Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 14–18

УДК **517.98**

НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ СЕЧЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

В работе уточняется понятие непрерывного расслоения банаховых решеток и исследуются порядковые свойства пространства CD_0-сечений такого расслоения.

Ключевые слова: непрерывное банахово расслоение, банахова решетка, расслоение банаховых решеток, CD_0-сечение банахова расслоения, удвоение по Александрову.

Основная цель данной заметки — выяснить, при каких условиях непрерывная структура расслоения банаховых решеток $\mathscr{X}$ над топологическим пространством Q согласуется с поточечными решеточными операциями. В качестве приложения мы покажем, что пространство $CD_0(Q, \mathscr{X})$ непрерывно-дискретных сечений такого расслоения $\mathscr{X}$ является банаховой решеткой, и исследуем ее порядковые свойства. Говоря о непрерывных банаховых расслоениях, мы следуем терминологии и обозначениям из [1] и [2, § 2.4].

Пусть $\mathscr{X}$ — дискретное банахово расслоение над каким-либо множеством Q, каждый слой $\mathscr{X}(q)$ которого является банаховой решеткой. Тогда векторное пространство $S(Q, \mathscr{X})$ всех сечений расслоения $\mathscr{X}$ представляет собой векторную решетку относительно поточечного порядка

$$u \leqslant v \;\Leftrightarrow\; u(q) \leqslant v(q) \text{ для всех } q \in Q,$$

причем решеточные операции также вычисляются поточечно:

$$\begin{gathered}(u \vee v)(q) = u(q) \vee v(q), \quad (u \wedge v)(q) = u(q) \wedge v(q),\\ u^+(q) = u(q)^+, \quad u^-(q) = u(q)^-, \quad |u|(q) = |u(q)|\end{gathered}$$

для всех $q \in Q$. Если, кроме того, Q является топологическим пространством, а $\mathscr{X}$ — непрерывным расслоением, то решеточные операции в $S(Q, \mathscr{X})$ не всегда сохраняют непрерывность сечений. Например, если $\mathscr{X}$ — постоянное непрерывное банахово расслоение над $\mathbb{R}$ со слоями $\mathscr{X}(q) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, а порядок $\leqslant_q$ на $\mathscr{X}(q)$ определяется правилом

$$x \leqslant_q y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \leqslant y, & \text{если } q \in \mathbb{Q};\\ x \geqslant y, & \text{если } q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\end{cases}$$

то положительная часть $u^+ = \chi_{\mathbb{Q}}$ непрерывного сечения $u \equiv 1$ оказывается разрывной во всех точках. В следующей теореме приведены условия, каждое из которых обеспечивает согласованность решеточной структуры слоев с непрерывной структурой расслоения.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — непрерывное банахово расслоение над произвольным топологическим пространством Q, причем каждый слой $\mathscr{X}(q)$ является банаховой решеткой. Следующие утверждения попарно равносильны:*

(1) *отображение* $\vee_{\mathscr{X}}\colon \big((q,x),(q,y)\big) \in (Q \otimes \mathscr{X})^{\times} \mapsto (q, x \vee y) \in Q \otimes \mathscr{X}$ *непрерывно*;

(2) *отображение* $(\cdot)^{+}_{\mathscr{X}}\colon (q,x) \in Q \otimes \mathscr{X} \mapsto (q, x^{+}) \in Q \otimes \mathscr{X}$ *непрерывно*;

(3) *множество* $C(Q,\mathscr{X})$ *является подрешеткой* $S(Q,\mathscr{X})$;

(4) *существует послойно плотное в* $\mathscr{X}$ *векторное подпространство* $\mathscr{U} \subset C(Q,\mathscr{X})$, *являющееся подрешеткой* $S(Q,\mathscr{X})$;

(5) *существует послойно плотное в* $\mathscr{X}$ *подмножество* $\mathscr{U} \subset C(Q,\mathscr{X})$ *такое, что* $u_1 \vee u_2 \in C(Q,\mathscr{X})$ *для любых* $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$;

(6) *существует послойно плотное в* $\mathscr{X}$ *подмножество* $\mathscr{U} \subset C(Q,\mathscr{X})$ *такое, что* $u^{+} \in C(Q,\mathscr{X})$ *для любых* $u \in \mathscr{U}$.

$\lhd$ Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) обеспечивается очевидными равенствами

$$x^{+} = x \vee 0, \quad x \vee y = (x-y)^{+} + y$$

и непрерывностью линейных операций (см. [1, 2.1.5]), (2) влечет (3) благодаря [1, 2.1.7], импликации (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) очевидны, а из (5) следует (6) по следующей причине: если $\mathscr{U}$ удовлетворяет (5) и $u_0 \in \mathscr{U}$, то

$$(u-u_0)^{+} = (u \vee u_0) - u_0 \in C(Q,\mathscr{X})$$

для всех $u \in \mathscr{U}$, а значит, $\mathscr{U} - u_0$ удовлетворяет (6).

Покажем, что (6) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mathscr{U}$ — множество, удовлетворяющее (6). Рассмотрим пару $(q,x) \in Q \otimes \mathscr{X}$, окрестность U точки q, сечение $u \in C(Q,\mathscr{X})$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(q,x^{+}) \in U(u,\varepsilon)$, т. е.

$$\varepsilon_0 := \|x^{+} - u(q)\| < \varepsilon.$$

Нам предстоит найти такую окрестность $V(v,\delta)$ пары (q,x), что $(\cdot)^{+}_{\mathscr{X}}[V(v,\delta)] \subset U(u,\varepsilon)$. Положим $\delta := (\varepsilon - \varepsilon_0)/2$ и выберем сечение $v \in \mathscr{U}$ так, чтобы

$$\|x - v(q)\| < \delta.$$

Тогда $\|x^{+} - v^{+}(q)\| \leqslant \|x - v(q)\| < \delta$, откуда

$$\|u(q) - v^{+}(q)\| \leqslant \|u(q) - x^{+}\| + \|x^{+} - v^{+}(q)\| < \varepsilon_0 + \delta.$$

Благодаря непрерывности u и v^{+} найдется такая окрестность $V \subset U$ точки q, что

$$\|u(p) - v^{+}(p)\| < \varepsilon_0 + \delta \ \text{ при } p \in V.$$

Тогда $V(v,\delta)$ — искомая окрестность пары (q,x). Действительно, если $(p,y) \in V(v,\delta)$, то $\|y^{+} - v^{+}(p)\| \leqslant \|y - v(p)\| < \delta$ и поэтому

$$\|y^{+} - u(p)\| \leqslant \|y^{+} - v^{+}(p)\| + \|v^{+}(p) - u(p)\| < \delta + \varepsilon_0 + \delta = \varepsilon,$$

т. е. $(\cdot)^{+}_{\mathscr{X}}(p,y) \in U(u,\varepsilon)$. $\rhd$

Замечание 1. Список утверждений, равносильных (1)–(6), можно расширить, подставив $\wedge$ вместо $\vee$ в (1) и (5), а также $(\cdot)^{-}$ или $|\cdot|$ вместо $(\cdot)^{+}$ в (2) и (6).

Замечание 2. Если считать банахову решетку топологической алгебраической системой с (непрерывными) линейными и решеточными операциями, то утверждения (1) и (2) теоремы 1 означают, что $Q \otimes \mathscr{X}$ является расслоением таких систем в смысле определения [3, 1.5]. Отметим также, что множество $\mathscr{U}$, удовлетворяющее условию (4) теоремы 1, является решеточной непрерывной структурой на $\mathscr{X}$, а значит, пара $(\mathscr{X}, \mathscr{U})$ представляет собой непрерывное расслоение банаховых решеток согласно определению, принятому в [4], причем структура $\mathscr{U}$ эквивалентна (см. [1, 2.1.8]) исходной непрерывной структуре расслоения $\mathscr{X}$. (При этом импликация $(4) \Rightarrow (3)$ в теореме 1 совпадает с леммой [4, § 2].) Приведенные выше соображения служат основанием для следующего определения.

Определение 1. *Непрерывным расслоением банаховых решеток* назовем непрерывное банахово расслоение, слои которого являются банаховыми решетками и которое удовлетворяет любому из эквивалентных условий (1)–(6) теоремы 1.

Возникшее понятие непрерывного расслоения банаховых решеток предоставляет возможность уточнить основные факты о сечениях банаховых расслоений и получить их аналоги, отражающие наличие порядка в рассматриваемых алгебраических системах. В качестве примера остановимся на исследовании порядковых свойств пространства непрерывно-дискретных сечений. (В этой части заметки мы используем термины и обозначения, введенные в [5, 6].)

Определение 2. Пусть Q — непустой компакт без изолированных точек и $\mathscr{X}$ — непрерывное расслоение банаховых решеток над Q. Как легко видеть, пространство $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$ всех ограниченных сечений $\mathscr{X}$ является порядковым идеалом векторной решетки $S(Q, \mathscr{X})$, а пространство

$$c_0(Q, \mathscr{X}) = \big\{ u \in S(Q, \mathscr{X}) : |\!|\!| u |\!|\!| \in c_0(Q) \big\}$$

является порядковым идеалом $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$. Кроме того, если $u, v \in S(Q, \mathscr{X})$ и $|u| \leqslant |v|$, то $|\!|\!| u |\!|\!| \leqslant |\!|\!| v |\!|\!|$, а если в добавок $v \in \ell^\infty(Q, \mathscr{X})$, то $\|u\| \leqslant \|v\|$. Таким образом, $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$, $c_0(Q, \mathscr{X})$ и $C(Q, \mathscr{X})$ представляют собой банаховы решетки относительно поточечных линейных операций, поточечного порядка и равномерной нормы. Для любого сечения $u \in S(Q, \mathscr{X})$ из очевидного равенства $|\!|\!| u |\!|\!| = |\!|\!| |u| |\!|\!|$ вытекает эквивалентность $u \in c_0(Q, \mathscr{X}) \Leftrightarrow |u| \in c_0(Q, \mathscr{X})$. Напомним также, что $CD_0(Q, \mathscr{X})$ — банахово подпространство $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$, которое представляется в виде прямой суммы

$$CD_0(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X}) \oplus c_0(Q, \mathscr{X})$$

с соответствующими линейными проекторами $(\cdot)_c$ и $(\cdot)_d$ (см. [5]).

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — непрерывное расслоение банаховых решеток над непустым компактом Q без изолированных точек.*

(1) *Пространство $CD_0(Q, \mathscr{X})$ является банаховой подрешеткой $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$.*

(2) *Линейный проектор $(\cdot)_c \colon CD_0(Q, \mathscr{X}) \to C(Q, \mathscr{X})$ является решеточным гомоморфизмом: $(u \vee v)_c = u_c \vee v_c$, $(u \wedge v)_c = u_c \wedge v_c$ для всех $u, v \in CD_0(Q, \mathscr{X})$.*

(3) *Для любых $u, v \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ выполняется неравенство $|(u \vee v)_d| \leqslant |u_d| \vee |v_d|$. В частности, $|\!|\!| (u \vee v)_d |\!|\!| \leqslant |\!|\!| u_d |\!|\!| + |\!|\!| v_d |\!|\!|$ и $\|(u \vee v)_d\| \leqslant \|u_d\| + \|v_d\|$.*

(4) *Пусть $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{\mathscr{X}}$ — удвоения Q и $\mathscr{X}$ соответственно. Тогда $\widetilde{\mathscr{X}}$ представляет собой непрерывное расслоение банаховых решеток относительно естественного порядка, а отображение $u \mapsto \widetilde{u}$, где $\widetilde{u}(q, 0) = u_c(q)$ и $\widetilde{u}(q, 1) = u(q)$ для всех $q \in Q$, является не только линейной изометрией между $CD_0(Q, \mathscr{X})$ и $C(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}})$* (см. [5, теорема 6]), *но и порядковым изоморфизмом.*

$\lhd$ Для любого сечения $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ имеем $|u^+ - (u_c)^+| \leqslant |u - u_c| = |u_d| \in c_0(Q, \mathscr{X})$, а значит, $v := u^+ - (u_c)^+ \in c_0(Q, \mathscr{X})$, откуда с учетом непрерывности $(u_c)^+$ следует $u^+ = (u_c)^+ + v \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ и $(u^+)_c = (u_c)^+$, что доказывает (1) и (2).

Приступая к обоснованию (3), предварительно покажем, что в любой архимедовой векторной решетке справедливо неравенство

$$|x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2| \leqslant |x_1 - y_1| \vee |x_2 - y_2|. \qquad (*)$$

Благодаря принципу Юдина о сохранении соотношений достаточно установить $(*)$ для вещественных чисел. В этом случае без нарушения общности можно считать, что $x_1 = \max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, а тогда $|x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2| = x_1 - y_1 \vee y_2 \leqslant x_1 - y_1 \leqslant |x_1 - y_1| \vee |x_2 - y_2|$. Теперь для всех $u, v \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ с учетом (2) и $(*)$ имеем

$$|(u \vee v)_d| = |u \vee v - (u \vee v)_c| = |u \vee v - u_c \vee v_c| \leqslant |u - u_c| \vee |v - v_c| = |u_d| \vee |v_d|.$$

Для доказательства (4) заметим, что из (1) и (2) следует $\widetilde{u}(q,r)^+ = (u^+)^\sim(q,r)$ для всех $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$, $(q,r) \in \widetilde{Q}$, и поэтому $\widetilde{\mathscr{X}}$ является непрерывным расслоением банаховых решеток. Кроме того, если $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ и $u \geqslant 0$, то в силу (2) мы имеем $u_c \geqslant 0$, откуда $\widetilde{u}(q,0) = u_c(q) \geqslant 0$ и $\widetilde{u}(q,1) = u(q) \geqslant 0$ для всех $q \in Q$, а значит, $\widetilde{u} \geqslant 0$. Если же $\widetilde{u} \geqslant 0$, то $u(q) = \widetilde{u}(q,1) \geqslant 0$ для всех $q \in Q$, т. е. $u \geqslant 0$. $\rhd$

Замечание 3. В отличие от $(\cdot)_c$ линейный проектор $(\cdot)_d \colon CD_0(Q, \mathscr{X}) \to c_0(Q, \mathscr{X})$ оказывается решеточным гомоморфизмом лишь в вырожденном случае $\mathscr{X} \equiv \{0\}$. Более того, если $\mathscr{X} \not\equiv \{0\}$, то $(\cdot)_d$ не является положительным оператором. Действительно, пусть $u \in C(Q, \mathscr{X})$, $u \geqslant 0$ и $u(p) > 0$ для некоторой точки $p \in Q$. (На роль u подходит модуль ненулевого непрерывного сечения.) Определим сечение $v \in c_0(Q, \mathscr{X})$, полагая $v(p) = u(p)$ и $v(q) = 0$ при $q \neq p$. Тогда $w := u - v \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ и $w \geqslant 0$, но $w_d = -v < 0$.

Определение 3. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — (дискретные) банаховы расслоения над произвольным множеством Q. Следуя [5, § 4], обозначим символом $S[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ векторное пространство всех сечений дискретного банахова расслоения над Q со слоями $B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$. Таким образом, $S[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ состоит из всевозможных функций H, определенных на Q и сопоставляющих каждой точке $q \in Q$ ограниченный линейный оператор $H(q) \colon \mathscr{X}(q) \to \mathscr{Y}(q)$. Для векторного подпространства $\mathscr{U} \subset S(Q, \mathscr{X})$ и сечения $H \in S[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ определим линейный оператор $H_{\mathscr{U}} \colon \mathscr{U} \to S(Q, \mathscr{Y})$ формулой $(H_{\mathscr{U}} u)(q) = H(q)u(q)$, $u \in \mathscr{U}$, $q \in Q$.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — произвольные расслоения банаховых решеток над Q, $H \in S[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ и пусть $\mathscr{U}$ — послойно плотная векторная подрешетка $S(Q, \mathscr{X})$. Оператор $H_{\mathscr{U}} \colon \mathscr{U} \to S(Q, \mathscr{Y})$ положителен (является решеточным гомоморфизмом) тогда и только тогда, когда оператор $H(q) \colon \mathscr{X}(q) \to \mathscr{Y}(q)$ положителен (является решеточным гомоморфизмом) для каждой точки $q \in Q$.*

$\lhd$ Достаточность очевидна. Покажем необходимость. Зафиксировав произвольную точку $q \in Q$, рассмотрим всюду плотную в $\mathscr{X}(q)$ векторную подрешетку $\mathscr{U}(q) := \{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$ и линейный оператор $H_q := H(q)|_{\mathscr{U}(q)} \colon \mathscr{U}(q) \to \mathscr{Y}(q)$. Если $x \in \mathscr{U}(q)$, то для сечения $u \in \mathscr{U}$ со значением $u(q) = x$ мы имеем $u^+(q) = u(q)^+ = x^+$, откуда $H_q x^+ = H(q)u^+(q) = (H_{\mathscr{U}} u^+)(q)$. Следовательно, в случае $H_{\mathscr{U}} \geqslant 0$ мы получаем $H_q x \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$, а если $H_{\mathscr{U}}$ — решеточный гомоморфизм, то для любого $x \in \mathscr{U}(q)$

$$H_q(x^+) = H_{\mathscr{U}}(u^+)(q) = (H_{\mathscr{U}} u)^+(q) = (H_{\mathscr{U}} u)(q)^+ = \big(H(q)u(q)\big)^+ = (H_q x)^+.$$

Остается заметить, что из положительности (решеточной гомоморфности) сужения H_q ограниченного оператора $H_{\mathscr{U}}(q)$ на всюду плотную векторную подрешетку $\mathscr{U}(q) \subset \mathscr{X}(q)$ следует положительность (решеточная гомоморфность) самого оператора $H_{\mathscr{U}}(q)$. $\rhd$

Пространство линейных операторов, действующих в векторных решетках, по умолчанию снабжается порядком, порожденным конусом положительных операторов. Тогда для расслоений банаховых решеток $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ над Q каждое из пространств $B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ оказывается упорядоченным, и на векторном пространстве $S[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ (и его подпространствах) возникает естественный поточечный порядок.

Следствие. *Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — непрерывные расслоения банаховых решеток над непустым компактом Q без изолированных точек, то определенные в [5] биекции между пространствами $CD_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$, $C[\widetilde{\mathscr{X}}, \widetilde{\mathscr{Y}}]$, $\operatorname{Orth}\big(C(Q, \mathscr{X}), CD_0(Q, \mathscr{Y})\big)$, $\operatorname{Orth}\big(C(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}), C(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{Y}})\big)$ являются не только линейными изометриями, но и порядковыми изоморфизмами.*

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995.—Т. 29.—С. 63–211.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Gierz G.* Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1982.—296 p.
4. *Kusraev A. G., Tabuev S. N.* Banach lattices of continuous sections // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 4.—С. 41–44.
5. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-сечений и CD_0-гомоморфизмов банаховых расслоений // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика.—2007.—Т. 7, вып. 4.—С. 27–48.
6. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-функций и удвоение по Александрову // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, № 3.—С. 11–21.

Статья поступила 19 ноября 2013 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
старший науч. сотрудник лаб. функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
E-mail: koptev@math.nsc.ru

CONTINUOUS-DISCRETE SECTIONS OF BUNDLES OF BANACH LATTICES

Gutman A. E., Koptev A. V.

The notion of a continuous bundle of Banach lattices is clarified and the order properties are studied of the space of CD_0-sections of such a bundle.

Key words: continuous Banach bundle, Banach lattice, bundle of Banach lattices, CD_0-section of a Banach bundle, Alexandroff duplicate.