Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 4, С. 44–58

УДК **519.17**

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(95,40,12,20)$[1]

А. А. Махнев, Н. В. Чуксина

Выяснено строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов простых порядков сильно регулярного графа с параметрами $(95,40,12,20)$. Как следствие, доказано, что точечный граф частичной геометрии $pG_2(4,9)$ не является вершинно симметричным.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизм графа, частичная геометрия.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathscr{F}$-графом, если $[a]\in\mathscr{F}$ для любой вершины $a\in\Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\ldots,m_n$. Если $m_1=\ldots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m\geqslant 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой.* Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Частичной геометрией $pG_\alpha(s,t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Если $\alpha=1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00009, и РФФИ-БРФФИ, проект № 08-01-90006).

и обозначается $GQ(s,t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия называется *сетью. Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

В [1] доказано, что связный вполне регулярный граф, окрестности вершин которого являются псевдогеометрическими графами для $pG_2(4,t)$, либо является графом Тэйлора, либо сильно регулярен с параметрами $(210, 95, 40, 45)$ (и окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(95, 40, 12, 20)$). В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(95, 40, 12, 20)$ и определены подграфы их неподвижных точек. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u, u^g) таких, что $d(u, u^g) = i$.

Теорема. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(95, 40, 12, 20)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$. *Тогда верно одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 50$ *и* Γ *имеет кликовую* $\langle g\rangle$*-орбиту или* $p = 19$, $\alpha_1(g) = 38$;

(2) Ω *является* n*-кликой,* $p = 3$ *и либо* $n = 2$ *и* $\alpha_1(g)$ *сравнимо с* 6 *по модулю* 12, *либо* $n = 5$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на* 12;

(3) Ω *является* m*-кокликой и либо*

(*i*) $p = 5$, $m = 15$, $\alpha_1(g) = \alpha_1(g^2) = 20$ *или* $m = 10$, $\alpha_1(g) \in \{10, 70\}$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, m *нечетно,* $m \leqslant 17$ *и* $\alpha_1(g) - 2m - 2$ *делится на* 12;

(4) Ω *содержит* 2*-лапу и либо*

(*i*) $p = 3$, $\alpha_1(g) = 0$ *и* $|\Omega| \in \{11, 17, 23, 29\}$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, Ω *не является кокликой,* $|\Gamma - \Omega| = 2t$, $27 \leqslant t \leqslant 43$ *или* $t = 24$, *и каждая вершина из* Ω *смежна с вершиной из* $\Gamma - \Omega$.

С помощью этой теоремы получаем

Следствие. *Пусть* Γ *— точечный граф частичной геометрии* $pG_2(4, 9)$. *Тогда* Γ *не является вершинно симметричным.*

§ 1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leqslant d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leqslant r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

$\lhd$ Это утверждение хорошо известно (см., например, § 2 из [2]). $\rhd$

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(95, 40, 12, 20)$ и неглавными собственными значениями $2, -10$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$-10 \leqslant d - \frac{w(40-d)}{95-w} \leqslant 2.$$

Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 19 (не больше 5). Если C является 19-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 10 вершинами из C.

Лемма 1.2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v,k,λ,μ). Тогда либо $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ и кратность $n-m$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\quad n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

$\lhd$ Это лемма 3.1 из [3]. $\rhd$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X,\{R_0,\dots,R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ=QP=vI$. Здесь v — число вершин; k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей 1, f, $v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G=\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств $W_0\oplus W_1\oplus W_2$ матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g\in G$ получим

$$\chi_i(g)=v^{-1}\sum_{j=0}^{2}Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x,x^g)\in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1.3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(95,40,12,20)$, $G=\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$, $g\in G$ и χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 75. Тогда $\chi_1(g)=(10\alpha_0(g)+\alpha_1(g)-50)/12$.*

$\lhd$ Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(95,40,12,20)$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n-m=2$, $-m=-10$ кратностей 75, 19 и

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 2 & -10 \\ 54 & -3 & 9 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 75 & 15/4 & -25/6 \\ 19 & -19/4 & 19/6 \end{pmatrix},$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 75, равно $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3/4\alpha_1(g) - 5/6\alpha_2(g))/19$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 50)/12$. В частности, 2 делит $\alpha_1(g)$. $\triangleright$

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$. *Тогда*

$$(v - N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right) = x_0 + \sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i = x_i(\Delta)$.

$\triangleleft$ Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta$, $b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства:

$$v - N = \sum x_i,$$
$$kN - 2M = \sum i x_i,$$
$$\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum\binom{i}{2}x_i.$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое. $\triangleright$

§ 2. Автоморфизмы графа с параметрами $(95, 40, 12, 20)$

В этом параграфе Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(95, 40, 12, 20)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$.

Лемма 2.1. *Если* Ω *— пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*
(1) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 50$ *и* Γ *имеет 5-кликовую* $\langle g\rangle$*-орбиту;*
(2) $p = 19$, $\alpha_1(g) = 38$.

$\triangleleft$ Так как $95 = 5 \cdot 19$, то $p \in \{5, 19\}$.

Пусть $p = 5$. Тогда $\alpha_1(g) = 5w$ и 12 делит $5w - 50$, откуда $w = 10$ и $\alpha_1(g) = 50 = \alpha_1(g^2)$. Пусть t — число 5-кликовых $\langle g\rangle$-орбит. Тогда $2(50 - 5t) + 5t \leqslant 95$, откуда $t \geqslant 1$. В частности, Γ имеет 5-кликовую $\langle g\rangle$-орбиту.

Пусть $p = 19$. Тогда $\alpha_1(g) = 19w$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 12 делит $19w - 50$, откуда $w = 2$ и $\alpha_1(g) = 38$. $\triangleright$

В леммах 2.2–2.10 предполагается, что g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$ содержит вершину a. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 2.2. *Пусть* Ω *является* n*-кликой. Тогда* $p = 3$ *и либо* $n = 2$, $x_0 = 27$, $x_1 = 54$, $x_2 = 12$ *и* $\alpha_1(g)$ *сравнимо с 6 по модулю 12, либо* $n = 5$, $x_2 = 90$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на 12.*

$\triangleleft$ Подсчитав число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, а также число треугольников с основанием в Ω и вершиной в $\Gamma - \Omega$, получим равенства $\sum x_i = 95 - n$, $\sum i x_i = n(41 - n)$, $\sum \binom{i}{2} x_i = \binom{n}{2}(14 - n)$.

Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \leqslant 5$.

Пусть $n = 1$. Тогда p делит 40 и 54, поэтому $p = 2$. Пусть $u \in [a]$. Тогда подграф $[u] \cap [u^g]$ является g-допустимым, содержит четное число вершин и единственную неподвижную точку, противоречие.

Пусть $n = 2$. Тогда p делит 12 и 27, поэтому $p = 3$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ сравнимо с 6 по модулю 12. Далее, $x_i = 0$ для $i > 2$ и вышеуказанная система имеет единственное решение $x_0 = 27$, $x_1 = 54$, $x_2 = 12$.

Пусть $n = 3$. Тогда p делит 11 и 27. Противоречие.

Пусть $n = 4$. Тогда p делит 10 и 27. Противоречие.

Пусть $n = 5$. Тогда p делит 9 и 27, поэтому $p = 3$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 12 делит $\alpha_1(g)$. Так как для Ω достигается равенство в границе Хофмана для клик, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 2 вершинами из Ω, т. е. $x_2 = 90$. $\rhd$

Лемма 2.3. *Пусть Ω является m-кокликой ($m \geqslant 2$). Тогда $\sum x_i = 95 - m$, $\sum ix_i = 40m$, $\sum \binom{i}{2}x_i = 20\binom{m}{2}$ и верно одно из утверждений:*

(1) $p = 5$ и либо $m = 15$ и $\alpha_1(g) = \alpha_1(g^2) = 20$, либо $m = 10$ и $\alpha_1(g) \in \{10, 70\}$;

(2) $p = 2$, m нечетно, $5 \leqslant m \leqslant 17$, $\alpha_1(g) - 2m - 2$ делится на 12, в случае $m = 3$ имеем $x_0 = 32$ и $x_2 = 60$, а в случае $m = 5$ имеем $x_0 = 15$, $x_2 = 50$ и $x_4 = 25$.

$\lhd$ Уравнения для x_i получим, как и в лемме 2.2. $\rhd$

Для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует полурегулярно на $[a]\cap[b]$, $[a]-b^\perp$ и на $\Gamma_2(a)\cap\Gamma_2(b)-\Omega$, поэтому p делит 20 и $33-(m-2)$. Отсюда либо $p = 5$ и m делится на 5, либо $p = 2$ и m нечетно. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 2m - 2$ делится на 12.

Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $m \leqslant 19$ и в случае $m = 19$ любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 10 вершинами из Ω.

Пусть $p = 5$. Если $m = 15$, то $\alpha_1(g) \in \{20, 80\}$. Но в случае $\alpha_1(g) = 80$ получим $\alpha_1(g) + \alpha_1(g^2) \geqslant 100$ и Γ имеет 5-кликовую $\langle g\rangle$-орбиту U. Противоречие с тем, что a смежна с 0 или 5 вершинами из U. Значит, $\alpha_1(g) = \alpha_1(g^2) = 20$.

Если $m = 10$, то $\alpha_1(g) \in \{10, 70\}$.

Если $m = 5$, то $\alpha_1(g) = 60$. Отсюда $\alpha_1(g) + \alpha_1(g^2) = 120$ и снова Γ имеет 5-кликовую $\langle g\rangle$-орбиту U, противоречие.

Пусть $p = 2$. Если $m = 19$, то $\alpha_1(g) - 4$ делится на 12 и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 10 вершинами из Ω. Допустим, что вершины u, u^g смежны. Тогда $[u] \cap [u^g]$ содержит 10 вершин из Ω и еще 2 вершины w, w^g. Пусть a, b — различные вершины из $\Omega-[u]$. Если вершины a, w несмежны, то $[a]\cap[b]$ содержит не менее 22 вершин из $[u]\cup[u^g]$, противоречие. Значит, $[w]$ содержит $\Omega - [u]$ и 1 вершину из $[u] \cap \Omega$, и $[a] \cap [b]$ содержит w, w^g и по 9 вершин из $[u] - [u^g]$, $[u^g] - [u]$. Теперь для вершин $c, e \in \Omega - ([u] \cup \{a, b\})$ подграф $[c] \cap [e]$ содержит по 18 вершин из $([u] - ([u^g] \cup [a])) \cup ([u] - ([u^g] \cup [b])$ и из $([u^g] - ([u] \cup [a])) \cup ([u^g] - ([u] \cup [b])$, противоречие. Значит, $\alpha_1(g) = 0$, противоречие с тем, что $\alpha_1(g) - 4$ делится на 12.

Пусть $m = 3$. Тогда $x_0 = 32$ и $x_2 = 60$.

Пусть $m = 5$. Тогда $x_0 + x_2 + x_4 = 90$, $2x_2 + 4x_4 = 200$, $x_2 + 6x_4 = 200$. Поэтому $x_0 = 15$, $x_2 = 50$, $x_4 = 25$. $\rhd$

Лемма 2.4. *Ω не является объединением m ($m \geqslant 2$) изолированных клик порядков $n_1, \ldots, n_m$ и $n_1 \geqslant 2$.*

$\lhd$ Если a, c — несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и p делит 20.

Пусть $n_1 \geqslant 2$ и a, b — смежные вершины из n_1-клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^\perp$ и на $[a] \cap [b] - \Omega$, то p делит 27 и $12 - (n_1 - 2)$, поэтому $p = 3$, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ содержит полный двудольный подграф $K_{m,n}$, то $mn \leqslant 100$;*

(2) *если* $x \in \Omega$, $u \in \Gamma - \Omega - [x]$ *и* $[x] \cap [u]$ *содержится в* Ω, *то* $p = 2$;

(3) Ω *не является сильно регулярным графом с параметрами* $(v', k', 12, 20)$ *и* $p \leqslant 19$;

(4) Ω *не является сильно регулярным графом с параметрами* $(v', k', 12, 20 - p)$ *или* $(v', k', 12 - p, 20)$.

$\lhd$ Если Γ содержит полный двудольный подграф $\Delta = K_{m,n}$, то наименьшее собственное значение графа Δ равно $-\sqrt{mn}$ и не меньше -10, поэтому $mn \leqslant 100$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $x \in \Omega$ и $u \in \Gamma - (\Omega \cup [x])$. Если $[x] \cap [u] \subset \Omega$, то $|\Omega \cap [u]| \geqslant 20$ и подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой. Отсюда $|\Omega \cap [u]| = |\Omega \cap [u^g]| = 20$ и $[u] \cap \Omega = [u^g] \cap \Omega$. Заметим, что $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)| = 33$ и степень x в графе $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ равна 20. Если $p \geqslant 3$, то $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ содержит вершину u^{g^2} и степень u^{g^2} в графе $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ равна 20. Противоречие с тем, что $[x] \cap [u^{g^2}] = [u] \cap [u^g]$. Значит, $p = 2$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 12, 20)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' - 16$ и 20 делит $k'(k' - 13)$. Поэтому $k' = 29$ и $n = 10$. Но в этом случае 20 не делит $k'(k' - 13)$. Противоречие.

Допустим, что $p \geqslant 23$. Тогда $\lambda_\Omega = 12$, $\mu_\Omega = 20$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 12, 20)$. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 12, 20 - p)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 - 12p - 16$ и $20 - p$ делит $k'(k' - 13)$.

Допустим, что Ω — полный многодольный граф $K_{a \times b}$. Тогда $(a - 1)b = 20 - p$ и $(a - 2)b = 12$, поэтому $b = 8 - p$ делит 12, откуда $p = 2$ и $\Omega = K_{4 \times 6}$, либо $p = 5$ и $\Omega = K_{6 \times 3}$.

В случае $p = 19$ имеем $n = 15$, $k' = 27$ и Ω имеет собственное значение -2, противоречие.

В случае $p = 17$ имеем $n^2 = 4k' + 69$ и $14 \leqslant (n^2 - 69)/4 \leqslant 39$, n нечетно. Тогда $n \in \{13, 15\}$. При $n = 13$ имеем $k' = 25$ и Ω имеет собственное значение -2, противоречие. При $n = 15$ имеем $k' = 39$ и Ω имеет собственные значения 12, -3, причем кратность собственного значения 12 равна $2 \cdot 39 \cdot 42/(15 \cdot 3)$, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $n^2 = 4k' - 3$ и $14 \leqslant (n^2 + 3)/4 \leqslant 39$, n нечетно. Тогда $n \in \{9, 11\}$. При $n = 9$ имеем $k' = 21$ и Ω имеет собственное значение -2, противоречие. При $n = 11$ имеем $k' = 31$, противоречие с тем, что 7 не делит $k'(k' - 13)$.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' - 27$. Тогда $n \in \{7, 9, 11\}$. Так как 9 делит $k'(k' - 13)$, то $n = 9$, $k' = 27$ и Ω имеет собственные значения 6, -3, причем кратность собственного значения 6 равна 20. Итак, Ω имеет параметры $(70, 27, 12, 9)$. Противоречие с тем, что $p = 11$ не делит $40 - 27$.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' - 51$; тогда $n \in \{3, 5, 7, 9\}$, поэтому $k' \in \{15, 19, 25, 33\}$. Противоречие с тем, что 13 не делит $k'(k' - 13)$.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' - 51$; тогда $n \in \{3, 5, 7, 9\}$, поэтому $k' \in \{15, 19, 25, 33\}$. При $n = 3$, $k' = 15$ имеем $k' = \mu$ и Ω — полный многодольный граф $K_{6 \times 3}$. Но по лемме 1.1, примененной к подграфу Ω степени $d = 15$ на $w = 18$ вершинах, имеем противоречие с тем, что

$$-10 \leqslant d - \frac{w(40 - d)}{95 - w} \leqslant 2.$$

При $n = 5$, $k' = 19$ противоречие с тем, что 15 не делит $k'(k' - 13)$. В случаях $n = 7$, $k' = 25$ и $n = 7$, $k' = 25$ противоречие с тем, что не выполнены условия целочисленности.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' - 43$. Тогда $n \in \{5, 7, 9\}$. Так как 17 делит $k'(k' - 13)$, то $n = 5$, $k' = 17 = \mu$, противоречие.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' - 36$; тогда $n/2 \in \{3, 4, 5\}$, поэтому $k' \in \{18, 25, 34\}$. Так как 18 делит $k'(k' - 13)$, то $n = 6$, $k' = 18$, причем $k' = \mu$ и Ω — полный многодольный граф $K_{4\times 6}$. По лемме 1.1, примененной к подграфу Ω степени $d = 18$ на $w = 24$ вершинах, имеем

$$-10 \leqslant d - \frac{w(40-d)}{95-w} \leqslant 2.$$

Противоречие с тем, что $24 \cdot 22/71 > 36$.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 12-p, 20)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 + 16p - 16$ и 20 делит $k'(k' - 13 + p)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a\times b}$. Тогда $(a-1)b = 20$ и $(a-2)b = 12 - p$, поэтому $b = p + 8$ делит 20, откуда $p = 2$ и $\Omega = K_{3\times 10}$. По лемме 1.1, примененной к подграфу Ω степени $d = 20$ на $w = 30$ вершинах, имеем

$$-10 \leqslant d - \frac{w(40-d)}{95-w} \leqslant 2.$$

Противоречие с тем, что $30 \cdot 20/65 > 18$.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' + 281$ и $21 \leqslant (n^2 - 281)/4 \leqslant 39$, причем n нечетно. Противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' + 145$, поэтому $n = 17$, $k' = 36$, но нарушается условие целочисленности. В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' + 89$, поэтому $n = 15$, $k' = 34$ и 20 не делит $k'(k' - 13 + p)$. В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' + 41$, поэтому $n = 13$, $k' = 32$ и 20 не делит $k'(k' - 13 + p)$.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' + 20$, $25 < n^2/4 \leqslant 44$, $n/2 = 6$, $k' = 31$, противоречие с тем, что нарушается условие целочисленности.

Итак, Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 12-p, 20)$. $\triangleright$

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Отметим следующее свойство:

$(*)$ если u смежна с u^g, то $|\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp| = 27$ и $|\Omega|$ не больше 39; если же u несмежна с u^g, то $|\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)| = 33$ и $|\Omega|$ не больше 53.

Аналогично получается свойство:

$(**)$ если орбита $u^{\langle g\rangle}$ содержит треугольник (3-коклику), то $|\Omega| \leqslant 11$ (соответственно $|\Omega| \leqslant 32$).

Лемма 2.6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $p \neq 19$*;*

(2) $p \neq 17$ *и* $p \neq 13$.

$\triangleleft$ Пусть $p = 19$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 12 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 1 или 20 вершин, причем ввиду леммы 2.5 обе возможности встречаются. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 19t$, $1 \leqslant t \leqslant 4$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 19 или 38 вершинами из $\Gamma - \Omega$. С другой стороны, вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с 12 вершинами из Ω (если для вершины u из $\Gamma - \Omega$ ее $\langle g\rangle$-орбита является кокликой, то каждая вершина из $\Gamma - \langle g\rangle$ смежна точно с 10 вершинами из $\langle g\rangle$ и $[u]$ не пересекает Ω). Отсюда $19|\Omega| \leqslant 12(95 - |\Omega|)$, $|\Omega| \leqslant 36$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 76$ и $|\Omega| = 19$. Таким образом, каждая вершина из Ω смежна с 38 вершинами из $\Gamma - \Omega$ (если вершина a из Ω смежна с 19 вершинами из $\Gamma - \Omega$, то $|\Omega(a)| = 21$). Противоречие с тем, что каждая вершина из $\Omega - a^\perp$ смежна с единственной вершиной из $\Omega(a)$ и степень вершины из $\Omega(a)$ в графе Ω не меньше 9.

Пусть $p = 17$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 12 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 3 или 20 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 17t$,

$1 \leqslant t \leqslant 4$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 17 или 34 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Если вершина a из Ω смежна с 34 вершинами из $\Gamma - \Omega$, то $|\Omega(a)| = 6$, противоречие. Таким образом, каждая вершина из Ω смежна с 17 вершинами из $\Gamma - \Omega$. С другой стороны, вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с 12 вершинами из Ω и $t = 4$. Тогда $|\Omega| = 27$ и $|\Gamma - \Omega| = 68$. Противоречие с тем, что для смежных вершин $a, c \in \Omega$ подграф Ω содержит a, c, 12 вершин из $[a] \cap [c]$ и по 10 вершин из $[a] - c^{\perp}$ и из $[c] - a^{\perp}$.

Пусть $p = 13$. Если $u \in \Gamma - \Omega$ и $|[u] \cap \Omega| \geqslant 2$, то $[u] \cap \Omega$ — коклика. Если $u^{\langle g \rangle}$ — также коклика, то по лемме 2.5 имеем $|[u] \cap \Omega| \leqslant 7$. Если же $u^{\langle g \rangle}$ содержит ребро, то $|[u] \cap \Omega| \leqslant 12$. Далее, $\lambda_{\Omega} = 12$ и для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 7 или 20 вершин, причем ввиду леммы 2.5 обе возможности встречаются. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 13t$, $1 \leqslant t \leqslant 6$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 13 или 26 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Поэтому $13|\Omega| \leqslant 12(95 - |\Omega|)$, $|\Omega| \leqslant 45$ и $4 \leqslant t \leqslant 6$.

В случае $t = 4$ получим $|\Omega| = 43$ и по свойству $(*)$ имеем $\alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $10\alpha_0(g) - 50 = 380$ делится на 12, противоречие.

В случае $t = 6$ получим $|\Omega| = 17$ и Ω — сильно регулярный граф с $\lambda_{\Omega} = 12$, $\mu_{\Omega} = 7$, противоречие. В случае $t = 5$ получим $|\Omega| = 30$. Для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит не более 20 вершин, поэтому $|\Omega| \geqslant 2 + 14 + 20$, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.7. *Верны неравенства* $p \neq 11$ *и* $p \neq 7$.

$\lhd$ Пусть $p = 11$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 1 или в 12 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 9 или 20 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 11t$ и по свойству $(*)$ имеем $4 \leqslant t \leqslant 7$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 11 или 22 вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с 29 или 18 вершинами из Ω). Пусть Ω содержит β_i вершин, смежных с $11i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$.

Пусть $t = 6$. Тогда $|\Omega| = 29$ и Ω — сильно регулярный граф степени 18 с $\lambda' = 12$ и $\mu' = 9$. Противоречие с леммой 2.5.

Пусть $t = 5$. Тогда $|\Omega| = 40$ и по свойству $(*)$ имеем $\alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $10\alpha_0(g) - 50 = 350$ делится на 12, противоречие.

Пусть $t = 4$. Тогда $|\Omega| = 51$ и по свойству $(*)$ имеем $\alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $10\alpha_0(g) - 50 = 460$ делится на 12, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда любая $\langle g \rangle$-орбита длины 7 является кликой, кокликой, семиугольником или дополнительным графом к семиугольнику. Далее, любое ребро графа Ω лежит в 5 или в 12 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 6, 13 или 20 вершин. По свойству $(**)$ имеем $|\Omega| \leqslant 32$. Вершина из Ω смежна с 14, 21 или 28 вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с 26, 19 или 12 вершинами из Ω).

Если $|\Omega| > 11$, то по свойству $(**)$ имеем $\alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_0(g) - 5$ делится на 6, противоречие. Если же $|\Omega| = 11$, то Ω — регулярный граф степени 5 на 11 вершинах, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.8. *Если* $p = 5$, *то* Ω *является кокликой.*

$\lhd$ Пусть $p = 5$ и Ω не является кокликой. Тогда любая $\langle g \rangle$-орбита длины 5 является кликой, кокликой или пятиугольником. Далее, любое ребро графа Ω лежит в 2, 7 или в 12 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 0, 5, 10, 15 или 20 вершин.

По свойству $(**)$ имеем $|\Omega| \leqslant 32$. Если $|\Omega| > 11$, то по свойству $(**)$ имеем $\alpha_1(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_0(g) - 5$ делится на 6, противоречие.

Если же $|\Omega| = 10$, то $\Omega(a)$ — пятиугольник для некоторой вершины a из Ω, и связная компонента графа Ω, содержащая a, является графом икосаэдра, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.9. *Если $p = 3$, то либо Ω является кликой, либо $\alpha_1(g) = 0$, и $|\Omega| \in \{11, 17, 23, 29\}$.*

$\lhd$ Пусть $p = 3$ и Ω не является кликой. Тогда любая $\langle g\rangle$-орбита длины 3 является кликой или кокликой. Далее, $|\Omega|$ сравнимо с 2 по модулю 3 и любое ребро графа Ω лежит в $3i$ треугольниках из Ω, $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$. Для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2+3j$ вершин, $j \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Ввиду свойства ($**$) имеем $|\Omega| \leqslant 32$.

Пусть $|\Omega| = 5$. Так как Ω не является кликой, то Ω содержит несмежные вершины a, b, 2 вершины из $\Omega(a) \cap [b]$ и по 2 вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 8$. Тогда степень любой вершины из Ω равна 1, 4 или 7. Если вершины a, b из Ω несмежны, то Ω содержит 2 вершины из $[a] \cap [b]$ и степени a, b не меньше 4. Отсюда Ω не содержит вершин степени 1. Если степени всех вершин в Ω равны 7, то граф Ω является кликой, противоречие. Если степени всех вершин в Ω равны 4, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(8, 4, 3, 2)$, противоречие. Пусть степень вершины $a \in \Omega$ равна 4, степень вершины $b \in \Omega$ равна 7. Тогда вершины a и b смежны и $\Omega(a) \cap [b]$ является 3-кликой. Таким образом, Ω содержит точно 2 вершины b, b' степени 7 и $\Omega - \{b, b'\}$ является объединением двух изолированных треугольников. По лемме 1.5 получим $x_0 + \sum_{i=3}^{8} \binom{i-1}{2} x_i = 87 - (320 - 38) + (12 \cdot 19 + 20 \cdot 9 - 42 - 36) = 135$. С другой стороны, каждая вершина вне 5-клики L из Γ смежна точно с двумя вершинами из L. Поэтому $x_2 = 6$, $x_3 = 54$, $x_4 = 27$.

Пусть $|\Omega| = 11$. Тогда степень любой вершины в Ω равна 1, 4, 7 или 10. Если вершины a, b из Ω несмежны, то Ω содержит 2 вершины из $[a] \cap [b]$ и степени a, b не меньше 4. Отсюда Ω не содержит вершин степени 1. Пусть Ω содержит δ вершин $a_1, \dots, a_\delta$ степени 10, $\Omega_0 = \Omega - \{a_1, \dots, a_\delta\}$. Если $\delta = 3$, то Ω_0 — регулярный граф степени 4 с $\mu = 2$ на 8 вершинах и $\lambda(\Omega_0) \in \{0, 3\}$. Если для $b \in \Omega_0$ подграф $\Omega_0(b)$ содержит вершину степени 3, то $b^\perp \cap \Omega_0$ является 5-кликой, противоречие. Значит, Ω_0 — сильно регулярный граф с параметрами $(8, 4, 0, 2)$, противоречие.

Если $\delta = 2$, то Ω_0 — граф со степенями вершин 2 и 5. Поэтому $\lambda(\Omega_0) \in \{1, 4\}$, $\mu(\Omega_0) \in \{0, 3\}$. Если степень b в Ω_0 равна 5, то подграф $\Omega_0(b)$ содержит вершину c степени 4 и либо $\Omega_0(b) \cap \Omega_0(c)$ является 4-кокликой, либо $b^\perp \cap \Omega_0$ является 6-кликой. В первом случае имеем противоречие с тем, что любая вершина из $\Omega_0(b) \cap \Omega_0(c)$ смежна с 3 вершинами из $\Omega_0 - a^\perp$. Во втором случае Ω_0 — объединение изолированной 6-клики и треугольника, противоречие. Если же Ω_0 не содержит вершин степени 5, то Ω_0 — объединение трех изолированных треугольников.

Если $\delta = 1$, то Ω_0 — граф со степенями вершин 3 и 6 на 10 вершинах, $\lambda(\Omega_0) \in \{2, 5\}$, $\mu(\Omega_0) \in \{1, 4\}$. Если для $b \in \Omega_0$ подграф $\Omega_0(b)$ содержит вершину степени 5, то либо $\Omega_0(b) \cap \Omega_0(c)$ является 4-лапой, либо $b^\perp \cap \Omega_0$ является 7-кликой, противоречие. Таким образом, Ω_0 содержит такую 4-коклику C, что окрестность в Ω_0 любой вершины из C — объединение двух изолированных треугольников, противоречие. Значит, $\lambda(\Omega_0) = 2$ и $\Omega_0(b)$ — шестиугольник или объединение двух изолированных треугольников для некоторой вершины $b \in \Omega_0$. Поэтому $\Omega_0 - b^\perp$ — треугольник, и каждая его вершина смежна с 1 или 4 вершинами из $\Omega_0(b)$. Противоречие с тем, что любая вершина из $\Omega_0(b)$, смежная с вершиной из $\Omega_0 - b^\perp$, смежна с 3 вершинами из $\Omega_0 - b^\perp$.

Пусть $\delta = 0$. Если степень вершины b в Ω равна 4, то подграф $\Omega(b)$ является 4-кликой или 4-кокликой. В любом случае число ребер между $\Omega(b)$ и $\Omega - b^\perp$ равно 12. Если $\Omega(b)$ — клика, то $\Omega(b)$ содержит две пары вершин c, c' и d, d', смежные с общими тройками вершин из $\Omega - b^\perp$. Противоречие с тем, что $\Omega(c) - b^\perp$ — регулярный граф степени 1 на 3 вершинах.

Значит, $\Omega(b)$ — коклика и каждая вершина из $\Omega(b)$ смежна с 3 вершинами из $\Omega - b^\perp$.

Если $\Omega_0 - b^{\perp}$ содержит две вершины d, e такие, что $\Omega(b) \cap d^{\perp} = \Omega(b) \cap e^{\perp}$, то для $c, c' \in \Omega(b) \cap [d]$ получим $\Omega \cap c^{\perp} = \Omega \cap (c')^{\perp}$. Противоречие с тем, что $\Omega(c)$ — коклика. Итак, $\Omega - b^{\perp}$ можно отождествить с множеством пар вершин из $\Omega(b) = \{c_1, \ldots, c_4\}$ и Ω — регулярный граф степени 4. Противоречие с тем, что Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(11, 4, 0, 2)$.

Таким образом, если $|\Omega| = 11$, то Ω содержит точно 2 вершины b, b' степени 10 и $\Omega - \{b, b'\}$ является объединением трех изолированных треугольников. Поэтому $x_2 = 3$, $x_4 = 54$, $x_6 = 27$.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$, $|[u] \cap \Omega| = \gamma$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - u^{\langle g \rangle}$, смежных точно с i вершинами из $u^{\langle g \rangle}$, $y_i = |Y_i|$.

Если $u^{\langle g \rangle}$ является кликой, то $y_3 = 3x + \gamma$, $y_2 = 33 - 9x - 3\gamma$, $y_1 = 48 + 9x + 3\gamma$. Поэтому $[u] \cup [u^g] \cup [u^{g^2}]$ содержит $84 + 3x$ вершин из $\Gamma - \Omega$ и $|\Omega| \leqslant 11$. Допустим, что $[u] \cap \Omega$ содержит ребро $\{a, b\}$. Тогда $L = u^{\langle g \rangle} \cup \{a, b\}$ является 5-кликой и любая вершина из $\Gamma - L$ смежна точно с 2 вершинами из L. Противоречие с тем, что $|\Omega|$ равно сумме 2 и степеней в Ω вершин a, b.

Пусть $|\Omega| = 11$. Тогда $\gamma \leqslant 3$ и множество вершин, смежных с их образами под действием g, содержится в X_2. Противоречие с тем, что $\alpha_1(g)$ делится на 12.

Пусть $|\Omega| = 8$. Как показано выше, Ω содержит точно 2 вершины b, b' степени 7 и $\Omega - \{b, b'\}$ является объединением двух изолированных треугольников. Поэтому множество вершин, смежных с их образами под действием g, совпадает с X_2 и $\gamma = 2$. Пусть $c \in Y_0 \cap \Omega$, $|[c] \cap Y_i - \Omega| = z_i(c) = z_i$. Если $c \notin \{b, b'\}$, то $\sum z_i = 36$, $\sum i z_i = 57$. В случае $z_3 = 0$ получим $z_2 = 21 + z_0$, а в случае $z_3 = 3$ получим $z_2 = 15$. Если c, c' — смежные вершины из $\Omega \cap Y_0 - \{b, b'\}$, то $[c] \cap [c']$ содержит 3 вершины из Ω и не менее 12 вершин из Y_2, противоречие. Итак, $\alpha_1(g) = 0$, t четно и $|\Omega|$ нечетно. Отсюда $|\Omega| \in \{11, 17, 23, 29\}$. $\rhd$

Лемма 2.10. *Если $p = 2$ и Ω не является кокликой, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $|\Gamma - \Omega| = 2t$ *и* $t \leqslant 43$*;*

(2) *каждая вершина из Ω смежна с вершиной из $\Gamma - \Omega$;*

(3) $t = 24$ *или* $t \geqslant 27$.

$\lhd$ Пусть $p = 2$ и Ω не является кокликой. Тогда любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках из Ω, $i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2j$ вершин, $j \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

Положим $\Delta = \Gamma - \Omega$. Тогда $|\Delta| = 2t$ и ввиду свойства $(*)$ имеем $21 \leqslant t \leqslant 46$. Заметим, что любая вершина из Δ смежна с четным числом вершин из Ω. Пусть X_i — число вершин из Δ, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Заметим, что вершина из Ω смежна с $2i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с $40 - 2i$ вершинами из Ω). Если t сравнимо с i по модулю 3, то $\alpha_1(g)$ сравнимо с $-4i$ по модулю 12.

Пусть $t = 46$. Тогда $|\Omega| = 3$, $|\Delta| = 92$ и $\alpha_1(g) = 8 + 12r$. Так как Ω не является кокликой, то Ω содержит смежные вершины a, b, причем степени этих вершин равны 2. Противоречие с тем, что любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках из Ω.

Пусть $t = 45$. Тогда $|\Omega| = 5$, $|\Delta| = 90$ и $\alpha_1(g) = 12r$. Степень любой вершины в Ω равна 0, 2 или 4. Допустим, что Ω содержит 2 вершины a, b степени 4. Тогда подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 3 вершины, противоречие. Пусть степень вершины a в Ω равна 4 и b — вершина степени 2. Тогда Ω содержит вершины a, b, 3 вершины из $[a] - b^{\perp}$ и 1 вершину из $[b] - a^{\perp}$, противоречие. Значит, Ω не содержит вершин степени 4. Так как любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2j$ вершин, то Ω не является пятиугольником и не содержит треугольников. Значит, Ω является объединением 4-цикла $bcde$ и изолированной вершины a. Пусть $X_i' = X_i \cap [a]$, $x_i' = |X_i'|$. Тогда $x_2' + x_4' = 40$ и $x_2' + xy_4' = 80$, поэтому $x_2' = x_4' = 20$. С другой стороны, $x_0 + x_2 + x_4 = 90$, $x_2 + 2x_4 = 96$ и $x_2 + 6x_4 = 48 + 120 - 4 = 164$. Поэтому $x_4 = 17$, противоречие.

Пусть $t = 44$. Тогда $|\Omega| = 7$, $|\Delta| = 88$ и $\alpha_1(g) = 4 + 12r$. Степень любой вершины в Ω равна 0, 2, 4 или 6. Пусть Ω содержит вершину a степени 6, $b \in \Omega(a)$. Тогда Ω содержит 2 вершины a, b, $2i$ вершин из $[a] \cap [b]$ и $5 - 2i$ вершин из $[a] - b^{\perp}$, противоречие с тем, что степень b в графе Ω нечетна.

Если степени всех вершин в графе Ω равны 4, то $\mu_\Omega = 4$ (иначе Ω содержит не менее 8 вершин). В этом случае Ω является полным многодольным графом, противоречие. Допустим, что Ω содержит смежные вершины a, b степени 4. Тогда $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = 2$, $|\Omega(a) - b^{\perp}| = |\Omega(b) - a^{\perp}| = 1$ и $\Omega - (a^{\perp} \cup b^{\perp}) = c$, причем вершина c либо изолирована в Ω, либо $\Omega(c) = \Omega(a) \cap [b]$. Выберем вершину $e \in \Omega(a) - b^{\perp}$. Тогда e смежна либо с вершиной из $\Omega(a) \cap [b]$, либо с вершиной из $\Omega(b) - a^{\perp}$. В последнем случае для $d \in \Omega(a) \cap [b]$ получим $|\Omega(e) \cap [d]| = 1$, противоречие. Значит, $\Omega(c) = \Omega(a) \cap [b]$ и $|\Omega(c) \cap [e]| = 1$, снова противоречие.

Допустим, что Ω содержит 2 несмежные вершины a, b степени 4. Тогда $\Omega(a) = \Omega(b)$ состоит из вершин d_i степени 2 в Ω и Ω содержит единственную изолированную вершину c. В этом случае $x_0 + x_2 + x_4 + x_6 = 88$, $2x_2 + 4x_4 + 6x_6 = 264$ и $x_2 + 6x_4 + 15x_6 = 96 + 260 - 16 = 340$. Поэтому $x_4 = 52 - 3x_6$, $x_2 = 28 - 9x_6$ и $x_0 = 8 + 11x_6$. В случае $x_6 = 2$ получим $x_4 = 46$, $x_2 = 10$ и $x_0 = 30$. Если $[c]$ не пересекает X_6, то X_4 содержит 40 вершин из $[c]$ и 6 вне $[c]$. Тогда некоторая вершина u из X_0 смежна не более чем с 1 вершиной из X_6 и число 2-путей с началом в u и концом в Ω не больше $26 \cdot 4 + 6 + 10 \cdot 2$, противоречие. Положим $X_6 = \{p, p^g\}$ и $|[p] \cap X_i| = y_i$. Тогда $\sum y_i = 34$ и $\sum iy_i$ равно 80, если $[p]$ не содержит a, равно 78, если $[p]$ не содержит d_i. Далее, $[c]$ содержит по 2 вершины из X_2, X_6 и 36 вершин из X_4. Если $u \in X_0 - ([p] \cup [p^g])$, то $[u]$ содержит не более 20 вершин из $X_4 \cap [c]$, не более 10 вершин из $X_4 - [c]$ и не более 10 вершин из X_2. Отсюда $[u] \cap [u^g]$ содержит по 10 вершин из X_2, $X_4 - [c]$ и 4 вершины из $X_4 \cap [c]$, противоречие. Пусть $u \in X_0 \cap [p] - [p^g]$. Если $[u]$ содержит 19 вершин из $X_4 \cap [c]$, то число 2-путей с началом в u и концом в Ω не больше $6 + 29 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 138$, противоречие. Если $[u]$ содержит не более 18 вершин, то число указанных 2-путей будет еще меньше. Значит, $x_6 = 0$.

В случае $x_6 = 0$ получим $x_4 = 52$, $x_2 = 28$ и $x_0 = 8$. Далее, число 2-путей с началом в a, концом в Ω и средней вершиной в $\Gamma - \Omega$ равно $16 + 20 + 48 = 84$. С другой стороны, $[a]$ содержит не более 28 вершин из X_2 и не менее 8 вершин из X_4, поэтому число указанных путей не меньше $8 \cdot 4 + 28 \cdot 2$, противоречие.

Допустим, что Ω содержит единственную вершину a степени 4. Тогда $|\Omega(b_i) \cap [b_j]| = 1$ для подходящих вершин $b_i, b_j \in \Omega(a)$, противоречие.

Значит, Ω не содержит вершин степени 4, Ω — объединение изолированных вершин и многоугольников. Так как $\mu_\Omega \in \{0, 2\}$, то Ω — объединение трех изолированных вершин и четырехугольника. В этом случае $x_0 + x_2 + x_4 + x_6 = 88$, $2x_2 + 4x_4 + 6x_6 = 272$ и $x_2 + 6x_4 + 15x_6 = 48 + 340 - 4 = 384$. Поэтому $x_4 = 62 - 3x_6$, $x_2 = 12 + 3x_6$ и $x_0 = 14 - x_6$. Пусть a — вершина степени 2 из Ω и $|[a] \cap X_i| = y_i$. Тогда $\sum y_i = 38$ и $\sum iy_i = 102$, поэтому $y_2 + 2y_4 + 3y_6 = 51$, противоречие с тем, что числа y_i четны. Утверждение (1) доказано.

Если $|\Omega| \geqslant 40$, то по свойству $(*)$ получим $\alpha_1(g) = 0$, следовательно, t делится на 3 и $t \in \{21, 24, 27\}$. Допустим, что Ω содержит $a^{\perp}$. Тогда для любой вершины u из Δ подграф $[u]$ содержит 20 вершин из $\Omega(a)$ и u несмежна с вершинами из $\Omega - a^{\perp}$. Если $\Omega - a^{\perp}$ содержит вершину c, то $[c] \subset \Omega$ и $[u] \cap \Omega$ содержится в $[a] \cap [c]$. Противоречие с тем, что любая вершина из $\Gamma - a^\perp$ смежна с 20 вершинами из $[a] \cap [c]$.

Значит, $\Omega = a^\perp$ и $t = 27$. Противоречие с тем, что вершина из $[a]$ смежна с 27 вершинами из Δ (число $|[b] \cap \Delta|$ четно для $b \in \Omega$). Итак, для любой вершины $a \in \Omega$ подграф $[a]$ не содержится в Ω. Утверждение (2) доказано.

Пусть $t = 21$. Тогда $|\Omega| = 53$ и для вершины u из Δ подграф Ω содержит 20 вершин из $[u] \cap [u^g]$ и 33 вершины вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Пусть $w \in [u^g] - [u]$ и $[w]$ содержит β вершин из $[u] \cap [u^g]$. Тогда $[w]$ содержит $20 - \beta$ вершин из $[u] - [u^g]$, $12 - \beta$ вершин из $[u^g] - [u]$ и $7 + \beta$ вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Противоречие с тем, что $7 + 2\beta = 20$.

Итак, $t = 24$ или $t \geqslant 27$. $\triangleright$

§ 3. Автоморфизмы точечного графа частичной геометрии $pG_2(4, 9)$

В этом параграфе Γ — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, 9)$, G — группа автоморфизмов графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$.

Лемма 3.1. *Если Ω содержит 2-лапу, то $p = 2$, $\alpha_1(g) > 0$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, 1)$ и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 6 вершинами из Ω;*

(2) *Ω — объединение изолированного октаэдра Σ и коклики C, $|C| \in \{1, 3, 5\}$.*

$\triangleleft$ По условию окрестность любой вершины является объединением 10 максимальных 4-клик.

Если $a \in \Omega$, то g действует на множестве из 10 прямых в $a^\perp$. Далее, для $b \in \Omega(a)$ ребро $\{a, b\}$ лежит на единственной прямой.

Пусть Ω содержит 2-лапу. Если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 0$, и $|\Omega| \in \{11, 17, 23, 29\}$. Если g фиксирует прямую из $a^\perp$, то g фиксирует эту прямую поточечно, поэтому $\Omega(a)$ состоит из $10-3t$ прямых. В случае $t = 1$ получим $\Omega \subset a^\perp$, противоречие с тем, что $\Omega(b)$ содержит вершину вне $a^\perp$. Так как любой μ-подграф вершин из Ω пересекает Ω, то окрестность каждой вершины в Ω является регулярным графом степени 6 на 16 вершинах. Поэтому для $c \in \Omega(a)$ подграф Ω содержит 6 вершин из $[a] \cap [c]$, по 9 вершин из $[a] - c^\perp$, $[c] - a^\perp$ и еще 3 вершины e_1, e_2, e_3. Если $b \in \Omega(a) \cap [c]$, то $\Omega(b)$ содержит a, c, γ вершин из $[a] \cap [c]$, по $5 - \gamma$ вершин из $[a] - c^\perp$, $[c] - a^\perp$ и $4 + \gamma$ вершин из $\{e_1, e_2, e_3\}$, противоречие.

Если $p = 2$, то $|\Gamma - \Omega| = 2t$, $27 \leqslant t \leqslant 43$ или $t = 24$, и каждая вершина из Ω смежна с вершиной из $\Gamma - \Omega$. Если $\alpha_1(g) = 0$, то число g-допустимых прямых в $b^\perp$ равно числу g-допустимых прямых в $c^\perp$ для любых двух несмежных вершин $b, c \in \Omega$. Далее, любая g-допустимая прямая лежит в Ω, поэтому Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, t')$ для некоторого $t' < 9$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \in \{41, 47\}$.

Значит, $\alpha_1(g) > 0$ и любая g-допустимая прямая содержит 1, 3 или 5 точек из Ω. Легко понять, что если $a^\perp$ содержит прямую с $i > 1$ точками из Ω, то любая g-допустимая прямая из $a^\perp$ содержит 1 или i точек из Ω. Если $i = 5$, то Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, t')$ для $t' = 1$ (напомним, что $pG_2(4, 3)$ не существует). В этом случае выполняется утверждение (1).

Если $i = 3$, то содержащая a связная компонента Σ графа Ω — точечный граф частичного пространства прямых порядка $(2, t')$ для некоторого нечетного $t' \leqslant 9$. Так как число прямых этого пространства равно $|\Sigma|(t' + 1)/3$, то либо $t' = 5$, либо $|\Sigma|$ делится на 3.

В случае $t' = 1$ окрестности вершин в Σ являются четырехугольниками, поэтому Σ — октаэдр. Пусть L — прямая, пересекающая Σ по треугольнику, $L - \Sigma = \{u, u^g\}$. Тогда

$\Omega-\Sigma$ содержится в $[u]\cap[u^g]$. Если $|\Omega\cap[u]\cap[u^g]|=12$, то для $e\in\Sigma-L$ подграф $[e]$ содержит 2 вершины из $[u]\cap[u^g]$, по 18 вершин из $[u]-(u^g)^\perp$, $[u^g]-u^\perp$ и 2 вершины из $\Omega-([u]\cup[u^g])$. Противоречие с тем, что для различных $e,e'\in\Sigma-L$ подграф $[e]\cap[e']$ содержит не менее 18 вершин из $([u]-(u^g)^\perp)\cup([u^g]-u^\perp)$. Если $[u]\cap[u^g]-\Omega=\{w,w^g\}$, то для $e\in\Sigma-L$ подграф $[e]$ содержит w, w^g и 2 вершины из $[u]\cap\Sigma$. Противоречие с тем, что $[e]\cap[e']$ содержит w, w^g, 2 вершины из Σ и не менее 10 вершин из $([u]-(u^g)^\perp)\cup([u^g]-u^\perp)$. Отсюда $|\Omega-\Sigma|\leqslant 5$ и $\Omega-\Sigma$ является кокликой. В этом случае выполняется утверждение (2).

Пусть $t'\geqslant 3$. Тогда Σ является реберно регулярным графом с $k_\Sigma=2(t'+1)$ и $\lambda_\Sigma=t'+1$. Поэтому $|\Sigma|\geqslant 3(t'+1)|$ и в случае равенства $\Sigma=K_{3\times(t'+1)}$. Отсюда $\Omega-\Sigma$ является кокликой. Если $\Omega-\Sigma$ содержит 2 вершины a, b, то для прямой L, содержащей 3 точки e, e', e'' из Σ подграф $[a]\cap[b]$ содержит $2(t'+1)$ точек из $[e]-\Omega$, лежащих на g-допустимых прямых, пересекающих Σ по 3 точкам. Противоречие с тем, что $6(t'+1)>20$.

Пусть $\Omega-\Sigma=\{a\}$ и прямая L содержит 3 точки e, e', e'' из Σ и ребро $\{u,u^g\}$. Если $[u]\cap[u^g]$ содержит γ вершин из $[a]$, то $|\Gamma-([a]\cup[u]\cup[u^g])|=11-\gamma$. Далее, Σ содержит $3t'$ точек, смежных с парами вершин из $\{e,e',e''\}$, поэтому $t'=3$, $\gamma\in\{0,2\}$ и $|\Sigma|\in\{12,18\}$. В случае $|\Sigma|=12$ число прямых, пересекающих Σ по 3 точкам, равно 16, и $[a]$ содержит 32 точки, лежащие на этих прямых. Противоречие с тем, что $[a]\cap[e]$ содержит только 8 из этих точек и $|[a]-[e]|>20$. Значит, $|\Sigma|=18$ и число прямых, пересекающих Σ по 3 точкам, равно 24. Противоречие с тем, что $|[a]|\geqslant 48$.

Итак, в случае $t'\geqslant 3$ имеем $\Omega=\Sigma$. Если $t'=9$, то Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(2,9)$. Противоречие с тем, что $|\Omega|$ — нечетное число. Если $t'=7$, то $|\Omega|\in\{27,33\}$. Число прямых, пересекающих Ω по 3 точкам, равно $8|\Omega|/3$, и объединение этих прямых содержит не менее 144 точек из $\Gamma-\Omega$, противоречие. Если $t'=5$, то $|\Omega|\geqslant 19$. Число прямых, пересекающих Ω по 3 точкам, равно $2|\Omega|$, и объединение этих прямых содержит не менее 76 точек из $\Gamma-\Omega$. Поэтому $|\Gamma-\Omega|=76$ и $|\Omega|=19$. Отсюда $\Omega\cap[u]\cap[u^g]$ содержит вершину a, γ вершин из $[a]$ и $|\Gamma-([a]\cup[u]\cup[u^g])|=11-\gamma$. Противоречие с тем, что Ω содержит $3t'=15$ точек, смежных с парами вершин из $\{e,e',e''\}$.

Таким образом, $t'=3$. Теперь Ω содержит e, e', e'', 9 точек, смежных с парами вершин из $\{e,e',e''\}$ и еще не более 9 точек из $[u]\cap[u^g]$. Отсюда $|\Omega|=21$, противоречие с тем, что Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(21,8,4,2)$ и $(4-2)^2+4(8-2)$ не является квадратом. $\triangleright$

До конца работы будем предполагать, что G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Через G_a обозначим стабилизатор в G вершины a. Ввиду теоремы $\pi(G_a)\subseteq\{2,3,5\}$ и $|G:G_a|=95$.

Лемма 3.2. *Если f — элемент порядка 19 из G, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *$C_G(f)=\langle f\rangle$;*

(2) *если $g\in N_G(\langle f\rangle)$, то либо $p=3$ и Ω является 5-кликой, либо $p=2$ и Ω является m-кокликой, $m\in\{3,5\}$;*

(3) *число $|N_G(\langle f\rangle)|$ равно 57 или 38.*

$\triangleleft$ Допустим, что $g\in C_G(f)$. Тогда f действует без неподвижных точек на Ω. Из теоремы следует, что Ω — пустой граф, и $p=5$. Противоречие с тем, что g действует на множестве из 38 вершин, смежных с их образами под действием f. Утверждение (1) доказано.

Пусть $g\in N_G(\langle f\rangle)$. Тогда p делит 18 и g действует на множестве U из 38 вершин, смежных с их образами под действием f и на множестве W из 57 вершин, несмежных с их образами под действием f. Отсюда подграф Ω не пуст.

Если Ω является n-кликой, то ввиду теоремы $p = 3$ и g фиксирует каждую $\langle f\rangle$-орбиту на U. Далее, либо $n = 2$ и $\langle g\rangle$ действует транзитивно на множестве $\langle f\rangle$-орбит на W, либо $n = 5$ и g фиксирует каждую $\langle f\rangle$-орбиту на W. В первом случае U совпадает с множеством вершин, смежных с их образами под действием f^i для всех i, и каждая $\langle f\rangle$-орбита на U является 19-кликой, противоречие.

Пусть Ω является m-кокликой. Если $p = 5$, то g фиксирует каждую $\langle f\rangle$-орбиту и $m \geqslant 20$, противоречие. Значит, $p = 2$. Если $m > 5$, то Ω пересекает Ω^{g^i} для подходящего i, противоречие с тем, что $\Omega \cap \Omega^{g^i}$ попадает в $\mathrm{Fix}\,(f)$. Значит, $m = 3$ или $m = 5$.

Если Ω содержит 2-лапу, то $p = 2$ и по лемме 3.1 либо Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, 1)$, либо Ω — объединение изолированного октаэдра Σ и коклики C, $|C| \in \{1, 3, 5\}$. В любом случае Ω пересекает Ω^{g^i} для подходящего i, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $N_G(\langle f\rangle)$ содержит элемент g порядка 3 и инволюцию t, централизующую g. Так как Ω является 5-кликой, то t фиксирует точно одну вершину из Ω. Противоречие с тем, что g фиксирует 2-коклику из $\mathrm{Fix}\,(t)$.

Если $N_G(\langle f\rangle)$ содержит элемент h порядка 9, то h действует на некоторой $\langle f\rangle$-орбите Y на U и фиксирует вершину w из Y. Тогда вершина w смежна с w^f, с $w^{f^{-1}}$ и смежна с w^{f^h}, поэтому Y является 19-кликой, противоречие.

Допустим, что $N_G(\langle f\rangle) = \langle f\rangle$. Тогда $G = R\langle f\rangle$, где R — нормальная $19'$-подгруппа. В этом случае $\langle f\rangle$ действует на элементарной абелевой 5-подгруппе Z. Для неединичного элемента $g \in Z$ подграф Ω является 10-кокликой или 15-кокликой, поэтому $\mathrm{Fix}\,(Z)$ — пустой граф. Отсюда каждая Z-орбита имеет длину 5. Для двух Z-орбит X_1 и X_2 найдутся подгруппы Z_1, Z_2 индекса 5 из Z, поточечно фиксирующие X_1, X_2 соответственно. Так как $Z_1 \cap Z_2$ поточечно фиксирует $X_1 \cup X_2$, то $Z_1 \cap Z_2 = 1$ и $|Z|$ делит 25, противоречие с действием f на Z. $\rhd$

Лемма 3.3. *G — простая неабелева группа.*

$\lhd$ Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из G. Если группа L абелева, то L является p-группой. Из доказательства утверждения (3) леммы 3.2 следует, что $p \neq 5$.

Пусть $p = 3$. Тогда каждая L-орбита имеет длину 1 или 3. Так как $95 = 19 \cdot 5$, то имеется 19 L-орбит длины 3 и 38 L-орбит длины 1. Противоречие с тем, что элемент порядка 3 фиксирует 2 или 5 точек.

Пусть $p = 2$. Тогда каждая L-орбита имеет длину 1, 2 или 4. Если имеется орбита длины 4, то $95 = 19 \cdot 4 + 19 \cdot 1$, поэтому имеется 19 L-орбит длины 1. Противоречие с тем, что элемент порядка 2 фиксирует не более 17 точек.

Итак, L — неабелева группа. Из действия f на L следует, что 19 делит $|L|$, поэтому L — простая группа. По рассуждению Фраттини $G = LN_G(\langle f\rangle)$, причем $N_L(\langle f\rangle) \neq \langle f\rangle$. Из утверждения (3) леммы 3.2 следует, что $G = L$. $\rhd$

Завершим доказательство теоремы. По лемме 2.3 из [7] простая группа L с $|\pi(L)| = 4$ изоморфна:

(1) A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2;

(2) $L_2(p)$ для некоторого простого числа p, $L_2(2^m)$ или $L_2(3^m)$ для подходящего m;

(3) $L_2(25), L_2(49), L_2(81)$, $L_3(4), L_3(5), L_3(7), L_3(17)$, $L_4(3)$, $PSp_4(q)$ $(q \in \{4, 5, 7, 9\})$, $PSp_6(2)$, $P\Omega_8^+(2)$, $G_2(3)$, $U_3(q)$ $(q \in \{4, 5, 7, 8, 9\})$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$.

Отсюда группа G изоморфна $L_2(19)$, противоречие с тем, что G не содержит подгрупп индекса 95. Теорема доказана.

Литература

1. *Махнев А. А.* О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб.— 2000.—Т. 191, № 7.—С. 89–104.
2. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
3. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискретн. анализ и исслед. опер.—1996.—Т. 3, № 3.—С. 71–83.
4. *Cameron P.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—220 p.—(London Math. Soc. Student Texts; 45).
5. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs.—Berlin etc: Springer-Verlag.— 1989.—485 p.
6. *Махнев А. А., Чуксина Н. В.* Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $(210, 95, 40, 45)$ // Тезисы сообщений VII Международной школы-конференции по теории групп.— Челябинск: ЮУрГУ, 2008.—С. 78–80.
7. *Shao C., Shi W., Jiang Q.* Characterization of simple K_4-groups // Front. Math. China.—2008.—Vol. 3.— P. 355–370.

Статья поступила 5 ноября 2009 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отд. алгебры и топологии
РОССИЯ, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`

Чуксина Наталья Владимировна
Институт математики и механики УрО РАН
РОССИЯ, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `natalia_1@e1.ru`