tau)))\Big], & t\in[\tau,T].\end{cases}$$

После подстановки выражений из (40)–(42) в (34), для определения компоненты $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(4), (7), получаем

$$u(x,t)=\varphi_0+t\psi_0+\int\limits_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a)\,d\tau$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\,\varphi_{2k}+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\,\psi_{2k}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a)\,d\tau\Bigg]X_{2k}(x)$$
$$+\Bigg[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\,\varphi_{2k-1}+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\,\psi_{2k-1}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a)\,d\tau$$
$$+\frac{1}{ch^2(\lambda_k T)}\Bigg\{\Big[Tsh(\lambda_k t)+tch(\lambda_k T)sh\big(\lambda_k(T-t)\big)\Big]\varphi_{2k}+\Big[Tsh(\lambda_k T)sh(\lambda_k t) \tag{43}$$
$$-tch(\lambda_k T)ch(\lambda_k t)+\frac{1}{2\lambda_k}ch(\lambda_k T)sh(\lambda_k t)\Big]\frac{1}{\lambda_k}\,\psi_{2k}\Bigg\}$$
$$-2\lambda_k\int\limits_0^T G_k(t,\tau)\left(\int\limits_0^T G_k(\tau,\xi)F_{2k}(\xi;u,a)\,d\xi\right)d\tau\Bigg]X_{2k-1}(x)\Bigg\}.$$

Теперь из (7), с учетом (34), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - \int\limits_0^1 f(x,t)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_{2k}(t)\right\}. \tag{44}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (7), подставим выражение (41) в (44):

$$\begin{gathered} a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - \int\limits_0^1 f(x,t)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[\frac{ch\big(\lambda_k(T-t)\big)}{ch(\lambda_k T)}\,\varphi_{2k}\right.\right. \\ \left.\left. + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\,\psi_{2k} + \int\limits_0^T G_k(t,\tau) F_{2k}(\tau; u, a)\,d\tau\right]\right\}. \end{gathered} \tag{45}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (7) свелось к решению системы (43), (45) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)–(3), (7) важную роль играет следующая

Лемма 3. *Если* $\{u(x,t), a(t)\}$ *— любое решение задачи* (1)–(3), (7), *то функции* $u_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *определенные соотношением* (35), *удовлетворяют на* $[0, T]$ *счетной системе* (40)–(42).

$\lhd$ Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ — любое решение (1)–(3), (7). Тогда, умножая обе части уравнения (1) на функцию на $Y_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$\int\limits_0^1 u_{tt}(x,t) Y_k(x)\,dx = \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^1 u(x,t) Y_k(x)\,dx = u_k''(t),$$

$$\int\limits_0^1 u(x,t) Y_0''(x)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_0^1 u(x,t) Y_{2k}''(x)\,dx = -\int\limits_0^1 u(x,t)\lambda_k^2 Y_{2k}(x)\,dx = -\lambda_k^2 u_{2k}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\begin{gathered} \int\limits_0^1 u(x,t) Y_{2k-1}''(x)\,dx = -\lambda_k^2 \int\limits_0^1 u(x,t) Y_{2k-1}(x)\,dx \\ +2\lambda_k \int\limits_0^1 u(x,t) Y_{2k}(x)\,dx = -\lambda_k^2 u_{2k-1}(t) + 2\lambda_k u_{2k}(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \end{gathered}$$

получаем, что удовлетворяются (36)–(38).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (39).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ является решением задачи (36)–(39). Отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ удовлетворяют системе (40)–(42). $\rhd$

Замечание. Из леммы 3 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)–(3), (7) достаточно доказать единственность решения системы (43), (45).

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\Big\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\Big\},$$

где $\Phi_1(u,a)=\tilde u(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde u_k(t)X_k(x)$, $\Phi_2(u,a)=\tilde a(t)$, а $\tilde u_0(t)$, $\tilde u_{2k}(t)$, $\tilde u_{2k-1}(t)$ $(k=1,2,\dots)$ и $\tilde a(t)$ равны соответственно правым частям (40)–(42) и (45).

Нетрудно видеть, что

$$\frac{sh(\lambda_k t)}{ch(\lambda_k T)}<1\ \ (0\leqslant t\leqslant T),\qquad \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant t\leqslant T),$$
$$\frac{ch(\lambda_k t)}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant t\leqslant T),\qquad \frac{sh(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant t\leqslant\tau\leqslant T),$$
$$\frac{sh(\lambda_k(T+t-\tau))}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant t\leqslant\tau\leqslant T),\qquad \frac{sh(\lambda_k(T-(t+\tau)))}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant t\leqslant\tau\leqslant T),$$
$$\frac{sh(\lambda_k(T-(t+\tau)))}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant T),\qquad \frac{sh(\lambda_k(T-(t-\tau)))}{ch(\lambda_k T)}\leqslant 1\ \ (0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant T).$$

Учитывая эти соотношения, оцениваем:

$$\|\tilde u_0(t)\|_{C[0,T]}\leqslant|\varphi_0|+T|\psi_0|$$
$$+2T\sqrt{T}\left(\int_0^t|f_0(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12}+2T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_0(t)\|_{C[0,T]},\tag{46}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3\|\tilde u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\Big)^2\right)^{\frac12}\leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3|\varphi_{2k}|\Big)^2\right)^{\frac12}+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^2|\psi_{2k}|\Big)^2\right)^{\frac12}$$
$$+2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^2|f_{2k}(\tau)|\Big)^2d\tau\right)^{\frac12}+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\Big)^2\right),\tag{47}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3\|\tilde u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\Big)^2\right)^{\frac12}\leqslant 2\sqrt2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3|\varphi_{2k-1}|\Big)^2\right)^{\frac12}$$
$$+2\sqrt2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^2|\psi_{2_{2k-1}}|\Big)^2\right)^{\frac12}+2\sqrt{2T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^2|f_{2k-1}(\tau)|\Big)^2d\tau\right)^{\frac12}$$
$$+2\sqrt2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\Big)^2\right)^{\frac12}+2\sqrt2T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3|\varphi_{2k}|\Big)^2\right)^{\frac12}\tag{48}$$
$$+2\sqrt2(1+2T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^2|\psi_{2k}|\Big)^2\right)^{\frac12}+4\sqrt{2T}T\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^2|f_{2k}(\tau)|\Big)^2d\tau\right)^{\frac12}$$
$$+4\sqrt2T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\Big)^2\right)^{\frac12},$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h''(t) - \int\limits_0^1 f(x,t)\,dx \right\|_{C[0,T]} \right.$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \left| \varphi_{2k} \right| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^2 \left| \psi_{2k} \right| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \tag{49}$$
$$\left.\left. + \sqrt{T} \left(\int\limits_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^2 \left| f_{2k}(\tau) \right| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \left\| u_{2k}(t) \right\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:
1. $\varphi(x) \in W_2^3(0,1)$, $\varphi(1) = \varphi(0)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi'(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in W_2^2(0,1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = 0$.
3. $f(x,t)$, $f_x(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f(0,t) = f(1,t)$, $f_x(0,t) = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.
4. $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Тогда из (46)–(49) получаем

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leqslant A_1(T) + B_1(T) \left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} \left\| u(x,t) \right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{50}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant A_2(T) + B_2(T) \left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} \left\| u(x,t) \right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{51}$$

где

$$A_1(T) = 2\left\|\varphi(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2T\left\|\psi(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 4T\sqrt{T}\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}$$
$$+8(1+2T)\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 16(1+T)\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 8\sqrt{T}(1+2T)\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}$$
$$+8\left\|\varphi'''(x)(1-x) - 3\varphi''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 8\left\|\psi''(x)(1-x) - 2\psi'(x)\right\|_{L_2(0,1)}$$
$$+8\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)(1-x) - 2f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T) = 2\big(1+2\sqrt{2}\big)T^2 + 2\big(1+\sqrt{2}\big)T,$$

$$A_2(T) = \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h''(t) - \int\limits_0^1 f(x,t)\,dx \right\|_{C[0,T]} \right.$$
$$\left. + 2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} \right] \right\},$$

$$B_2(T) = \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} T.$$

Из неравенств (50), (51) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant A(T) + B(T) \left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} \left\| u(x,t) \right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{52}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–4 *и*

$$\big(A(T)+2\big)^2 B(T) < 1. \tag{53}$$

Тогда задача (1)–(3), (7) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^3_T} \leqslant R = A(T)+2)$ *пространства* E^3_T *единственное решение.*

$\lhd$ В пространстве E^3_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{54}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i = 1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (43), (45).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E^3_T. Аналогично (52) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^3_T} \leqslant A(T) + B(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{55}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_s\|_{E^3_T} \leqslant B(T)R\Big(\,\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\Big). \tag{56}$$

Тогда из оценок (55) и (56) с учетом (52) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (53), т. е. $\{u, a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (43), (45).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (36)–(38), соответственно, имеем

$$\left\|u_0''(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant \|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u_0(t)\|_{C[0,T]} + 2\left\|\|f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|u_{2k}''(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12} + 4\left\|\|a(t)u_x(x,t)+f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|u_{2k-1}''(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12} \leqslant \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\,\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac12}$$

$$+4\sqrt{6}\left\|\|u_{xx}(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}$$

$$+4\sqrt{6}\left\|\|a(t)(u_x(x,t)(1-x)+u(x,t)) + f_x(x,t)(1-x) + f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (7), причем в силу леммы 3 оно единственно в шаре $K = K_R$. $\rhd$

С помощью леммы 2, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)–(4).

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = h(0), \qquad \int_0^1 \psi(x)\,dx = h'(T),$$

$$\frac{1}{2}\big(A(T)+2\big)T^2 < 1.$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leqslant R = A(T)+2)$ *пространства* E_T^3 *единственное классическое решение.*

Литература

1. *Тихонов А. И.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР.—1943.—Т. 39, № 5.—С. 195–198.
2. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 157, № 5.—С. 520–521.
3. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т.* Некорректные задачи математической физики и анализа.—М.: Наука, 1980.—288 с.
4. *Иванов В. К., Васин В. В., Танина В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения.—М.: Наука, 1978.—206 с.
5. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач.—М.: МГУ, 1994.—206 с.
6. *Соловьев В. В.* Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2004.—Т. 44, № 5.—С. 862–871.
7. *Соловьев В. В.* Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости // Диф. уравнения.—2006.—Т. 42, № 8.—С. 1106–1114.
8. *Мегралиев Я. Т.* Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральным условием // Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.—2012.—Вып. 1.—С. 32–40.
9. *Мегралиев Я. Т.* О разрешимости одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. Прикл. математика.—2011.—№ 23.—С. 25–38.
10. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб.—1992.—Т. 183, № 4.—С. 49–68.
11. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и мат. физики.—2003.—Т. 43, № 4.—С. 562–570.
12. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Мат. заметки.—2005.—Т. 77, № 4.—С. 522–534.
13. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Нелокальная обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа // Современная математика и ее приложения.—2011.—Т. 68.—С. 40–50.

Статья поступила 15 сентября 2012 г.

Мегралиев Яшар Топуш оглы
Бакинский государственный университет,
доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений
АЗЕРБАЙДЖАН, АЗ1148, Баку, ул. З. Халилова, 23
E-mail: `yashar_aze@mail.ru`

ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH ADDITIONAL INTEGRAL CONDITION

Meqraliyev Y. T.

An inverse boundary value problem for the second order elliptic equation with an additional first kind integral condition is investigated. First the initial problem is reduced to the equivalent problem, for which the existence and uniqueness theorem is proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Key words: inverse boundary problem, elliptic equation, method Fourier, classic solution.