Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, выпуск 4, С. 49–60

УДК **517.98**

НЕЛОКАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В. Г. Фетисов

Посвящается столетию со дня рождения академика С. Л. Соболева

Работа содержит ряд новых результатов, показывающих важную роль топологических методов при исследовании разрешимости систем нелинейных операторных уравнений в ненормируемых пространствах.

Ключевые слова: пространство, оператор, уравнение Гаммерштейна, неизотропные ядра Коши, система многомерных сингулярных интегральных уравнений.

Введение

Качественные методы решений нелинейных операторных уравнений и их систем образуют достаточно стройную теорию, имеющую многочисленные приложения к анализу краевых задач, проблем физики, радиоэлектроники и других областей науки и техники.

В качестве модельной в настоящей работе нами выбрана система нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна, имеющая вид:

$$u_i(x) = \lambda \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y) f_j(y, u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y))\, dy + w_i(x) \quad (i = \overline{1,n}). \tag{1}$$

Здесь Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, $\overrightarrow{u}(x) = \{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\}$, $x \in \Omega$, — искомая вектор-функция, λ — вещественный параметр, $k_{ij}(x,y)$ — ядра интегральных операторов, $f_j(y, u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y))$ — характеристики интегральных операторов, $\overrightarrow{w}(x) = \{w_1(x), w_2(x), \ldots, w_n(x)\}$ — известная вектор-функция.

Исследованием разрешимости этой системы занимались Э. Шмидт, Р. Иглиш, А. Гаммерштейн, М. Голомб, А. П. Гремяченский, С. Дольф, Н. В. Кирпотина. Существенные продвижения были получены М. А. Красносельским, Л. А. Ладыженским, А. И. Поволоцким, Х. Шефером, П. П. Забрейко.

Однако, несмотря на многочисленные публикации в рассматриваемом направлении для нормируемого случая среды системы (1), продвижение исследований на пространства, не являющиеся локально выпуклыми, а также на ситуацию нелокальной разрешимости исходной системы в упомянутых функциональных пространствах, далеко еще от сколь-нибудь полной реализации. К настоящему времени имеются лишь отдельные публикации и для решения систем, содержащих многомерные нелинейные сингулярные интегральные уравнения с неизотропными ядрами Л. О. Коши, хотя, как известно, такого рода системы широко используются в задачах механики, теплообмена излучением и в других областях.

Настоящая работа содержит три взаимосвязанные части. В первой из них рассмотрен случай, когда оператор-матрица $A := ((A_{ij}))$ исходной системы (1) является положительно определенной, а характеристики f_j операторов суперпозиции (В. В. Немыцкого) подчиняются условию К. Каратеодори. При этом изучена нелокальная разрешимость системы (1) как для положительного оператора, так и для ситуации, когда он имеет конечное число отрицательных собственных чисел. Вторая часть работы посвящена доказательствам нелокальных теорем существования ограниченных решений у системы (1). В третьей части приведен результат о разрешимости слабо связанной системы многомерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений с неизотропными ядрами Коши.

1. Вспомогательные сведения и результаты

Приведем кратко необходимый аппарат обозначений, определений и предложений, являющийся базовым для дальнейших построений работы.

Пусть $(\Omega_1, \sum_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \sum_2, \mu_2)$, …, $(\Omega_n, \sum_n, \mu_n)$ — измеримые пространства с неотрицательными σ-конечными, полными неатомическими мерами $\mu_1(\Omega_1)$, $\mu_2(\Omega_2)$, …, $\mu_n(\Omega_n)$. Через $\Omega = (\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначим $\Omega = \Pi_{k=1}^n(\Omega_k, \sum_k, \mu_k)$ — их прямое произведение.

Обобщенное пространство Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$ состоит из всех тех μ-измеримых по А. Лебегу функций $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_k \in \Omega_k$, $k = \overline{1, n}$, для которых конечна смешанная F-квазинорма, имеющая вид:

$$\|u; L_{(\alpha)}(\Omega)\| = \left(\int\limits_{\Omega_n} \dots \left(\int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} \left|u(x_1, x_2, \dots, x_n)\right|^{\frac{1}{\alpha_1}} dx_1\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} dx_2\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \dots dx_n\right)^{\alpha_n} < +\infty.$$

Через $M(\Omega)$ обозначим множество всех μ-измеримых почти всюду конечных на Ω функций с действительными значениями и обычным отождествлением эквивалентных функций.

Аналогично, обобщенное пространство Лебега — Рисса $L_{(\overline{\alpha})}(\Omega)$ состоит из тех μ-измеримых по Лебегу функций

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_p \in \Omega_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

для которых конечна смешанная F-квазинорма вида

$$\|u; L_{(\overline{\alpha})}(\Omega)\|$$
$$= \left(\int\limits_{\Omega_1} \dots \left(\int\limits_{\Omega_{n-1}} \left(\int\limits_{\Omega_n} \left|u(x_1, x_2, \dots, \Omega_n)\right|^{\frac{1}{\alpha_n}} dx_n\right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} dx_{n-1}\right)^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}} \dots dx_1\right)^{\alpha_1} < +\infty.$$

Здесь мультииндексы $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $(\overline{\alpha}) = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$, где $\alpha_p > 0$ для любого $p = 1, \dots, n$. Можно видеть, что в общем случае $L_{(\alpha)}(\Omega) \neq L_{(\overline{\alpha})}(\Omega)$. Интересным представляется случай ненормируемых пространств, когда хотя бы одно из чисел $\alpha_k > 1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Обобщенные пространства $L_{(\alpha)}(\Omega)$ и $L_{(\overline{\alpha})}(\Omega)$ являются метризуемыми пространствами Фреше.

Мы рассматриваем систему (1) в достаточно широком классе локально ограниченных пространств Лебега — Рисса, представляющем из себя прямую сумму ненормируемых в общей ситуации пространств скалярных измеримых функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$, $x \in \Omega$.

В дальнейшем через $L_{[\alpha]}(\Omega)$ (где $[\alpha] = [(\alpha^{(1)}), (\alpha^{(2)}), \ldots, (\alpha^{(n)})]$, $(\alpha^{(i)}) = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_j^i > 0$, $j = 1, \ldots, n$) обозначим пространство измеримых вектор-функций $\overrightarrow{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$, где $x \in \Omega$, таких, что $u_i(x) \in L_{(\alpha^i)}(\Omega)$ для $i = 1, \ldots, n$.

В частности, если $\alpha_p = \frac{1}{2}$ при любом $p = 1, \ldots, n$, то пространство Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$ является гильбертовым, а, значит, гильбертовым пространством будет и их прямая сумма, которую, следуя традиции, обозначим через $H(\Omega)$.

Будем считать, что характеристики $f_j(y, u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y))$, $j = 1, \ldots, n$, интегральных операторов Гаммерштейна, входящих в систему уравнений (1), подчиняются условиям Каратеодори, т. е.:

(K_1) при каждом наборе функций $(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = \overrightarrow{u}(\cdot) \in L_{[\alpha]}(\Omega)$ они измеримы по переменной $y \in \Omega$;

(K_2) почти при всех значениях $y \in \Omega$ они непрерывны по совокупности переменных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Эти функции определяют нелинейный оператор суперпозиции Φ над измеримыми функциями $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) = \overrightarrow{u}(x)$, имеющий вид

$$\begin{gathered}\Phi(\overrightarrow{u})(x) := (f_1(x, u_1, u_2(x), \ldots, u_n(x)), f_2(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)), \ldots, \\ f_n(x, u_1, u_2(x), \ldots, u_n(x))).\end{gathered} \tag{2}$$

Лемма 1.1. *Оператор суперпозиции Φ действует из пространства $L_{[\alpha]}(\Omega)$ в пространство $L_{[\beta]}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для каждой из характеристик f_j интегрального оператора Гаммерштейна существуют функция $a_i(x) \in L_{(\beta^{(i)})}(\Omega)$ и число $b_i > 0$, такие, что*

$$|f_j(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)| \leqslant a_i(x) + b_i \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{\frac{\beta_k^{(i)}}{\alpha_k^{(i)}}}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

$\lhd$ Доказательство леммы 1.1 аналогично схеме доказательства теоремы 2.3 в [1]. $\rhd$

Будем предполагать, что оператор суперпозиции Немыцкого Φ действует из пространства Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$ в сопряженное ему пространство $L_{[\beta]}(\Omega)$ (допуская ситуацию, когда $\alpha_p^{(i)} + \beta_p^{(i)} = 1$ при любых $i, p = 1, \ldots, n$), а линейные интегральные операторы Фредгольма, имеющие вид

$$A_{ij} u_j(x) = \int\limits_{\Omega} k_{ij}(x, y) u_j(y)\, dy, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

действуют из обобщенного пространства Лебега — Рисса $L_{(\beta^{(i)})}(\Omega)$ в $L_{(\alpha^{(i)})}(\Omega)$, $\alpha_p^{(i)} + \beta_p^{(i)} = 1$, $i, p = 1, \ldots, n$, $\beta^{(i)} > 0$, и непрерывны. Тогда оператор-матрица $A := ((A_{ij}))$ будет действовать из одного пространства $L_{[\beta]}(\Omega)$ в другое (ему сопряженное) пространство $L_{[\alpha]}(\Omega)$.

Систему (1) можно представить в эквивалентной форме в виде одного операторного уравнения:

$$\overrightarrow{u}(x) = \lambda A \Phi \overrightarrow{u}(x) + \overrightarrow{w}(x), \tag{4}$$

где $\overrightarrow{w}(x) = (w_1(x), w_2(x), \ldots, w_n(x))$ — известная вектор-функция, принадлежащая пространству $L_{[\alpha]}(\Omega)$, а $\overrightarrow{u}(x)$ — искомая вектор-функция.

Если линейный оператор-матрица A допускает расщепление вида $A = BB^*$, где B — вполне непрерывный линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $H(\Omega)$ в пространство Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$, а сопряженный к B оператор B^* действует из $L_{[\beta]}(\Omega)$ в $H(\Omega)$, то можно видеть, что разрешимость операторного уравнения (4) (а, значит, и исходной системы (1) уравнений Гаммерштейна) будет вытекать из разрешимости операторного уравнения

$$\overrightarrow{v} = \lambda B^*\Phi B\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\omega} \quad (\overrightarrow{\omega} \in H(\Omega),\ \overrightarrow{v} \in H(\Omega)). \tag{5}$$

Если $\overrightarrow{v_0}$ — решение уравнения (5) в пространстве $H(\Omega)$, то $\overrightarrow{u_0} = B\overrightarrow{v_0}$ будет являться решением операторного уравнения (4) в пространстве Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$, а, значит, и исходной системы уравнений Гаммерштейна (1). Уравнение (5) кратко можно записать в виде $\overrightarrow{v} = T\overrightarrow{v}$, где T — вполне непрерывный оператор, определяемый правой частью уравнения (5) $T\overrightarrow{v} = \lambda B^*\Phi B\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\omega}$ и действующий в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$.

В этом случае справедлив следующий принцип неподвижной точки Красносельского — Поволоцкого (см. подробнее монографию [1]):

Лемма 1.2. *Пусть в ограниченной области (G) гильбертова пространства, содержащей нуль этого пространства, задан вполне непрерывный оператор T. Пусть для «точек» v области (G) выполняется неравенство:*

$$(Tv, v) < (v, v). \tag{6}$$

Тогда преобразование T имеет в области (G) по крайней мере одну неподвижную точку, т. е. $v_0 = Tv_0$ для некоторого элемента $v_0 \in (G)$.

Приведем одно из достаточных условий расщепления оператора $A = B \cdot B^*$, где B — вполне непрерывный линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $H(\Omega)$ в пространство $L_{[\alpha]}(\Omega)$, а сопряженный к B оператор B^* действует из $L_{[\beta]}(\Omega)$ в $H(\Omega)$, где $\alpha_k + \beta_k = \alpha_k\beta_k$ при каждом $k = \overline{1, n}$ и $\alpha_k, \beta_k > 0$.

Лемма 1.3. *Пусть значение $(\alpha_0) < \frac{1}{2}$. При условиях:*

1) *оператор A действует непрерывно из обобщенного пространства Лебега — Рисса $L_{[\beta]}(\Omega)$ в сопряженное пространство $L_{[\alpha]}(\Omega)$, где $(\alpha_0) \leqslant \alpha_k < \frac{1}{2}$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$;*

2) *оператор-матрица A в пространстве $H(\Omega)$ является положительным, самосопряженным и вполне непрерывным.*

Тогда «корень квадратный» из A, т. е. оператор $B = A^{\frac{1}{2}}$ действует из гильбертова пространства $H(\Omega)$ в $L_{[\alpha]}(\Omega)$ вполне непрерывно, причем для A справедливо расщепление $A = B \cdot B^*$.

Доказательство леммы 1.3 аналогично доказательству теоремы 4.2 из [1]. Отметим лишь, что для выполнения условия 1) достаточно ограничения $\int_\Omega \int_\Omega |k_{i,j}(x, y)|^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy < +\infty$. Оператор A положительный, если [2] матрица $((A_{ij}, u_j, u_i))$ положительно определена и самосопряженный, если $k_{ij}(x, y) = k_{ji}(y, x)$.

2. Существование положительных решений

2.1. Сначала исследуем случай, когда оператор-матрица $A := ((A_{ij}))$ является положительным.

Определение. Назовем вектор-функцию $\overrightarrow{w}(x)$ *B-представимой* [1], если $\overrightarrow{w} \in D_B$, где D_B — область значений оператора B, т. е. элемент $\overrightarrow{w} = B\overrightarrow{\omega}$, где вектор-функции $\overrightarrow{\omega}(x) \in H(\Omega)$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *оператор-матрица A является положительным, самосопряженным и вполне непрерывным, допускающим расщепление оператором, т. е. $A = B \cdot B^*$;*

2) *оператор суперпозиции (Немыцкого) Φ действует из пространства Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$ в сопряженное пространство $L_{[\beta]}(\Omega)$, а функция $\overrightarrow{w}$ — B-представима;*

3) *для всех значений $x \in \Omega$, $u_i \in (-\infty;\infty)$, $i = \overline{1,n}$, имеют место неравенства:*

$$\left| f_i(x, u_1, u_2, \dots, u_n)|u_i| - a_i \cdot |u_i|^{\frac{1}{2}} \right| \leqslant b_i(x) \cdot |u_i|^{\frac{2\cdot\gamma_i - 1}{\gamma_i}} + c_i(x), \tag{7}$$

где $a_i > 0$, $\gamma_i > \frac{1}{2}$, $b_i(x) \in L^{\frac{\gamma_i}{2}}(\Omega)$, $c_i(x) \in L(\Omega)$, $c_i(x) > 0$ при $i = \overline{1,n}$.

Тогда система (1) *имеет решения в пространстве Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$ при каждом значении параметра λ таком, что $\lambda < (\lambda_0 \cdot \max a_i)^{-1}$, где λ_0 — наибольшее из собственных чисел исходного оператора A.*

$\lhd$ Основным этапом доказательства является проверка того, что оператор $T\overrightarrow{v} := \lambda B^*\Phi B\overrightarrow{v} + \overrightarrow{z}$ удовлетворяет условию $(T\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$ для всех вектор-функций $\overrightarrow{v}(x)$, принадлежащих ограниченной области $(G) \subset H(\Omega)$, где $\|\overrightarrow{v}; H(\Omega)\| \leqslant r$.

Зафиксируем некоторое значение параметра λ, подчиняющееся последнему неравенству (7). Обозначим через $Q_i = |\lambda| \cdot |\lambda_0| \cdot \left(\int\limits_{\Omega} |b_i(x)|^{\frac{\gamma_i}{2}} \, dx\right)^{\frac{2}{\gamma_i}}$, и, соответственно, $Q = |\lambda| \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} c_i(x)\, dx$. Учитывая условия теоремы, можно найти такое значение $g > 0$, что $\lambda \cdot \lambda_0 \max a_i \leqslant g < 1$. Следовательно, найдется такое $r > 0$, что имеет место неравенство

$$g \cdot r^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot r^{\frac{2\gamma_i - 1}{\gamma_i}} + Q + \|\overrightarrow{z}; L^{\frac{1}{2}}(\Omega)\| \cdot r < r^2. \tag{8}$$

Покажем теперь, что на поверхности сферы $\|\overrightarrow{v}; H(\Omega)\| = r$ выполняется условие $(T\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$ для всех вектор-функций $\overrightarrow{v}(x) \in (G) \subset H(\Omega)$, где $\|\overrightarrow{v}; H(\Omega)\| \leqslant r$. Имеет место оценка

$$(T\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = (\lambda \cdot B^*\Phi B\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot (\Phi B\overrightarrow{v}, B\overrightarrow{v})$$

$$+(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_i\big[x, (B\overrightarrow{v})_1, \dots, (B\overrightarrow{v})_n\big](B\overrightarrow{v})_i \, dx + (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v})$$

$$\leqslant \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \int\limits_{\Omega} (B\overrightarrow{v})_i^{\frac{1}{2}} \, dx + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} b_i(x) \cdot |(B\overrightarrow{v})_i|^{\frac{2\gamma_i - 1}{\gamma_i}} dx + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} c_i(x)\, dx + (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v})$$

(опускаем промежуточные выкладки для краткости изложения)

$$\leqslant g \cdot r^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot r^{\frac{2\gamma_i - 1}{\gamma_i}} + Q + \|\overrightarrow{z}; L^{\frac{1}{2}}(\Omega)\| \cdot r < r^2 = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$$

на сфере $\|\overrightarrow{v}; H(\Omega)\| = r$.

Следовательно, используя лемму 1.2 (топологический принцип Красносельского существования неподвижной точки у вполне непрерывного векторного поля $T\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$), можно заключить, что уравнение $\overrightarrow{v} = \lambda \cdot B^*\Phi B\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ имеет решение $\overrightarrow{v_0}$, $\|\overrightarrow{v_0}; H(\Omega)\| < r$.

А так как последнее уравнение есть операторная форма исходной системы (1), то вопрос о разрешимости системы (1) имеет положительный ответ. При этом окончательная оценка искомого решения $\overrightarrow{u_0}$ системы (1) имеет следующий вид: $\|\overrightarrow{u_0}; L_{[\alpha]}\| \leqslant \|B\| \cdot r$, где $\|B\|$ — норма оператора B, действующего из $H(\Omega)$ в $L_{[\alpha]}$. $\triangleright$

2.2. Рассмотрим далее ситуацию, когда исходный оператор $A = ((A_{i,j}))$ является квазиположительным, т. е. имеет конечное число отрицательных собственных чисел. Пусть $H_1(\Omega)$ есть линейная оболочка собственных вектор-функций оператора A, отвечающих отрицательным собственным значениям, а $H_2(\Omega)$ — ортогональное дополнение $H_1(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$. Обозначим через P_1 и P_2 операторы проектирования на H_1 и H_2 соответственно. Пусть оператор $P_3 = P_2 - P_1$, тогда $P_3^2 = I$, а линейный оператор $C = P_3 \cdot A$ является положительным. Можно также заметить, что для оператора $B_1 = C^{\frac{1}{2}}$ подпространства $H_1(\Omega)$ и $H_2(\Omega)$ инвариантны, а операторы B_1 и P_3 коммутируют.

Обозначим далее через $H_s(\Omega)$ подпространство в $H(\Omega)$ такое, что:

$$(1-s) \cdot \|P_2 \overrightarrow{v}; H_2(\Omega)\|^2 \leqslant \|P_1 \overrightarrow{v}; H_1(\Omega)\|^2,$$

где $0 < s < 1$.

Лемма 2.1. *Пусть λ_0 — наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное число оператора A, тогда справедлива оценка*

$$\|\overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2 \leqslant \left(\frac{1-s}{2-s} \cdot |\lambda_0|\right)^{-1} \cdot \|B_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\| \quad \forall\, \overrightarrow{v} \in H_s(\Omega).$$

$\triangleleft$ Для каждой вектор-функции $\overrightarrow{v}(x) \in H_s(\Omega)$ имеем

$$\frac{1-s}{2-s} \cdot \|\overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2 = \frac{1-s}{2-s} \cdot \big(\|P_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2 + \|P_2 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2\big)$$
$$\leqslant \frac{1}{2-s}\big((1-s) \cdot \|P_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2 + \|P_1 v; H_s(\Omega)\|^2\big).$$

Учитывая, что $\|P_1 B_1 \overrightarrow{v}\| \geqslant \sqrt{\lambda_0} \cdot \|P_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|$, окончательно получим оценку

$$\|\overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2 \leqslant \left(|\lambda_0| \cdot \frac{1-s}{2-s}\right)^{-1} \cdot \|P_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2$$
$$\leqslant \left(\frac{2-s}{1-s}\right) \cdot \big(\|P_1 B_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2 + \|P_2 B_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|^2\big) \leqslant \frac{2-s}{|\lambda_0|(1-s)} \cdot \|B_1 \overrightarrow{v}; H_s(\Omega)\|. \triangleright$$

Как уже отмечалось, разрешимость системы (1), а, значит, и операторного уравнения $\overrightarrow{u} = \lambda \cdot A\Phi \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$, эквивалентного системе (1), будет вытекать из разрешимости операторного уравнения $\overrightarrow{u} = \lambda \cdot B^* \Phi B \overrightarrow{v} + \overrightarrow{\omega}$ в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *оператор-матрица A, рассматриваемый в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$, является квазиположительным, самосопряженными и вполне непрерывным, а оператор $C = P_3 \cdot A$ допускает расщепление вида $C = B_1 \cdot B_1^*$;*

2) *оператор суперпозиции (Немыцкого) Φ действует из пространства Лебега — Рисса $L_{[\alpha]}(\Omega)$ в сопряженное ему пространство $L_{[\beta]}(\Omega)$, а вектор-функция $\overrightarrow{w}(x)$ является B-представимой;*

3) *для всех значений $x \in \Omega$, $u_i \in (-\infty; \infty)$, $i = \overline{1,n}$, справедливо:*

$$|f_i(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) u_i| + 3a_i |u|_i^{\frac{1}{2}} \leqslant +b_i(x) |u_i|^{\frac{2\gamma-1}{\gamma_i}} + c_i(x),$$

где $a = \min a_i > 0$, $\gamma_i > \frac{1}{2}$, $b_i(x) \in L^{\frac{\gamma_i}{2}}(\Omega)$, $c_i(x) > 0$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Тогда система (1) *разрешима в исходном пространстве Лебега — Рисса* $L_{[\alpha]}(\Omega)$ *при каждом значении параметра* λ, *подчиняющемся условию:*

$$(a \cdot |\lambda_0|)^{-1} < \lambda < +\infty,$$

где λ_0 — *наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное значение оператора* A.

◁ Используя условия 1) и 2), видим, что в рассматриваемом случае разрешимость исходной системы (1) непосредственно следует из разрешимости в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ операторного уравнения: $P_3\overrightarrow{v} = \lambda B^*\Phi B\overrightarrow{v} + P_3\omega$, которое можно представить в следующем виде:

$$\overrightarrow{v} = (2P_1 + \lambda B^*\Phi B)\overrightarrow{v} + P_3\omega,$$

учитывая, что $P_3 = -P_1 + P_2$.

Оператор $(2P_1+\lambda B^*\Phi B)+P_3$ является вполне непрерывным как сумма вполне непрерывных операторов (соответствующих операторов проектирования на конечномерные подпространства).

Зафиксируем далее некоторое значение параметра λ, удовлетворяющее условию $(a \cdot \lambda_0)^{-1} < \lambda < +\infty$. Отсюда $a \cdot |\lambda_0| \cdot \lambda > 1$ и $3a \cdot |\lambda_0| \cdot \lambda - 1 > 2$.

Можно найти число s такое, что $\frac{1}{2} < s < 1-(3a\cdot|\lambda_0|\cdot\lambda-1)^{-1}$, следовательно, разность $(2 - 3a \cdot |\lambda_0|\lambda \cdot \frac{1-s}{2-s}) < 1$.

Обозначим через

$$s_0 = \max\left\{\left(2 - 3a|\lambda_0|\lambda\frac{1-s}{2-s}\right);\ 2(1-s)\right\} < 1.$$

Пусть

$$Q_i = \lambda \cdot \left(\int\limits_\Omega |b_i(x)|^{\frac{\gamma_i}{2}}\, dx\right)^{\frac{2}{\gamma_i}} \|A\|^{1-\frac{2}{\gamma_i}}; \quad Q = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega c_i(x)\, dx.$$

Можно найти такое $r > 0$, что $s_0 \cdot r^2 + \sum_{i=1}^n Q_i \cdot r^{2-\gamma_i} + Q + \|\overrightarrow{\omega}; H(\Omega)\|r < r^2$.

Аналогично доказательству теоремы 2.1, можно проверить, что на поверхности сферы радиуса r в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ имеет место топологический принцип Красносельского существования неподвижной точки y вполне непрерывного векторного поля, обусловленного оператором $T_1 = 2P_1 + \lambda \cdot B^*\Phi B + P_3\omega$.

Действительно, имеет место оценка

$$\begin{gathered}(T_1\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = ((2 \cdot P_1 + \lambda B^*\Phi B)\overrightarrow{v} + P_3\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = (2P_1\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) + (\lambda \cdot B^*\Phi B, \overrightarrow{v}) + (P_3\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \\ = 2\|P_1\overrightarrow{v}; H(\Omega)\|^2 + \lambda(\Phi B\overrightarrow{v}, B\overrightarrow{v}) + (P_3\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \\ = 2\|P_1\overrightarrow{v}\|^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega f_i(x, (B\overrightarrow{v})_1, \ldots, (B\overrightarrow{v})_n) \cdot (B\overrightarrow{v})_i\, dx + (P_3\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \\ \leqslant 2\|P_1\overrightarrow{v}\|^2 - 3\lambda \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \int\limits_\Omega (B\overrightarrow{v})_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega b_i(x) \cdot |(B\overrightarrow{v})_i|^{2-\gamma_i}\, dx \\ +\lambda \cdot \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega c_i(x)\, dx + |(P_3\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})| \leqslant 2\|P_1\overrightarrow{v}\|^2 - 3\lambda \cdot \alpha \cdot \|B\overrightarrow{v}\|^2\end{gathered}$$

$$+\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} |b_i(x)|^{\frac{\gamma_i}{2}}\, dx \right)^{\frac{2}{\gamma_i}} \cdot \left(\int_{\Omega} (B\overrightarrow{v})_i^2\, dx \right)^{1-\frac{2}{\gamma_i}} + Q + \|\overrightarrow{\omega}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$$

$$\leqslant 2\|P_1\overrightarrow{v}\|^2 - 3\lambda \cdot \alpha \cdot \|Bv\|^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot r^{2-\gamma_i} + Q + \|\overrightarrow{\omega}; H(\Omega)\| \cdot r.$$

Осталось рассмотреть два случая: а) когда $\overrightarrow{v} \in H_s(\Omega) \subset H(\Omega)$, $0 < s < 1$, и случай в) когда $\overrightarrow{v} \overline{\in} H_s(\Omega)$. Имеем $\|P_1\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant \|\overrightarrow{v}\|^2$ для $\overrightarrow{v} \in H_s(\Omega)$.

В случае а) справедлива оценка:

$$(T_1\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \leqslant \left(2 - 3 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot \frac{1-s}{2-s} \right) \cdot r^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot r^{2-\gamma_i} + Q \cdot \|\overrightarrow{\omega}\| \cdot r$$

$$\leqslant s_0 \cdot r^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i r^{2-\gamma_i} + Q + \|\omega\| \cdot r < r^2 = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$$

и, как видно, утверждение теоремы 2.2 справедливо.

В случае в) $\overrightarrow{v} \overline{\in} H_s(\Omega)$ и тогда $\|P_1\overrightarrow{v}\|^2 < (1-s) \cdot \|P_2\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant (1-s)\|\overrightarrow{v}\|^2$.

Получим окончательно:

$$(T_1\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \leqslant 2 \cdot (1-s) \cdot r^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot r^{2-\gamma_i} + Q + \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{\omega}\|$$

$$\leqslant s_0 \cdot r^2 + \sum_{i=1}^{n} Q_i r^{2-\gamma_i} + Q + \|\omega\| \cdot r < r^2 = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}). \ \rhd$$

Примечание 1. Получена оптимальная оценка решения $\overrightarrow{v}_0$ операторного уравнения $P_3\overrightarrow{v} = \lambda \cdot B^*\Phi B\overrightarrow{v} + P_3\overrightarrow{\omega}$, эквивалентного исходной системе (1) нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна, а также для решения $\overrightarrow{u}_0 = B \cdot \overrightarrow{v}_0$ уравнения $\overrightarrow{u} = \lambda A\Phi\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$, где $\|\overrightarrow{u_0}\| \leqslant \|B\| \cdot r$.

Примечание 2. Расщепление оператора $P_3A = C$ имеет место, если ядра $k_{ij}(x, y)$ суммируемы на прямом произведении $\Omega \times \Omega$ со степенью α_0 (в случае, когда $\mu(\Omega) < \infty$). Если же $\mu(\Omega)$ бесконечная, то последнее имеет место при дополнительном ограничении $\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} k_{ij}^2(x, y)\, dy \right)^{\frac{p_0}{2}} dx < +\infty$, где $(p_0) > 2$.

3. Существование ограниченных решений

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исходная система (1) имеет в $L_{[\alpha]}(\Omega)$ ограниченные решения (иначе говоря, когда каждая компонента вектор-функции $\overrightarrow{u}(x)$, являющейся решением системы (1), ограничена на множестве Ω). Имеет место вспомогательная

Лемма 3.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *оператор A, определенный ядрами $k_{ij}(x, y)$, является положительным и самосопряженным линейным оператором в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$;*

2) *диагональные ядра (при $i = j$) ограничены почти всюду на прямом произведении $\Omega \times \Omega$, т. е. $l_i = \operatorname{vrai} \max_{x,y \in \Omega \times \Omega} |k_{ij}(x, y)| < +\infty$, $(i = \overline{1, n})$.*

Тогда для оператора $B = A^{\frac{1}{2}}$ справедлива оценка:

$$\operatorname{vrai} \max_{x \in \Omega} |(B\overrightarrow{v}(x))_i| \leqslant \sqrt{l_i} \cdot \|\overrightarrow{v}(x); H(\Omega)\|. \tag{9}$$

$\lhd$ От противного. Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$ — множество $x \in \Omega$, имеющее ненулевую конечную меру $\mu(\Omega_0) < \infty$, где $|(B\overrightarrow{v}(x))_i|\sqrt{l_i} \cdot \|\overrightarrow{v}\|$. Обозначим через $\overrightarrow{z}(x)$ вспомогательную вектор-функцию, имеющую единственную ненулевую компоненту $\overrightarrow{z}(x) = (0,0,\ldots,0,z_i(x),0,\ldots,0)$, где i-ая компонента $z_i(x) = \mathrm{sign}(B\overrightarrow{v}(x))_i$ при всех $x \in \Omega_0$, и $z_i(x) \equiv 0$ при $x\overline{\in}\Omega_0$.

Учитывая условие 1) леммы (точнее, условие того, что линейный интегральный оператор A является самосопряженным), имеем оценку:

$$(B\overrightarrow{v},\overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{v},B\overrightarrow{z}) \leqslant \|\overrightarrow{v};H(\Omega)\| \cdot \sqrt{(B\overrightarrow{z},B\overrightarrow{z})} = \|\overrightarrow{v};H(\Omega)\|\sqrt{(A\overrightarrow{z},\overrightarrow{z})}$$
$$= \|\overrightarrow{v};H(\Omega)\| \cdot \left(\int\limits_{\Omega_0}\int\limits_{\Omega_0} k_{ii}(x,y)z_i(x)\cdot z_i(y)\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{l_i}\|\overrightarrow{v};H(\Omega)\| \cdot \mu(\Omega_0).$$

Но с другой стороны, учитывая, что $\mu(\Omega_0) > 0$, получим:

$$(B\overrightarrow{z},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v},B\overrightarrow{z}) = ((B\overrightarrow{v})_i, z_i) = \int\limits_{\Omega_0} |(B\overrightarrow{v}(x))_i|\,dx > \sqrt{l_i} \cdot \|\overrightarrow{v};H(\Omega)\| \cdot \mu(\Omega_0).$$

Следовательно, $\mu(\Omega_0) = 0$. $\rhd$

В заключение приведем новые результаты, касающиеся нелокальной разрешимости системы (точнее, условий существования ограниченных решений системы (1)), с учетом доказанных теорем 2.1 и 2.2.

Теорема 3.1. *В условиях теоремы* 2.1 *пусть диагональные ядра* $k_{ii}(x,y)$ *линейного интегрального оператора-матрицы* $A = ((A_{ij}))$ *ограничены почти при всех значениях* $(x,y) \in \Omega\times\Omega$, *где* $\mu(\Omega) < \infty$.

Тогда исходная система (1) *нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна имеет ограниченное решение при каждом значении параметра* λ, *подчиняющемся ограничению* $-\infty < \lambda < (\lambda_0 \max a_i)^{-1}$, *где* λ_0 *— наибольшее из собственных значений оператора* A.

$\lhd$ Справедливость утверждения настоящей теоремы следует из доказанных теоремы 2.1 и леммы 3.1. $\rhd$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, *где диагональные ядра* $k_{ii}(x,y)$ *оператора-матрицы* $((P_3A_{ij}))$ *ограничены почти при всех значениях* $(x,y) \in \Omega\times\Omega$. *Тогда исходная система* (1) *нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна имеет ограниченные решения при каждом значении параметра* λ, *подчиняющемся ограничению* $(a\cdot|\lambda_0|)^{-1} < \lambda < +\infty$, *где* λ_0 *— наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное значение оператора* A.

$\lhd$ Справедливость утверждения настоящей теоремы следует из теоремы 2.2 и леммы 3.1. Действительно, существующее по теореме 2.2 решение $\overrightarrow{u_0} = B\overrightarrow{v_0}$ является ограниченной на множестве Ω вектор-функцией согласно лемме 3.1. $\rhd$

Можно заметить, что диагональные ядра оператора $C = P_3 \cdot A$ имеют следующий вид:

$$K_{ii}(x,y) = k_{ii}(x,y) - \sum_{p=1}^{m} \lambda_p e_{pi}(x)\cdot e_{pi}(y), \tag{10}$$

где λ_p $(p = 1,2,\ldots,m)$ — все отрицательные собственные значения исходного оператора A, а $\overrightarrow{e}_p$ — соответствующие нормированные собственные вектор-функции из пространства $H(\Omega)$ (для оператора C).

В самом деле, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} K_{ij}(x,y)u_j(y)\,dy = \sum_{p=1}^{m}\int\limits_{\Omega} K_{pi}(x,y)u_p(y)\,dy$$

$$= \sum_{p=1}^{m}\int\limits_{\Omega} k_{pi}(x,y)u_p(y)\,dy - 2\cdot\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_p\cdot e_{pi}(x)\cdot\int\limits_{\Omega} e_{pi}\cdot u_p(y)\,dy$$

$$= (A\overrightarrow{u})_i - 2\cdot\sum_{p=1}^{m}\lambda_p\cdot(\overrightarrow{e}_p,\overrightarrow{u})\cdot e_{pi}(x) = (A\overrightarrow{u})_i - 2\cdot(P_1A\overrightarrow{u})_i = (P_3A\overrightarrow{u})_i = (C\overrightarrow{u})_i.$$

Учитывая формулу (10), видим, что диагональные ядра $K_{ii}(x,y)$ оператора $C = P_3\cdot A$ ограничены почти при всех значениях $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, если таковыми являются диагональные ядра $k_{ii}(x,y)$ исходного оператора-матрицы A и нормированные собственные вектор-функции $\overrightarrow{e}_p(x)$ оператора C, где $p=\overline{1,m}$. $\rhd$

Последнее дает основание сформулировать более простые достаточные условия расщепления оператора $A = B\cdot B^*$, нежели в теореме 2.2.

Теорема 3.3. *Пусть ядра $k_{ij}(x,y)$ определяют положительный, самосопряженный и вполне непрерывный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$, а его диагональные ядра $k_{ii}(x,y)$ ограничены почти при всех значениях $(x,y)\in\Omega\times\Omega$. Если при этом оператор A действует из пространства Лебега — Рисса $L_{[\beta]}(\Omega)$ в сопряженное ему пространство $L_{[\alpha]}(\Omega)$, тогда имеет место расщепление $A = B\cdot B^*$.*

Схема доказательства настоящей теоремы аналогична содержанию статьи М. Голомба [3], поэтому для краткости изложения мы ее не приводим.

4. Нелокальная разрешимость слабо связанной системы многомерных сингулярных интегральных уравнений с неизотропными ядрами Коши

Решение многих задач теории вынужденных колебаний, процессов наследственной пластичности и вязкоупругости, теплообмена излучением и других конкретных прикладных проблем диктовало необходимость использования качественных методов. Содержание данной части работы посвящено идее «сжимающий плюс вполне непрерывный операторы» М. А. Красносельского, продолженной в цикле публикаций Ф. Браудером, П. П. Забрейко, где стали рассматриваться «переплетенные» (термин Ф. Браудера) операторы общего вида. Здесь исследована нелокальная разрешимость системы нелинейных операторных уравнений с неизотропными ядрами Коши в прямой сумме банаховых пространств Орлича, включающих L^p-пространства, Лоренца и Марцинкевича.

Пусть $\Omega = (\Omega,\Sigma,\mu)$ — множество, лежащее в k-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, Σ — σ-алгебра всех его μ-измеримых подмножеств, μ — полная неатомическая σ-аддитивная мера, где $\mu(\Omega) < +\infty$.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$u_i(\tau) = \lambda_i\cdot[A_iu_i(\tau) + B_i\overrightarrow{u}(\tau)],\quad i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

где $\tau\in\Omega$, $\overrightarrow{u}(\tau) = \{u_1(\tau),u_2(\tau),\dots,u_n(\tau)\}$ — искомая вектор-функция; λ_i, $i=\overline{1,n}$, — вещественные параметры; операторы A_i и B_i имеют следующий вид:

$$A_iu_i(\tau) := \int\limits_{\Omega} a_i(\tau,s,u_i(s))\,d\mu(s), \tag{10}$$

$$B_i \overrightarrow{u}(\tau) := b_i[\tau, w_1(\overrightarrow{u}), w_2(\overrightarrow{u}), \ldots, w_m(\overrightarrow{u})], \tag{11}$$

где

$$w_j(\overrightarrow{u}) := \int\limits_{\Omega} |\tau - s|^{-k} \cdot K_j[\tau, s, u_1(s), \ldots, u_n(s)]\, d\mu(s), \quad j = \overline{1, m}. \tag{12}$$

Отметим, что ядро сингулярного оператора (12) является неизотропным (иначе говоря, характер его изменения по разным направлениям различен). Решение $\overrightarrow{u}(\tau)$ системы (9) ищем в прямой сумме $L^*_{[M]}(\Omega)$ банаховых пространств Орлича $L^*_{M_i}(\Omega)$, $([M] = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\})$, с нормой вида:

$$\|\overrightarrow{u}(\tau); L^*_{[M](\Omega)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u_i(\tau); L^*_{M_i}(\Omega)\|^2}, \tag{13}$$

где компонента $u_i(\tau)$ принадлежит пространству $L^*_{M_i}(\Omega)$.

Если система (9) при некоторых значениях параметров $\lambda^0 = \{\lambda^0_1, \lambda^0_2, \ldots, \lambda^0_n\}$ имеет отличное от тривиального нуля $\overrightarrow{\theta} = \{\theta, \theta, \ldots, \theta\}$ решение $\overrightarrow{u}^0(\tau)$, то это решение назовем собственной вектор-функцией системы (9), а совокупность параметров $\lambda^0 = \{\lambda^0_1, \lambda^0_2, \ldots, \lambda^0_n\}$ — характеристическим значением системы (9) в смысле Гремяченского.

Совокупность параметров $\mu\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ назовем точкой бифуркации системы (9), если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется собственная вектор-функция $\overrightarrow{u}_0(\tau)$ системы (9), для которой $\|\overrightarrow{u}_0(\tau); L^*_{[M](\Omega)}\| < \delta$ и $|\lambda^0_i - \mu_i| < \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$.

Множество D в некоторой области G пространства Орлича $L^*_{[M]}(\Omega)$ образует так называемую непрерывную ветвь собственных вектор-функций системы (9), выходящую из $\overrightarrow{\theta}$, если граница S каждого ограниченного открытого множества, содержащего $\overrightarrow{\theta}$ и входящего в данную область G, имеет с D непустое пересечение, т. е. $S \cap D \neq \varnothing$ $(D \subset G)$.

Целью третьей части работы является исследование существования собственных вектор-функций, точек бифуркаций, непрерывных ветвей собственных вектор-функций системы (9), анализ их строения и асимптотики при больших значениях параметров.

Сформулируем основной результат третьей части работы.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия:*

1) ω_i *есть характеристическое значение производной по Фреше* A'_i *оператора* A_i, *имеющее кратность* α_i $(i = \overline{1, n})$, *причем* $\alpha = \Sigma^n_{i=1}\alpha_i$ *является нечетным числом;*

2) $\varepsilon > 0$ *таково, что в отрезке* $[\omega_i - \varepsilon, \omega_i + \varepsilon]$ *нет несовпадающих с* ω_i *характеристических значений вполне непрерывного оператора* A'_i;

3) *оператор* B_λ *в шаре* $T(L^*_{[M]}(\Omega); r)$ *радиуса* r *является липшицевым, причем*

$$q(\omega \pm \varepsilon) < \frac{a(\omega \pm \varepsilon)}{q(\omega \pm \varepsilon) + a(\omega \pm \varepsilon)},$$

где $q(\omega \pm \varepsilon) = (\Sigma^n_{i=1}(q_i(\omega_i \pm \varepsilon))^2)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда исходная система уравнений (9) *имеет собственные вектор-функции* $\overrightarrow{u}(\tau)$ (*в смысле Гремяченского*), *которым соответствуют характеристические значения с компонентами из интервалов* $(\omega_i - \varepsilon, \omega_i + \varepsilon)$.

Схема доказательства настоящей теоремы аналогична содержанию доказательству теоремы 4.1.1 монографии [6].

Литература

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.—М.: Гостехиздат, 1956.—390 с.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.—М.: ИЛ, 1962.—896 с.
3. *Голомб М.* Uber Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen // Publ. Math. Univ. Belgrade.—1936.—Bd. 5.—P. 45–75.
4. *Фетисов В. Г.* Вариационный метод при исследовании разрешимости систем нелинейных уравнений // Вестн. Тамб. гос. ун-та.—2003.—Т. 8, вып. 3.—С. 473–475.
5. *Фетисов В. Г.* Открытые вопросы нелинейных мажорируемых операторов в локально ограниченных пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 1.—С. 57–61.
6. *Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.—432 с.

Статья поступила 10 сентября 2008 г.

Фетисов Валерий Георгиевич
Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса, *проф. каф. «Математика»*
РОССИЯ, 346500, г. Шахты, ул. Шевченко, 147;
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, *зав. лаб. прикл. нелин. ан.*
РОССИЯ, 362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru