Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 22–35

УДК **517.928**

АСИМПТОТИКА ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Ишмеев М. Р.

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, содержащих высокочастотные слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты, построена и обоснована полная асимптотика периодического решения.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, большие высокочастотные слагаемые, метод усреднения, асимптотика.

В работе В. Б. Левенштама [1] построена и обоснована полная асимптотика периодического решения для некоторого класса систем дифференциальных уравнений вида

$$x^{(n)} = f_0(x, \omega t) + \omega^{n/2} f_1(x, \omega t), \quad \omega \gg 1,$$

в окрестности невырожденного стационарного решения соответствующих усредненных систем уравнений. В данной работе аналогичные результаты получены для некоторого класса систем дифференциальных уравнений более общего вида (1) (см. ниже). В частности, нелинейные слагаемые в (1) могут содержать младшие производные соответствующих порядков.

1. Обоснование метода усреднения

Пусть n, m — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в $\mathbb{R}^m$, $l > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} &\omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}\Big(x, \dot{x}, \dots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t\Big) \\ &+ \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^j f_{2j}\Big(x, \dot{x}, \dots, x^{([n/2]-j)}, \omega t\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь вектор-функции $f_{2j-1}(z_0, z_1, \dots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau)$ и $f_{2j}(z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]-j}, \tau)$, которые заданы на множествах $G^{[(n+1)/2]-j+1} \times \mathbb{R}$ и $G^{[n/2]-j+1} \times \mathbb{R}$ соответственно, непрерывны и принимают значения в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что указанные вектор-функции обладают непрерывными производными

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial^r f_{2j-1}}{\partial z_{i_1}^{r_1} \ldots \partial z_{i_q}^{r_q}}, \quad r = 1, \ldots, \max(2, n - [(n+1)/2] + j),$$
$$\frac{\partial^r f_{2j}}{\partial z_{i_1}^{r_1} \ldots \partial z_{i_q}^{r_q}}, \quad r = 1, \ldots, \max(2, n - [n/2] + j),$$

которые удовлетворяют равномерному условию Липшица. Пусть, кроме того, они l-периодичны по τ, причем среднее всех вектор-функций по этой переменной, кроме, быть может, f_0, равно нулю. Наряду с возмущенным уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\Psi(y, \dot{y}, \ldots, y^{([n/2])}) = 0, \tag{2}$$

которое будем называть *усредненным.* Здесь

$$\Psi(z_0, \ldots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) + \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau)$$
$$+ \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau)$$
$$+ \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \tau)\Big\rangle$$

при n — нечетном;

$$\Psi(z_0, \ldots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0\Big(z_0, \ldots, z_{[n/2]} + \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]}}(z_0, \tau), \tau\Big)$$
$$+ \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau) + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau)$$
$$+ \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]-1}}(z_0, \tau)\Big\rangle$$

при n — четном. Символом $\varphi_n(z_0, \tau)$ обозначено l-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n \varphi_n}{\partial \tau^n}(z_0, \tau) = f_n(z_0, \tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0 \in G$ такое, что $\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]}}(y_0, \tau) \in G$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$, а $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ — невырожденная матрица.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega > \omega_0$ уравнение* (1) *имеет $l\omega^{-1}$-периодическое решение x_ω единственное в шаре $\|x - y_0\|_{C^k(\mathbb{R})} \leqslant r_0$ и при этом $\lim_{\omega \to \infty} \|x_\omega - y_0\|_{C^k(\mathbb{R})} = 0$, где $k = [(n-1)/2]$.*

$\lhd$ Доказательство теоремы проведем в 3 этапа.

1. Проведем в уравнении (1) замену типа Крылова — Боголюбова

$$x = x_1 + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(x_1, \omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_n(x_1, \omega t) \equiv x_1 + \varphi_\omega. \tag{3}$$

Здесь и ниже через $\varphi_j(z_0, z_1, \ldots, z_r, \tau)$ мы обозначаем l-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n \varphi_j}{\partial \tau^n}(z_0, z_1, \ldots, z_r, \tau) = f_j(z_0, z_1, \ldots, z_r, \tau)$. Будем пользоваться соотношением

$$\frac{\partial^n \varphi_j}{\partial t^n}(x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_1^{(r)}(t), \omega t)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \omega^{n-i} C_n^i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\frac{\partial^{n-i}}{\partial \tau^{n-i}}\varphi_j(x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_1^{(r)}(t), \tau)\Big|_{\tau = \omega t}.$$

Для всех f_j в случае нечетного n и для всех f_j, кроме f_0, в случае четного n применим формулы

$$f_j\left(x_1+\varphi_\omega,\dot x_1+\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\frac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)=f_j(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(r)},\omega t)$$
$$+\int\limits_0^1\frac{\partial f_j}{\partial z_0}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\theta\frac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)d\theta\varphi_\omega$$
$$+\int\limits_0^1\frac{\partial f_j}{\partial z_1}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\theta\frac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)d\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t}$$
$$+\dots+\int\limits_0^1\frac{\partial\ f_j}{\partial z_r}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\theta\frac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)d\theta\frac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r}.$$

Аналогичные формулы используем для слагаемых в правых частях последних представлений, которые имеют порядок $O(1)$ при $\omega\to\infty$. Для f_0 в случае четного n воспользуемся представлением

$$f_0\left(x_1+\varphi_\omega,\dot x_1+\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\frac{\partial^p\varphi_\omega}{\partial t^p},\omega t\right)=f_0(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)}+\omega^{-n/2}\frac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p},\omega t)$$
$$+\int\limits_0^1\frac{\partial f_0}{\partial z_0}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\ +\omega^{-n/2}\frac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p}+\theta\omega^{-(n+1)/2}\frac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},\omega t\right)d\theta\varphi_\omega$$
$$+\int\limits_0^1\frac{\partial f_0}{\partial z_1}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\ +\omega^{-n/2}\frac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p}+\theta\omega^{-(n+1)/2}\frac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},\omega t\right)d\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t}$$
$$+\dots+\int\limits_0^1\frac{\partial f_0}{\partial z_r}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\frac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\omega^{-n/2}\frac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p}+\right.$$
$$\left.+\theta\omega^{-(n+1)/2}\frac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},\omega t\right)d\theta\omega^{-(n+1)/2}\frac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},$$

где $p=[n/2]$. В результате получим

$$\begin{aligned}x_1^{(n)}&=\psi(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)},\omega t)+\gamma_1(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(k)},\omega t)\\&+\beta_1(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)},\omega t,\omega)+\omega^{n/2-1}g_{12}(x_1,\omega t)\dot x_1+\omega^{n/2-3/2}g_{13}(x_1,\omega t)\dot x_1\\&+\sum_{i=4}^{n}\omega^{n/2-i/2}\Big[h_{1i}(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{([i/2]-1)},\omega t)+g_{1i}(x_1,\omega t)x_1^{([i/2])}\Big]\\&+\sum_{i=n+1}^{2n}\omega^{n/2-i/2}\Big[h_{1i}(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{([i/2]-1)},\omega t)+g_{1i}(x_1,\omega t)x_1^{([i/2])}\Big],\end{aligned}\qquad(4)$$

где в случае нечетного n

$$\psi(z_0,\dots,z_{[n/2]})=f_0(z_0,\dots,z_{[n/2]},\tau)+\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau)+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)$$
$$+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\dots,z_{[(n+1)/2]-1},\tau)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\tau),$$

а в случае четного n

$$\psi(z_0,\dots,z_{[n/2]})=f_0\biggl(z_0,\dots,z_{[n/2]}+\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(z_0,\tau),\tau\biggr)+\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau)$$
$$+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0,\dots,z_{[n/2]-1},\tau)\frac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]-1}}(z_0,\tau),$$
$$g_{12}(z_0,\tau)=\frac{\partial^n\varphi_n}{\partial z_0\partial\tau^{n-1}}(z_0,\tau),\quad g_{13}(z_0,\tau)=\frac{\partial^n\varphi_{n-1}}{\partial z_0\partial\tau^{n-1}}(z_0,\tau).$$

Здесь компоненты вектор-функций $h_{1i}(z_0,z_1,\dots,z_{[i/2]-1},\tau)$ являются полиномами по компонентам $z_1,\dots,z_{[i/2]-1}$, коэффициенты которых, также как и компоненты матриц $g_{1i}(z_0,\tau)$ и вектор-функции $\beta_1(z_0,z_1,\dots,z_p,\tau,\omega)$, непрерывны, удовлетворяют равномерному условию Липшица по z_i и l-периодичны по τ. Кроме того, справедливы равенства $\langle g_{1i}\rangle=\langle h_{1i}\rangle=0$. И компоненты вектор-функций h_{1i} не содержат произведений каких-либо компонент векторов z_{j_1}, z_{j_2} при $j_1+j_2>n$. Слагаемое β_1 имеет порядок $\omega^{-1/2}$ при $\omega\to\infty$, а вид вектор-функции $\gamma_1(z_0,z_1,\dots,z_p,\tau)$ после этого очевиден. Перепишем это уравнение в виде системы

$$\begin{gathered}\dot x_1=y_1,\\ y_1^{(n-1)}=\psi(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)},\omega t)+\gamma_1(x_1,y_1,\dots,y_1^{(k-1)},\omega t)\\ +\beta_1(x_1,y_1,\dots,y_1^{(p-1)},\omega t,\omega)+\omega^{n/2-1}g_{12}(x_1,\omega t)y_1+\omega^{n/2-1}g_{13}(x_1,\omega t)y_1\\ +\sum_{i=4}^{n}\omega^{n/2-i/2}\Bigl[h_{1i}(x_1,y_1,\dots,y_1^{([i/2]-2)},\omega t)+g_{1i}(x_1,\omega t)y_1^{([i/2]-1)}\Bigr]\\ +\sum_{i=n+1}^{2n}\omega^{n/2-i/2}\Bigl[h_{1i}(x_1,y_1,\dots,y_1^{([i/2]-2)},\omega t)+g_{1i}(x_1,\omega t)y_1^{([i/2]-1)}\Bigr].\end{gathered}\tag{5}$$

В системе (5) произведем замену переменных

$$\begin{gathered}x_1=x_1,\quad y_1=x_2+\omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-3}(x_1,x_2,\omega t)+\omega^{-n/2}\varphi_{n-2}(x_1,x_2,\omega t)\\ +\omega^{-(n+1)/2}\xi_3(x_1,x_2,\omega t)+\omega^{-n/2}\xi_2(x_1,x_2,\omega t),\end{gathered}\tag{6}$$

где $\xi_2(x_1,x_2,\tau)$ является l-периодическим по τ с нулевым средним решением уравнения $\frac{\partial^{n-1}\xi_2(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau^{n-1}}=g_{12}(x_1,\tau)x_2$, а $\xi_3(x_1,x_2,\tau)$ — $\frac{\partial^{n-1}\xi_3(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau^{n-1}}=g_{13}(x_1,\tau)x_2$. В результате этой замены в системе (5) будет уничтожено слагаемое, пропорциональное наивысшей степени ω, т. е. $\omega^{n/2-1}$. Наивысшей степенью ω в преобразованной системе станет $\omega^{n/2-2}$. Слагаемое с такой степенью уничтожается на следующем шаге путем аналогичных преобразований. Повторяя преобразования описанного выше типа $k+1$ раз, от уравнения (1) придем к системе уравнений вида

$$\begin{gathered}\dot x_j=x_{j+1}+\omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-2j-1}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t)\\ +\omega^{-n/2}\varphi_{n-2j}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t)+\omega^{-(n+1)/2}\xi_{2j+1}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t)\\ +\omega^{-n/2}\xi_{2j}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t),\quad j=1,\dots,k;\\ x_{k+1}^{(n-k)}=\psi(x_1,\dots,x_{k+1}^{(p-k)},\omega t)+\beta(x_1,\dots,x_{k+1}^{(p-k)},\omega t,\omega)\\ +\chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)+B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)\dot x_{k+1}+\chi(x_1,\dots,x_{k+1},\dot x_{k+1},\omega t,\omega)\\ +\sum_{i=2}^{n-k-1}A_i(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t,\omega)x_{k+1}^{(i)}+\omega^{-n/2}C(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)x_{k+1}^{(n-k)}.\end{gathered}\tag{7}$$

Здесь $\xi_i(x_1,\ldots,x_i)=\xi_{io}(x_1,\ldots,x_{i-1})+\xi_{i1}(x_1,\ldots,x_{i-1})x_i$, $\varphi_0\equiv 0$, при нечетном n элементы χ_0, B_0 являются нулевыми, а χ имеет вид

$$\chi(x_1,\ldots,x_{k+1},z_{k+1},\tau,\omega)=\chi_1(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau,\omega)+A_1(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau,\omega)z_{k+1}.$$

Отметим, что $\chi_0(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau)$, $\chi(x_1,\ldots,x_{k+1},z_{k+1},\tau,\omega)$, $\chi_1(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau,\omega)$ — вектор-функции порядка m, а $B_0(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau)$, $A_i(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau,\omega)$, $C(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau)$ — квадратные матрицы-функции порядка m. Компоненты матриц A_i, а также вектор-функций χ_0, χ, χ_1, ξ_i являются полиномами относительно компонент x_s и x_s,z_{k+1}, $s\geqslant 2$, соответственно, причем коэффициенты этих полиномов, как компоненты матриц B_0, C и вектор-функций β, φ_i, непрерывны, удовлетворяют равномерному условию Липшица по x_i и l-периодичны по τ. Кроме того, указанные коэффициенты или компоненты элементов β, χ, χ_1, A_i являются бесконечно малыми при $\omega\to\infty$ равномерно относительно своих переменных, а элементы ξ_i, φ_i, χ_0, B_0, C имеют нулевые средние по τ.

2. Разрешив последнее уравнение системы (7) относительно старшей производной, перепишем ее в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{dt}=f(z,\omega t)+\alpha(z,\omega t,\omega), \tag{8}$$

где

$$z=(x_1,\ldots,x_n)^T,$$
$$f(z,\tau)=\Big(x_2,\ldots,x_{n-1},[E-\omega^{-n/2}C(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau)]^{-1}\Big(\psi(x_1,\ldots,x_{p+1},\tau)$$
$$+\chi_0(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau)+B_0(x_1,\ldots,x_{k+1},\tau)x_{k+2}\Big)\Big)^T,$$

а выражение $\alpha(z,\tau,\omega)$ после этого очевидно. Напомним, что мы рассматриваем задачу о $l\omega^{-1}$-периодических решениях системы (1), а потому и такую же задачу для системы (8). Наряду с возмущенной системой (8), рассмотрим усредненную систему

$$\frac{dw}{dt}=F(w), \tag{9}$$

где

$$w=(w_1,\ldots,w_n)^T,\quad F(w)=(w_2,\ldots,w_{n-1},\Psi(w_1,\ldots,w_{p+1}))^T.$$

Очевидно, система (9) имеет стационарное решение $w^0=(y_0,0,\ldots,0)$, причем это решение не вырождено, так как матрица $\frac{dF}{dw}(w^0)$ с первой наддиагональю $(E,\ldots,E)$, блоками $\frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(y_0,0,\ldots,0)$ в нижней строке и остальными нулевыми блоками, очевидно, обратима.

Лемма 1 [1]. *Пусть $\mu\in(0,1)$. Тогда существуют положительные числа r_1, ω_1 такие, что при $\omega>\omega_1$ система (8) в шаре $\|z-w^0\|_{C^\mu(\mathbb{R})}\leqslant r_1$ имеет единственное $l\omega^{-1}$-периодическое решение z_ω и при этом справедливо соотношение* $\lim_{\omega\to\infty}\|z_\omega-w^0\|_{C^\mu(\mathbb{R})}=0$.

Здесь $C^\mu(\mathbb{R})$ — обычное гёльдерово пространство заданных на оси $t\in\mathbb{R}$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^{mn}$.

3. Из леммы 1, с учетом вытекающего из (3) равенства

$$x_\omega=z_{\omega 1}+\omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(z_{\omega 1},\omega t)+\omega^{-n/2}\varphi_n(z_{\omega 1},\omega t), \tag{10}$$

следует существование такого $\omega_0>0$, что при $\omega>\omega_0$ уравнение (1) имеет $l\omega^{-1}$-периодическое решение x_ω, для которого выполняется указанное в теореме предельное соотношение.

Осталось доказать утверждение о локальной единственности решения x_ω. Для этого достаточно показать, что для тройки чисел μ, r_1, ω_1 фигурирующих в лемме 1, найдется такая пара чисел $r_0, \omega_0 \geqslant \omega_1$, что при $\omega \geqslant \omega_0$ каждому решению x_ω уравнения (1), удовлетворяющему неравенству

$$\|x_\omega - y_0\|_{C^k(\mathbb{R})} \equiv \sum_{i=0}^{k} \left\| \frac{d^i}{dt^i}[x_\omega(t) - y_0] \right\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant r_0, \tag{11}$$

отвечает решение v_ω уравнения (8) такое, что

$$\|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(\mathbb{R})} \leqslant r_1. \tag{12}$$

Из соотношения (3), первых k-равенств (7) и соотношения (11) легко видеть, что

$$\lim_{\substack{r_0 \to 0,\\ \omega \to \infty}} = \sum_{i=1}^{k+1} \|z_{\omega i} - w_i^0\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь последнее уравнение системы (7), в котором $x_i = z_i$. Покажем, что поскольку $z_{\omega i}$, $i = 1, \ldots, k+1$, — равномерные относительно $\omega \geqslant \omega_0$, ограниченные $l\omega^{-1}$-периодические вектор-функции, то найдется не зависящая от ω постоянная c, при которой выполняется оценка

$$\sum_{i=k+1}^{n} \|\dot{z}_{\omega i}\|_{C(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n-k} \|z^{(i)}_{\omega, k+1}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c. \tag{14}$$

При этом воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

Пусть r — натуральное число, M — произвольное множество и для каждого $\sigma \in M$ задано число $l_\sigma > 0$. Для дифференциального уравнения

$$x^{(r)} + A_{1\sigma}(t)x^{(r-1)} + \ldots + A_{r\sigma}x = f_\sigma(t), \tag{15}$$

где $A_{i\sigma}(t)$ — квадратные матрицы-функции, а $f_\sigma(t)$ — вектор-функции, непрерывные и l_σ-периодические, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2 [1]**.** *Пусть существует такое число c_0, что при каждом $\sigma \in M$ уравнение* (15) *имеет l_σ-периодическое решение $x_\sigma(t)$, и выполнены неравенства*

$$\|A_{i\sigma}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c_0, \quad \|f_\sigma\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c_0, \quad \|x_\sigma\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c_0.$$

Тогда найдется такое число c_1, что при всех $\sigma \in M$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^{r} \|x_\sigma^{(i)}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c_1.$$

Рассмотрим последнее уравнение системы (7) сначала при нечетном n. В этом случае указанное уравнение можно переписать в виде

$$x_{k+1}^{(n-k)} + \sum_{i=1}^{n-k-1} A_{i\omega}(t)x_{k+1}^{(i)} = f_\omega(t), \tag{16}$$

где

$$A_{i\omega}(t) = -[E - \omega^{-n/2}C(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t), \omega t)]^{-1}A_i(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t), \omega t, \omega),$$
$$f_\omega(t) = [E - \omega^{-n/2}C(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t), \omega t)]^{-1}[\psi(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t), \omega t)$$
$$+\beta(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t), \omega t, \omega) + \chi_1(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t), \omega t, \omega)].$$

Применяя лемму 2 к уравнению (16), получаем неравенство (14) в случае нечетных n. При четных n оценка (14) выводится аналогично. Действительно, в этом случае вектор-функция $\dot{x}_{k+1}$ равномерно ограничена относительно $\omega \geqslant \omega_0$, а потому возможная нелинейность относительно этой производной слагаемых ψ, β, χ уравнения (7) не препятствует применению леммы 2. Так что при четных n мы по-прежнему ее применяем к уравнению (16), в котором f_ω содержит дополнительное слагаемое $[E-\omega^{-n/2}C]^{-1}[\chi_0+\chi]$, элементы ψ, β зависят от $\dot{x}_{k+1}$ и A_1 заменено на B_0. Из соотношений (13), (14) и известного мультипликативного неравенства

$$\|\eta\|_{C^\mu(\mathbb{R})} \leqslant (2\|\eta\|_{C(\mathbb{R})})^{1-\mu}(\|\eta\|_{C^1(\mathbb{R})})^\mu, \quad \eta \in C^1(\mathbb{R}),$$

вытекает соотношение

$$\lim_{\substack{r_0\to 0,\\ \omega\to\infty}} \|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(\mathbb{R})} = 0,$$

из которого в свою очередь следует неравенство (12). $\triangleright$

2. Асимптотика периодического решения

2.1. Продолжим рассмотрение системы (1). Дополнительно к условиям § 1 будем полагать, что вектор-функции f_j имеют непрерывные производные по $z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]}$ любого порядка. Асимптотику периодического решения x_ω, о котором говорится в теореме 1, будем искать в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{-i/2}u_i + \sum_{i=n}^{\infty} \omega^{-i/2}[u_i + v_i(\omega t)], \tag{17}$$

где $u_i \in \mathbb{R}^m$, $v_i(\tau)$ — l-периодические функции со значениями в $\mathbb{R}^m$ с нулевым средним. Для нахождения коэффициентов асимптотики подставим ряд (17) в (1), разложим вектор-функции f_j, $j \geqslant 0$, в случае нечетного n, и f_j, $j > 0$, в случае четного n, в ряды Тейлора по переменным z_i с центром $w_j^0 = (y_0, 0, \dots, 0)$. Разложим f_0 в случае четного n в ряд Тейлора по переменным $z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]}$ с центром $w_0^0 = \left(y_0, 0, \dots, 0, \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}\right)$. После этого приравняем коэффициенты в обеих частях полученного равенства при одинаковых степенях ω. Обозначим через $A(f_j, -q/2)$ слагаемые при $\omega^{-q/2}$, получающиеся при разложении вектор-функции f_j. Заметим, что для $A(f_j, -q/2)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} A(f_j, -q/2) = &\sum_{\substack{i_{0,1}+\dots+(n-1)i_{0,n-1}+ni_{0,n} \\ +\dots+ji_{0,j}+\dots+(n-2r)i_{r,n}+\dots+ji_{r,j+2r}=j}} \frac{1}{i_{0,1}!\dots i_{r,j+2r}!} \\ &\times \frac{\partial^{i_{0,1}+\dots+i_{r,j+2r}} f_j(w_j^0, \omega t)}{\partial z_0^{i_{0,1}+\dots+i_{0,j}} \dots \partial z_r^{i_{r,n}+\dots+i_{r,j+2r}}} \\ \times &\Bigl(u_1^{i_{0,j}} \dots u_{n-1}^{i_{0,n-1}}(u_n+v_n)^{i_{0,n}} \dots (u_1+v_j)^{i_{0,j}} \dots v_n^{(r)i_{r,n}} \dots v_j^{(r)i_{r,j+2r}}\Bigr), \end{aligned} \tag{18}$$

где $ni_{n,n/2} = 0$ при четном n. Итак, приравнивая коэффициенты при $\omega^{(n-i)/2}$, получим

$$v_{n+i}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} A(f_j, -(i+j-n)/2). \tag{19}$$

Пользуясь формулами (18), (19), выведем уравнения для коэффициентов при положительных степенях ω. Средние от их правых частей равны нулю. Решая задачи о нахождении l-периодических с нулевым средним решений уравнений вида $\frac{\partial^n y}{d\tau} = g(\tau)$, где $g(\tau)$ — известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция, найдем v_n и вид v_j, $j = n+1, \ldots, 2n-1$:

$$\begin{gathered} v_n = \varphi_n(y_0, \tau), \\ v_j = \upsilon(y_0, \tau) u_{j-n} + C_j(u_1, \ldots, u_{j-n-1}, y_0, \tau), \end{gathered} \tag{20}$$

где $\upsilon(z_0, \tau) = \frac{\partial \varphi_n(z_0, \tau)}{\partial z_0}$, $C_j(u_1, \ldots, u_{j-n-1}, y_0, \tau)$ — известные вектор-функции с нулевым средним по τ. Действуя аналогично, придем к уравнению для коэффициентов при ω^0. Учитывая при этом, что y_0 — решение (2), найдем:

$$v_{2n} = \upsilon(y_0, \tau) u_n + C_{2n}(u_1, \ldots, u_{n-1}, y_0, \tau),$$

где $C_{2n}(u_1, \ldots, u_{2n-1}, y_0, \tau)$ — известная вектор-функция с нулевым средним по τ. Тем же способом получим уравнение для коэффициентов при $\omega^{-1/2}$. Потребуем теперь, чтобы среднее от правой его части равнялось нулю. Подставляя v_{n+1} и перенося известные в правую часть, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0) u_1 = a,$$

где a — известный вектор $\mathbb{R}^m$. Определив из этой системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ вектор u_1, найдем из (20) v_{n+1}. Теперь определим

$$v_{2n+1} = \upsilon(y_0, \tau) u_{n+1} + C_{2n+1}(u_1, \ldots, u_n, y_0, \tau),$$

где $C_{2n+1}(u_1, \ldots, u_{2n}, y_0, \tau)$ — известная вектор-функция с нулевым средним по τ. С помощью метода математической индукции легко доказать возможность нахождения описанным выше образом любых коэффициентов ряда (17).

2.2. Обозначим

$$x_{\omega,s}(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{s} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{s+n-1} \omega^{-i/2} v_i(\omega t).$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для любого $s = 0, 1, \ldots$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(\mathbb{R})} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2}, \tag{21}$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению l-периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция, и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

◁ Введем обозначение

$$y_{\omega,s}(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{s+n} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{s+2n} \omega^{-i/2} v_i(\omega t).$$

Из проведенных в этом параграфе рассуждений следует равенство

$$\begin{aligned} y_{\omega,s}^{(n)} = &\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}\big(y_{\omega,s}, \dot{y}_{\omega,s}, \dots, y_{\omega,s}^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t\big) \\ &+ \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^j f_{2j}\big(y_{\omega,s}, \dot{y}_{\omega,s}, \dots, y_{\omega,s}^{([n/2]-j)}, \omega t\big) + \gamma_s(t,\omega), \end{aligned} \tag{22}$$

где вектор-функция $\gamma_s(t,\omega)$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $|\zeta_s| = O(\omega^{-(s+1)/2})$. Полагая $z = x_\omega - y_{\omega,s}$ и вычитая из уравнения (1) уравнение (22), получим равенство

$$\begin{aligned} z^{(n)} = &\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \Bigg[\omega^{(2j-1)/2} \sum_{i=0}^{[(n+1)/2]-j} \int_0^1 \frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}\big(y_{\omega,s} + \theta z, \dot{y}_{\omega,s} + \theta \dot{z}, \dots, y_{\omega,s}^{([(n+1)/2]-j)} \\ &+ \theta z^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t\big)\, d\theta z^{(i)}\Bigg] + \sum_{j=0}^{[n/2]} \Bigg[\omega^j \sum_{i=0}^{[n/2]-j} \int_0^1 \frac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}\big(y_{\omega,s} + \theta z, \dot{y}_{\omega,s} \\ &+ \theta \dot{z}, \dots, y_{\omega,s}^{([n/2]-j)} + \theta z^{([n/2]-j)}, \omega t\big)\, d\theta z_i\Bigg] - \gamma_s(t,\omega). \end{aligned} \tag{23}$$

Преобразуем правую часть уравнения (23). Для простоты изложения продемонстрируем преобразование одного из слагаемых в правой части (23).

$$\begin{aligned} \omega^{n/2} \int_0^1 \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_{\omega,s} + \theta z, \omega t) d\theta z &= \omega^{n/2} \int_0^1 \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0 + \theta z, \omega t)\, d\theta z \\ + \omega^{n/2} \int_0^1 d\theta \int_0^1 &\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0 + \theta z + \theta_1(y_{\omega,s} - y_0), \omega t)\, d\theta_1 (y_{\omega,s} - y_0) z \\ &= \omega^{n/2} \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \omega t) z + \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0, \omega t) v_n + r_n(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_n(z) = &\omega^{n/2} \int_0^1 d\theta \int_0^1 \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0 + \theta_1 \theta z, \omega t)\, d\theta_1 z^2 \\ &+ \omega^{n/2} \int_0^1 d\theta \int_0^1 \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0 + \theta z + \theta_1(y_{\omega,s} - y_0), \omega t)\, d\theta_1 \\ &\times \left(\sum_{i=1}^{s+n} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n+1}^{s+2n} \omega^{-i/2} v_i(\omega t)\right) z \\ &+ \int_0^1 d\theta \int_0^1 d\theta_1 \int_0^1 \frac{\partial^3 f_n}{\partial z_0^3}\big(y_0 + \theta_2(\theta z + \theta_1(y_{\omega,s} - y_0))\big)\, d\theta_2 (\theta z + \theta_1(y_{\omega,s} - y_0)) v_n z. \end{aligned}$$

В результате получим уравнение

$$
\begin{aligned}
z^{(n)} &= g(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t) \\
&+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \left[\omega^{(2j-1)/2} \sum_{i=0}^{[n/2]-j} \frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t) z^{(i)} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{[(n-1)/2]} \left[\omega^{j} \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]-j} \frac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t) z^{(i)} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \omega^{(n-j)/2} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} h_{ji}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \omega t) z^{(i)} \\
&+ \omega^{n/2} N(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, \omega t, \omega) + M(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, \omega t, \omega) - \gamma_s(t, \omega),
\end{aligned} \tag{24}
$$

где в случае нечетного n

$$
\begin{aligned}
g(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) &= \frac{\partial f_0}{\partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) z \\
&+ \ldots + \omega^{(2j-1)/2} \frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_{[(n+1)/2]-j}}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau) z^{([(n+1)/2]-j)} \\
&+ \frac{\partial^2 f_{2j-1}}{\partial z_{([(n+1)/2]-j)} \partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau) v_n^{([(n+1)/2]-j)} z \\
&+ \ldots + \omega^{n/2} \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \tau) z + \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0, \tau) v_n(\tau) z + \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{\partial f_0}{\partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) z^{(i)} \\
&+ \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-j} \frac{\partial^2 f_{2j-1}}{\partial z_{[(n+1)/2]-j} \partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau) v_n^{([(n+1)/2]-j)}(\tau) z^{(i)},
\end{aligned}
$$

в случае четного n

$$
\begin{aligned}
g(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) &= \frac{\partial f_0}{\partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[n/2]} + v_n^{([n/2])}(\tau), \tau) z \\
&+ \frac{\partial f_0}{\partial z_{[n/2]}}(z_0, \ldots, z_{[n/2]} + v_n^{([n/2])}(\tau), \tau) z^{([n/2])} + \ldots + \omega^{j} \frac{\partial f_{2j}}{\partial z_{[n/2]-j}}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau) z^{([n/2]-j)} \\
&+ \frac{\partial^2 f_{2j}}{\partial z_{([n/2]-j)} \partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau) v_n^{([n/2]-j)} z + \ldots + \omega^{n/2} \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \tau) z + \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0, \tau) v_n(\tau) z \\
&+ \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{\partial f_0}{\partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[n/2] + v_n^{([n/2])}(\tau)}, \tau) z^{(i)} \\
&+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{i=1}^{[n/2]-j} \frac{\partial^2 f_{2j}}{\partial z_{[n/2]-j} \partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau)\, v_n^{([n/2]-j)}(\tau) z^{(i)}.
\end{aligned}
$$

Здесь компоненты вектор-функции $h_{ji}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \tau)$ являются полиномами относительно компонент $u_1, \ldots, u_{j-2i}$ с непрерывными, l-периодическими с нулевым средним коэффициентами, а компоненты вектор-функций $N(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau, \omega)$ и $M(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau, \omega)$ являются полиномами не выше второй степени относительно компонент переменных $z_0, \ldots, z_{[n/2]}$ с непрерывными, l-периодическими по τ и равномерно ограниченными относительно $|z_i| < 1$ и $\omega > 1$ коэффициентами. Отметим что N содержит лишь слагаемые второй степени. В уравнении (24) наивысшей степенью ω является $\omega^{n/2}$. Для уничтожения линейных слагаемых с таким коэффициентом проведем в этом уравнении замену переменных

$$z = x_1 + \omega^{-n/2}\chi_1(\omega t)x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega^{-(n+j)/2}\zeta_{1j}(\omega t)x_1 \equiv x_1 + \omega^{-n/2}\kappa_1(\omega t, \omega)x_1, \tag{25}$$

где матрица-функция $\chi_1(\tau)$ является l-периодическим с нулевым средним решением уравнения $\chi_1^{(n)} = \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \tau)$, а $\zeta_{1j}(\tau)$ — $\zeta_{1j}^{(n)} = \frac{\partial f_{n-j}}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0, \tau) + h_{j0}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \tau)$. Таким образом, $\chi_1(\tau) = \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_0}(y_0, \tau)$. В итоге придем к уравнению

$$\begin{gathered}
x_1^{(n)} = \frac{\partial \psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z_1}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)\dot{x}_1 \\
+ \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial z_{[n/2]}}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1^{([n/2])} \\
+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \left[\omega^{(2j-1)/2} \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-j} \frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1^{(i)}\right] \\
+ \sum_{j=1}^{[(n-1)/2]} \left[\omega^{j} \sum_{i=1}^{[n/2]-j} \frac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1^{(i)}\right] \\
+ \sum_{j=1}^{n-3} \omega^{(n-j)/2} \sum_{i=1}^{[(j-1)/2]} h_{ji}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \omega t)x_1^{(i)} \\
+ \sum_{i=2}^{n} \omega^{(n-i)/2}c_{1i}(\omega t)x_1^{([i/2])} + \sum_{i=n+1}^{2n} d_{1i}(\omega t, \omega)x_1^{([i/2])} \\
+ \omega^{n/2}N_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{([n/2])}, \omega t, \omega) \\
+ M_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{([n/2])}, \omega t, \omega) \\
+ \omega^{-1/2}P_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{([n/2])}, \omega t, \omega) - \gamma_s(t, \omega).
\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь матрицы-функции $c_{1i}(\tau)$ и $d_{1i}(\tau, \omega)$ непрерывны и l-периодичны по τ, причем $\langle c_{1i} \rangle = 0$, а d_{1i} — бесконечно малые при $\omega \to \infty$ равномерно относительно $\tau \in \mathbb{R}$. Компоненты вектор-функций $N_1(z_0, \ldots, z_{2[n/2]+1}, \tau, \omega)$, $M_1(z_0, \ldots, z_{2[n/2]+1}, \tau, \omega)$ и $P_1(z_0, \ldots, z_{2[n/2]+1}, \tau, \omega)$ являются полиномами не выше второй степени относительно компонент переменных $z_{[n/2]}, \ldots, z_{2[n/2]+1}$ с непрерывными, l-периодическими по τ и равномерно ограниченными относительно $|z_i| < 1$, $i = 0, \ldots, [n/2]$ и $\omega > 1$ коэффициентами. Отметим что N_1 содержит лишь слагаемые второй степени. Перепишем уравнение (26) в виде системы

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = y_1, \\
y_1^{(n-1)} = \frac{\partial \psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z_1}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)y_1 \\
+ \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial z_{[n/2]}}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)y_1^{([n/2]-1)}
\end{gathered}$$

$$+\sum_{j=1}^{[n/2]}\left[\omega^{(2j-1)/2}\sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-j}\frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_0,0,\dots,0,\omega t)y_1^{(i-1)}\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{[(n-1)/2]}\left[\omega^{j}\sum_{i=1}^{[n/2]-j}\frac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_0,0,\dots,0,\omega t)y_1^{(i-1)}\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{n-3}\omega^{(n-j)/2}+\sum_{i=1}^{[(j-1)/2]}h_{ji}(u_1,\dots,u_{j-2i},\omega t)y_1^{(i-1)}$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\omega^{(n-i)/2}c_{1i}(\omega t)y_1^{([i/2]-1)}+\sum_{i=n+1}^{2n}d_{1i}(\omega t,\omega)y_1^{([i/2]-1)}$$
$$+\,\omega^{n/2}N_1(z,\dot z,\dots,z^{([n/2])},x_1,y_1,\dots,y_1^{([n/2]-1)},\omega t,\omega)$$
$$+M_1(z,\dot z,\dots,z^{([n/2])},x_1,y_1,\dots,y_1^{([n/2]-1)},\omega t,\omega)$$
$$+\omega^{-1/2}P_1(z,\dot z,\dots,z^{([n/2])},x_1,y_1,\dots,y_1^{([n/2]-1)},\omega t,\omega)-\gamma_s(t,\omega).$$

В этой системе наивысшей степенью ω в линейных слагаемых является $\omega^{n/2-1}$. Для избавления от соответствующих больших слагаемых вновь проведем замену переменных

$$x_1=x_1,$$
$$y_1=x_2+\sum_{j=0}^{n-3}\omega^{-(n+j)/2}\zeta_{2j}(\omega t)x_2+\omega^{-n/2}\eta_2(\omega t)x_2\equiv x_2+\omega^{-n/2}\kappa_2(\omega t,\omega)x_2,$$

где матрица-функция $\zeta_{2j}(\tau)$ является l-периодическим с нулевым средним решением уравнения
$$\zeta_{2j}^{(n-1)}=\frac{\partial f_{n-j-2}}{\partial z_1}(y_0,0,\dots,0,\tau)+h_{j1}(u_1,\dots,u_{j+2i},\tau),$$
а $\eta_2(\tau)-\eta_2^{(n-1)}=c_{12}(\tau)$, $h_{01}\equiv 0$. Повторяя описанные выше преобразования $k+1$ раз, от системы (23) перейдем к системе уравнений

$$\dot x_j=x_{j+1}+\omega^{-n/2}\kappa_{j+1}(\omega t,\omega)x_{j+1},\quad j=1,\dots,k,$$
$$x_{k+1}^{(n-k)}=\frac{\partial\psi}{\partial z_0}(y_0,0,\dots,0,\omega t)x_1+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial z_{[n/2]}}(y_0,0,\dots,0,\omega t),$$
$$x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])}+\lambda_0(\omega t)\dot x_{k+1}+\sum_{i=1}^{n-k}d_{k+1,i}(\omega t,\omega)x_{k+1}^{(i)} \tag{27}$$
$$+\,\omega^{n/2}N_{j+1}(z,\dot z,\dots,z^{([n/2])},x_1,\dot x_1,\dots,x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])},\omega t,\omega)$$
$$+\,M_{j+1}(z,\dot z,\dots,z^{([n/2])},x_1,\dot x_1,\dots,x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])},\omega t,\omega)$$
$$+\,\omega^{-1/2}P_{j+1}(z,\dot z,\dots,z^{([n/2])},x_1,\dot x_1,\dots,x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])},\omega t,\omega)-\gamma_s(t,\omega).$$

Здесь матрицы-функции $\kappa_j(\tau,\omega)$, $\lambda_0(\tau)$ непрерывны и l-периодичны с нулевым средним по τ, κ_j, также равномерно ограниченны относительно $\omega>1$, а λ_0 при нечетных n нулевая. Элементы $d_{k+1,i}$, N_{k+1}, M_{k+1} и P_{k+1} аналогичны элементам d_{1i}, N_1, M_1 и P_1 соответственно. Вектор-функция z считается известной. Систему (27) перепишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешив ее относительно старшей производной

$$\dot{u} = Gu + f(u, t, \omega), \tag{28}$$

где $u = (x_1, \dots, x_n)^T$, $G = [E - d_{k+1,n-i}(\omega t, \omega)]^{-1} \frac{dF}{dw}(w^0)$ (см. выше), а выражение f после этого очевидно. Пусть $T_0 > 0$ такое число, что $e^{\lambda_i T_0} \neq 1$, где λ_i — собственные числа G. Мы воспользовались тем, что $\lambda_i \neq 0$ при достаточно больших ω. Положим $t_\omega = [T_0 l^{-1} \omega] l \omega^{-1}$. Согласно [2, с. 34], всякое t_ω-периодическое решение уравнения (28) удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} u(t) = [E - e^{t_\omega G}]^{-1} \int\limits_0^{t_\omega} e^{(t_\omega + t - \tau)G} f(u(\tau), \tau, \omega)\, d\tau \\ + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)G} f(u(\tau), \tau, \omega)\, d\tau \equiv [R(u, \omega)](t). \end{gathered} \tag{29}$$

Для $\mu \in (0, 1)$ определим величину $r_\omega = 2\|R(0, \omega)\|_{C^\mu(0,T_0)}$. Можно доказать, что при достаточно больших ω оператор $R(u, \omega)$ в шаре $V_w : \|u\|_{C^\mu(0,T_0)} \leqslant r_w$ является сжатием. Этот факт является следствием соотношений

$$\|R(u_2, \omega) - R(u_1, \omega)\|_{C^\mu(0,T_0)} \leqslant \frac{1}{2}\|u_2 - u_1\|_{C^\mu(0,T_0)}, \quad u_1, u_2 \in V_\omega,\ \omega \gg 1,$$
$$\|R(0, \omega)\|_{C^\mu(0,T_0)} = O(\omega^{-(s+1)/2}), \quad \omega \to \infty,$$

на доказательстве которых мы не останавливаемся. Из принципа сжатых отображений следует существование единственного в шаре V_ω t_ω-периодического решения, а значит, как легко убедиться, и $l\omega^{-1}$-периодического решения $u_\omega(t)$. Причем это решение подчинено оценке

$$\|u_\omega\|_{C^\mu(\mathbb{R})} \leqslant c_{s1} \omega^{-(s+1)/2}. \tag{30}$$

Вспомним, что $z = x_\omega - y_{\omega,s}$. Из (25) и установленной в теореме 1 локальной единственности решения x_ω уравнения (1) вытекает соотношение

$$x_\omega - y_{\omega,s} = u_{\omega 1} + \omega^{-n/2} \kappa_1(\omega t, \omega) u_{\omega 1}.$$

Из последнего соотношения, первых k уравнений системы (27) и оценки (30) следует

$$\|x_\omega - y_{\omega,s}\|_{C^k(\mathbb{R})} \leqslant c_{s2} \omega^{-(s+1)/2}.$$

Учитывая, что

$$y_{\omega,s}(t) - x_{\omega,s}(t) = \omega^{-(s+1)/2} \sum_{i=s+1}^{s+n} \omega^{(s+1-i)/2} u_i + \omega^{-(s+n)/2} \sum_{i=s+n}^{s+2n} \omega^{(s+n-i)/2} v_i(\omega t),$$

делаем вывод, что последняя оценка справедлива и при замене $y_{\omega,s}$ на $x_{\omega,s}$. $\rhd$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Валерию Борисовичу Левенштаму за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Левенштам В. Б.* Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 1.—С. 52–68.
2. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1966.—312 с.

Статья поступила 26 февраля 2010 г.

Ишмеев Марат Рашидович
Южный федеральный университет,
студент факультета математики, механики и компьютерных наук
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `bayern89@mail.ru`

THE ASIMPTOTICS OF A PERIODICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH GREAT HIGH-FREQUENCY TERMS

Ishmeev M. R.

The full asimptotics of a periodical solution for the systems of non-linear differential equations, containing terms proportional to a degrees of frequency is constructed.

Key words: differential equations, great high-frequency items, averaging method, asimptotic, substantion.