Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 3, С. 54–57

УДК **517.98**

НЕРАСШИРЯЮЩИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

З. А. Кусраева

Установлено, что для универсально полной векторной решетки E равносильны следующие условия: (1) булева алгебра порядковых проекторов $\mathbb{P}(E)$ σ-дистрибутивна; (2) любой нерасширяющий алгебраический оператор в E строго диагонален; (3) любой нерасширяющий проектор в E порядково ограничен.

Ключевые слова: векторная решетка, универсальная полнота, d-базис, локально одномерная векторная решетка, нерасширяющий оператор, строго диагональный оператор, порядковый проектор, σ-дистрибутивность.

Оператор T в векторной решетке E называют *алгебраическим,* если для него существует аннулирующий полином, т. е. существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, что $\varphi(T) = 0$, где $\varphi(t) := a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$. Алгебраический оператор с аннулирующим полиномом $\varphi(t) = t^2 - t$ называют *проектором.* Проектор P называют *порядковым,* если образ $\mathrm{Im}(P)$ и ядро $\ker(P)$ служат взаимно дополнительными полосами. Булеву алгебру всех порядковых проекторов в E обозначим символом $\mathbb{P}(E)$. Говорят, что $\mathbb{P}(E)$ *σ-дистрибутивна,* если для любой двойной последовательности $(\pi_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{P}(E)$ выполняется $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \pi_{n,m} = \bigwedge_{\tau\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \pi_{n,\tau(n)}$. Ниже все векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми. Необходимые сведения имеются в [3, 7].

Оператор T в E называют *строго диагональным,* если существуют попарно дизъюнктные порядковые проекторы $P_1, \dots, P_m$ и вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такие, что $T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$. В этом определении можем предполагать без ограничения общности, что $P_1 + \dots + P_n = I_E$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ попарно различны. Нетрудно заметить, что множество всех строго диагональных операторов в E образует f-подалгебру ортоморфизмов $\mathrm{Orth}(E)$. Напомним также, что оператор T в E именуют *нерасширяющим,* если $x \perp y$ влечет $Tx \perp y$ для всех $x, y \in E$. Если E — решетка с проекциями, то T будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда T коммутирует со всеми порядковыми проекторами. Наконец, напомним, что *универсально полная* векторная решетка или *расширенное K-пространство* — порядково полная векторная решетка, в которой существует супремум любого дизъюнктного множества положительных элементов. Теперь все готово для формулирки основного результата данной настоящей заметки.

Теорема. *Пусть E — универсально полная векторная решетка. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *булева алгебра $\mathbb{P}(E)$ σ-дистрибутивна;*

(2) *всякий нерасширяющий алгебраический оператор в E порядково ограничен;*

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

(3) *всякий нерасширяющий алгебраический оператор в E строго диагонале;*

(4) *всякий нерасширяющий проектор в E является порядковым проектором.*

Этот результат связан с проблемой Э. В. Викстеда [12]: *В каких векторных решетках все нерасширяющие линейные операторы автоматически порядков ограничены?* Историю вопроса и обзор основных результатов можно найти в [4] и [10]. Наиболее полно исследован случай универсально полной векторной решетки. В частности, А. Е. Гутман получил следующий результат [9]:

Теорема Гутмана. *В универсально полной векторной решетке любой нерасширяющий оператор порядково ограничен в том и только в том случае, когда в ней булева алгебра порядковых проекторов σ-дистрибутивна.*

Разумеется, в части необходимости этого утверждения было бы интересно ограничиться более узким классом операторов. Основной результат данной заметки утверждает, что необходимость в теореме А. Е. Гутмана остается в силе, если ограничиться нерасширяющими алгебраическими операторами, и даже нерасширяющими проекторами.

Доказательство основано на понятии d-базиса, см. [4]. Пусть E — универсально полная векторная решетка со слабой единицей $\mathbb{1}$. Множество $\mathscr{E} := \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset E$ называют *d-независимым,* если для любого порядкового проектора ρ в E множество $\{\rho e_\gamma : \gamma \in \Gamma,\ \rho e_\gamma \neq 0\}$ линейно независимо. Максимальное по включению d-независимое множество называют *d-базисом.* Понятие d-базиса можно ввести и для произвольной векторной решетки (см. в [4, 5]), однако оно нам не потребуется. Простейший пример d-независимого множества — одноточечное множество $\{\mathbb{1}\}$. Универсально полная векторная решетка E со слабой порядковой единицей $\mathbb{1}$ называется *локально одномерной,* если $\{\mathbb{1}\}$ является d-базисом в E. Потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Универсально полная векторная решетка E локально одномерна в том и только в том случае, когда булева алгебра проекторов $\mathbb{P}(E)$ σ-дистрибутивна.*

$\lhd$ Следует из теоремы Гутмана с учетом [2, теорема 2.1] и [11, теорема 3.2]. $\rhd$

Лемма 2. *В любой порядково полной векторной решетке существует d-базис.*

$\lhd$ См. [4, предложение 6.2]. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{E} := \{e_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — фиксированный d-базис в универсально полной векторной решетке E. Тогда для любого $x \in E$ существует разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{P}(E)$ такое, что имеет место представление*

$$x = \sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\gamma\in\Gamma} \alpha_\gamma^\xi \rho_\xi e_\gamma, \tag{1}$$

где α_γ^ξ — некоторые числа (зависящие от x), причем для любого $\xi\xi\Xi$ имеется лишь конечное число отличных от нуля коэффициентов α_γ^ξ.

$\lhd$ См. [4, с. 33] и [3, предложение 5.1.1 (3)]. $\rhd$

Лемма 4. *В универсально полной векторной решетке E для любой ненулевой полосы $B \subset E$ существует ненулевая полоса $B_0 \subseteq B$, в которой существует d-базис, состоящий из слабых единиц в B_0.*

$\lhd$ См. [4, теорема 6.4]. $\rhd$

Лемма 5. *Порядково ограниченный оператор в векторной решетке строго диагонален в том и только в том случае, когда он является нерасширяющим и алгебраическим.*

$\lhd$ См. [8, теорема 3.3]. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство основного результата.

(1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из теоремы Гутмана.

(2) $\Rightarrow$ (3) выполняется в силу леммы 5.

(3) $\Rightarrow$ (4) Пусть P — нерасширяющий проектор в E. Тогда P алгебраичен в силу (3), а потому и строго диагонален. По определению P допускает представление $P=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\rho_i$, где $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ — вещественные числа, а $\rho_i,\dots,\rho_m$ — попарно дизъюнктые порядковые проекторы. Умножив обе части указанного представления на ρ_i, получим $\rho_i P=\alpha_i\rho_i$. Так как $(P\rho_i)^2=P^2\rho_i^2=P\rho_i$, то и $\alpha_i\rho_i$ должен быть проектором, поэтому $\alpha_i^2\rho_i=\alpha_i\rho_i$ или $\rho_i(\alpha_i^2-\alpha_i)=0$. Если $\rho_i\neq 0$, то либо $\alpha_i=1$, либо $\alpha_i=0$, следовательно, P — порядкоый проектор, как сумма попарно дизъюнктных порядковых проекторов.

(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что $\mathbb{P}(E)$ не является σ-дистрибутивной и построим нерасширяющий проектор, не являющийся порядковым проектором. Пусть $\mathscr{E}=\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — некоторый d-базис в E, который существует по лемме 2. В силу леммы 1, E не является локально одномерным, следовательно, $\mathscr{E}\neq\{\mathbb{1}\}$, где $\mathbb{1}$ — фиксированная слабая порядковая единица в E. В силу леммы 3, для элемента $x\in E$ существует разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такое, что

$$x=\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma^\xi\rho_\xi e_\gamma,$$

где множество $\{\gamma\in\Gamma:\ \alpha_\gamma^\xi\neq 0\}$ конечно для каждого ξ. Учитывая лемму 4, можно предположить без ограничения общности, что $\mathbb{1}\in\mathscr{E}$. Зафиксируем такой индекс $\gamma_0\in\Gamma$, что $\mathbb{1}\neq e_{\gamma_0}$, и определим оператор $P:E\to E$ формулой

$$Px:=\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_{\gamma_0}^\xi\rho_\xi e_{\gamma_0}\quad (x\in E).$$

Как видно, P корректно определен, линеен и идемпотентен ($P=P^2$). Кроме того, непосредственно из определения видно, что P коммутирует с порядковыми проекторами, следовательно, P является нерасширяющим.

Покажем, что P не является порядковым проектором. Это делается аналогично [4, пример 7.11]. Возьмем какую-нибудь полосу B в E и рассмотрим элемент $x\in B$ для которого $x=\rho_B\mathbb{1}+\rho_B e_{\gamma_0}$. Согласно лемме 3, имеем: $Px=\rho_B e_{\gamma_0}\neq x$. Отсюда видно, что P не является проектором на полосу B. Так как выбор B произволен, то приходим к противоречию, показывающему, что решетка E локально одномерна. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть E — универсально полная векторная решетка, причем $\mathbb{P}(E)$ не является σ-дистрибутивной. Тогда в E существует проектор, коммутирующий с порядковыми проекторами, но не являющийся порядковым проектором.*

$\lhd$ Следует непосредственно из основной теоремы. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть (Ω,Σ,μ) — безатомное пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы. Тогда в векторной решетке $L^0:=L^(\Omega,\Sigma,\mu)$ (классов эквивалентности) всех измеримых функций существует проектор, коммутирующий с порядковыми проекторами но не являющийся порядковым проектором.*

$\lhd$ Согласно [10, 5.3.3] булева алгебра $\mathbb{P}(L^0)$ σ-дистрибутивна тогда и только тогда, когда она атомична. $\rhd$

Литература

1. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Vol. 248, № 5.—С. 1033–1036.
2. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
4. *Abramovich Yu. A., Kitover A. K.* Inverses of disjointness preserving operators // Memoirs of the American Mathematical Society.—2000.—Vol. 143, № 679.
5. *Abramovich Yu. A., Kitover A. K.* d-Independence and d-basis in vector lattices // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1999.—Vol. 44, № 5–6.—P. 667–682.
6. *Abramovich Yu., Wickstead A.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$ // Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2.—1993.—Vol. 44.—P. 257–270.
7. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London: Acad. Press Inc., 1985.
8. *Boulabiar K., Buskes G., Sirotkin G.* Algebraic order bounded disjointness preserving operators and strongly diagonal operators // Integral Equations and Operator Theory.—2006.—Vol. 54.—P. 9–31.
9. *Gutman A. E.* Locally one-dimentional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—Vol. 5, № 2.—P. 99–121.
10. *Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* The Wickstead problem // Siberian Electronic Math. Reports.—2008.—Vol. 5.—P. 293–333.
11. *McPolin P. T. N., Wickstead A. W.* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1985.—Vol. 97, № 3.—P. 481–487.
12. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Comp. Math.—1977.—Vol. 35, № 3.—P. 225–238.

Статья поступила 25 июля 2013 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `zali13@mail.ru`

ALGEBRAIC BAND PRESERVING OPERATORS

Kusraeva Z. A.

It is shown that for a universally complete vector lattice E the following are equivalent: (1) the Boolean algebra of band projections $\mathbb{P}(E)$ is σ-distributive; (2) every algebraic band preserving operator in E is strongly diagonal; (3) every band preserving projection in E is a band projection.

Key words: Vector lattice, universally complete vector lattice, d-basis, locally one-dimensional vector lattice, σ-distributivity, band preserving operator, strongly diagonal operator, band projection.