Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2007, Том 9, Выпуск 3

УДК **517.98**

ПОРЯДКОВАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА НЕАДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. Колдунов

Светлой памяти
Григория Яковлевича Лозановского

В статье рассмотрен один класс неаддитивных операторов, действующих из векторной решетки $C(K)$ в дедекиндово полную векторную решетку $C_\infty(Q)$. Описаны условия порядковой непрерывности и секвенциальной порядковой непрерывности операторов из этого класса. Рассмотрен также вопрос о продолжении таких операторов на элементы дедекиндова пополнения векторной решетки $C(K)$.

Ключевые слова: векторная решетка, дедекиндово пополнение, порядковая непрерывность, продолжение оператора, неаддитивный оператор.

1. Введение

Линейные операторы, заданные на архимедовых векторных решетках, традиционно были объектами внимания для участников семинара Б. З. Вулиха по полуупорядоченным пространствам при ЛГУ. Одним из ведущих специалистов в этой области был Г. Я. Лозановский (см., например, [1–3]). Интересно, что при обсуждении (на заседаниях семинара) чисто аддитивного случая Г. Я. Лозановский отмечал возможности использования тех или иных подходов для случая неаддитивных операторов.

Действительно, с точки зрения порядковых свойств линейный функционал Φ_1: $\Phi_1(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$, заданный на векторной решетке $C[0,1]$, мало чем отличается от неаддитивного функционала Φ_2: $\Phi_2(f) = \left(\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx\right)^3$.

В статье будут рассматриваться неаддитивные операторы T: $C[K] \to C_\infty(Q)$, действующие из векторной решетки $C(K)$ в дедекиндово полную векторную решетку $C_\infty(Q)$ всех расширенных непрерывных функций на экстремально несвязном компакте Q. Будет введен один класс операторов, причем все они обладают свойствами S_1, S_2, S_3, определенными в п. 2. Предложение 2.3 показывает, что в этот класс входят как аддитивные операторы, так и операторы, не обладающие хорошими алгебраическими свойствами.

Для анализа строения такого рода операторов были введены величины $\mathrm{in}(G,m)$ и $\mathrm{ex}(F,m)$ (по существу они использовались еще в [4], а в [5] рассматривались для нормы). Заметим, что для пояснения конкретного смысла получаемых результатов будут обсуждаться два конкретных функционала Φ_1 и Φ_2, упомянутых ранее.

В качестве примера использования развитой в п. 3 техники будут описаны (в терминах величин $\mathrm{in}(G,m)$ и $\mathrm{ex}(F,m)$) условия порядковой и секвенциальной порядковой непрерывности операторов изучаемого класса; для монотонных операторов эти условия оказываются необходимыми и достаточными (см. теорему 4.2. и предложение 4.3.).

Кроме того, рассматривается вопрос о продолжении этих операторов на элементы дедекиндова пополнения векторной решетки $C(K)$) (см. предложение 5.1. и теорему 5.3.).

Будем использовать следующие обозначения. Буквой K обозначается произвольный компакт, а буквой Q — экстремально несвязный компакт. Как обычно, $C(K)$ есть векторная решетка всех непрерывных на компакте K функций. Причем e_K обозначает тождественную единицу. Элементы исходной векторной решетки $C(K)$ будем обозначать обычно x, y, v; а также a, b. Решеточные операции будут записываться как $x \vee y$, $x \wedge y$, а для случая бесконечных семейств — $\sup(x_\alpha : \alpha \in \Gamma)$, $\inf(x_\alpha : \alpha \in \Gamma)$.

Буквы G, W используются для открытых множеств, а F, H — для замкнутых множеств. Пусть $\Sigma(Q)$ есть булева алгебра всех открыто-замкнутых множеств в Q. Если $E \subset K$ и $x \in C(K)$, то $P_E x$ обозначает сужение функции $x \in C(K)$ на E.

Порядковая сходимость направления $(x_\alpha) \subset C(K)$ к элементу $y \in C(K)$ (т. е. $x_\alpha \xrightarrow{o} y$) означает, что $|x_\alpha - y| \leqslant v_\beta \downarrow 0$ при $\alpha \geqslant \alpha(\beta)$ и $\alpha \in \Gamma((x_\alpha))$, $\beta \in \Gamma((v_\beta))$ (т. е. $\Gamma((x_\alpha))$ это упорядоченное семейство индексов для направления (x_α)).

Наконец, полагаем для $x \in C(K)$ нуль-множество $z(x) = \{t \in K : x(t) = 0\}$ и конуль-множество $cZ = K \backslash Z(x)$.

2. Ограничения на изучаемые операторы

Всегда предполагается, что оператор $T : C(B) \to C_\infty(Q)$ порядково ограничен и $T(0) = 0$. Кроме того, для T выполнены свойства S_1, S_2, S_3, которые будут введены в этой части.

Первое свойство S_1 оператора T (обозначается $T \in S_1$) состоит в следующем: для любого $m \in \mathbb{N}$ существует направление $U^m_\alpha \downarrow 0$ в $C_\infty(Q)$ такое, что для любого индекса $\alpha \in \Gamma((U^m_\alpha))$ существует $\delta = \delta(\alpha, m) > 0$, если $|x_1|$, $|x_2| \leqslant me_K$ и $|x_1 - x_2| \leqslant \delta e_K$, то $|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant U^m_\alpha$ [4].

Лемма 2.1. *Предположим, что оператор T обладает свойством S_1.*

(1) *Пусть $x \in C(K)$ и $x(n) = \big(x_+ - \frac{1}{n}e_K\big)_+ - \big(x(n) - \frac{1}{n}e_K\big)_+$. Тогда $|x(n) \leqslant |x||$, $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(x(n)) \subset \mathrm{cz}(x)$ и $|x(n) - x| \leqslant \frac{1}{n}e_K$.*

(2) *Пусть $G \subset K$ и $p \in \mathbb{N}$.*

Тогда $\sup\,[|T(x)| : |x| \leqslant pe_K, \mathrm{cz}(x) \subset G] = \sup\,[|T(y)| : y \leqslant pe_K,\ \mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y) \subset G]$.

(3) *Пусть $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y) \subset G_1 \cup G_2$. Тогда существуют x_1, $x_2 \in C(K)$, для которых $|x_i| \leqslant |y|$, $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(x_i) \subset G_i$ $(i = 1, 2)$ и $y = x_1 + x_2$.*

(4) *Пусть $V_\beta \downarrow 0$ в $C(K)$ и $p \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, $G \supset F_p((V_\beta)) = \bigcap (V_\beta)^{-1}\Big(\Big[\frac{1}{p}, +\infty\Big]\Big)$, то найдется индекс $\beta \in \Gamma((V_\beta))$, для которого $P_{B\backslash G}V_\beta \leqslant \frac{1}{p}$.*

$\lhd$ (1) Проверяется непосредственно.

(2) Пусть $|x| \leqslant pe_K$ и $\mathrm{cz}(x) \subset G$. Пусть $x(n) \in C(K)$ из 1). Тогда $|x - x(n)| \leqslant \frac{1}{n}e_k$. Берем $n \in \mathbb{N}$, так чтобы $\frac{1}{n} \leqslant \delta(\alpha, p)$. Получаем $|T(x) - T(x(n))| \leqslant U^p_\alpha$. Таким образом, $|T(x(n))| \xrightarrow{o} |T(x)|$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(x(n)) \subset G$.

(3) Пусть $y \in C(K)$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y) \subseteq G_1 \cup G_2$. Полагаем $H = \mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y) \backslash G_2 \subset G_1$. Найдем $G \subset K$ такой, что $H \subset G \subset \mathrm{cl}\,G \subset G_1$. Строим такую $y_1 \in C(K)$, что $0 \leqslant y_1 \leqslant y_+$, $P_{\mathrm{cl}\,G}y_1 = y_+$ и $\mathrm{cz}(y_1) \subset G_1$. Аналогично, строим такую $y_2 \in C(K)$, что $0 \leqslant y_2 \leqslant y_-$ и

$P_{\mathrm{cl}\,G}y_2 = y_-$, $\mathrm{cz}(y_2) \subset G_1$. Пусть $x_1 = y_1 - y_2$. Тогда $P_{\mathrm{cl}\,G}x_1 = y$, $|x_1| \leqslant |y|$ и $\mathrm{cz}(x_1) \subset G_1$. Полагаем $x_2 = y - x_1$. Тогда $|x_2| \leqslant |y|$ и $\mathrm{cz}(x_2) \subset G_2$.

(4) Проверяется непосредственно. $\rhd$

Теперь введем свойство S_2 для оператора T(обозначается $T \in S_2$): для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $k(m) \in \mathbb{N}$, такое что если $|x|$, $|y| \leqslant me_K$, то

$$|T(x+y) - T(x)| \leqslant \sup\left[|T(v)| : |v| \leqslant k(m)e_K,\ \mathrm{cz}(v) \subset \mathrm{cz}(y)\right].$$

Лемма 2.2. *Пусть для оператора T выполнены свойства S_1 и S_2.*

(1) *Пусть $|x|$, $|y| \leqslant me_K$. Тогда $|T(x+y)| \leqslant |T(x)| + \sup[|T(v)| : |v| \leqslant K(m)e_K,\ \mathrm{cz}(v) \subset \mathrm{cz}(y)]$.*

(2) *Пусть $\mathrm{cz}(y) \subset \mathrm{cz}(x_1) \cup \mathrm{cz}(x_2)$, причем $|y| \leqslant me_K$. Тогда $|T(y)| \leqslant \sup[|T(v)| : |v| \leqslant K(m)e_K,\ \mathrm{cz}(v) \subset \mathrm{cz}(x_1)] + \sup[|T(u)| : |u| \leqslant K(m)e_K,\ \mathrm{cz}(u) \subset \mathrm{cz}(x_2)]$.*

(3) *Пусть $D(T) = \{x \in C(K),$ если $y \in C(K),\ \mathrm{cz}(y) \subset \mathrm{cz}(x),$ то $T(y) = 0\}$. Тогда $D(T)$ есть векторной решетки идеал.*

(4) *Пусть $G(T) = \bigcup(\mathrm{cz}(x) : x \in D(T))$. Если y_1, $y_2 \in C(K)$ и $P_{K\setminus G(T)}(y_1) = P_{K\setminus G(T)}(y_2)$, то $T(y_1) = T(y_2)$.*

$\lhd$ (1) К неравенству $|T(x+y)| \leqslant |T(x)| + |T(x+y) - T(x)|$ применяем $T \in S_2$.

(2) Пусть сначала $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y) \subset \mathrm{cz}(x_1) \cup \mathrm{cz}(x_2)$. В силу 3) из леммы 2.1 имеем $y = y_1 + y_2$, где $|y_1|$, $|y_2| \leqslant |y| \leqslant me_K$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y_1) \subset \mathrm{cz}(x_i)$, $i = 1, 2$. Остается применить 1). Если теперь $\mathrm{cz}(y) \subset \mathrm{cz}(x_1) \cup \mathrm{cz}(x_2)$, то ввиду 1) из леммы 2.1 вводим $y(n) \in C(K)$ так, что $|y(n) - y| \leqslant \frac{1}{n}e_K|y(n)| \leqslant |y|$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y(n)) \subset \mathrm{cz}(y)$. Поскольку $T \in S_1$, то $T(y(n)) \xrightarrow{o} T(y)$. Было доказано, что для $y(n)$ требуемое неравенство выполнено. Значит, оно выполнено и для $y \in C(K)$.

(3) Следует из (2).

(4) Докажем, что $y_1 - y_2 \in D(T)$. Пусть $v \in C(K)$ и $\mathrm{cz}(v) \subset \mathrm{cz}(y_1 - y_2)$. Пусть $v(n) \in C(K)$ из леммы 2.1(1). Тогда $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(v(n)) \subset G(T)$ и по (3) $v(n) \in D(T)$. Поэтому $T(v(n)) = 0$. Опять используем $T \in S_1$ и $|v - v(n)| \leqslant \frac{1}{n}e_K$. Тогда $T(v) = 0$. Таким образом, $y_1 - y_2 \in D(T)$. Получаем $|T(y_1) - T(y_2)| = |T(y_2 + (y_1 - y_2)) - T(y_2)| \leqslant \sup[|T(x)| : |x| \leqslant k(m), \mathrm{cz}(x) \subset \mathrm{cz}(y_1 - y_2)] = 0$. $\rhd$

Лемма 2.2(4) дает основание ввести для оператора T следующее свойство S_3 ($T \in S_3$): если $x \in C(K)$ и $x \neq 0$, то существует $y \in C(K)$, для которого $\mathrm{cz}(y) \subset \mathrm{cz}(x)$ и $T(y) \neq 0$.

Выполнение свойств S_1, S_2, S_3 задает класс операторов, рассматриваемых в этой статье. Очевидно, что любой линейный регулярной оператор $T : C(K) \to C_\infty(Q)$ удовлетворяет этим свойствам. Следующий результат показывает, что рассматриваемый класс включает в себя операторы, далекие, например, от аддитивных.

Предложение 2.3. *Пусть φ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемые функции, у которых $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$. Кроме того, считаем, что $\psi(0) = 0$ и из $|t_1| \geqslant |t_2|$ следует $|\psi(t_1)| \geqslant |\psi(t_2)|$. Наконец, предположим $|\varphi(rt)| \geqslant |r|\cdot|\varphi(t)|$. Пусть функционал $\Phi : C([0,1]) \to R$ задан следующим образом: $\Phi(f) = \varphi\left(\int\limits_0^1 \psi(f(t))\,dt\right)$. Тогда $\Phi \in S_1, S_2, S_3$.*

$\lhd$ Пусть $|f|$, $|g| \leqslant me$. Для $t \in [0,1]$ имеем $|\psi((f+g)(t)) - \psi(f(t))| = |\psi'(c(t)) \cdot g(t)| \leqslant M_1(\psi)|g(t)|$, где $|c(t)| \leqslant 2m$. Тогда $\left|\int\limits_0^1 (\psi(f+g)(t) - \psi(f(t)))\,dt\right| \leqslant M_1(\psi)\left|\int\limits_0^1 g(t)\,dt\right|$. Это дает

$$\left|\varphi\left(\int\limits_0^1 \psi(f+g)(t)\,dt\right)-\varphi\left(\int\limits_0^1 \psi(f(t))\,dt\right)\right|$$
$$=|\varphi(r)|\left|\int\limits_0^1 \psi(f+g)(t)\,dt-\int\limits_0^1 \psi(f(t))\,dt\right|\leqslant M_1(\varphi)M_1\psi\left|\int\limits_0^1 g(t)\,dt\right|.$$

Из этого неравенства следует, что $\Phi\in S_1$. Теперь проверим, что $\Phi\in S_2$.

Для этого оценим $\int\limits_0^1 |g(t)|\,dt\leqslant M(g)\mu(\mathrm{cz}(g))\leqslant m\mu(\mathrm{cz}(g))$, где $\mu(A)$ есть мера Лебега множества A. Обозначим $d=M_1(\varphi)M_1(\psi)m$. Найдем $r\in\mathbb{R}_+$ с условием: $|\varphi(t)|\geqslant d$ при $|t|\geqslant r$. Пусть $|\psi(t)|\geqslant 2r$ при $|t|\geqslant q$. Покажем, что любое $k(m)\geqslant q$ искомое.

Выберем $F\subset\mathrm{cz}(f)$ так, чтобы $\mu F\geqslant\frac{3}{4}\mu(\mathrm{cz}(g))$. Строим $h\in C_+([0,1])$ такую, что $P_F h=q$, $P_{[0,1]\setminus\mathrm{cz}(g)}h=0$, $0\leqslant h\leqslant qe$. Тогда $|P_F\psi(h)|=|\psi(q)|$ и $\left|\int\limits_0^1 \psi(h)\,d\mu)\right|\geqslant\left|\int\limits_0^1 P_{cz(g)\setminus F}\psi(h)\,d\mu\right|-\left|\int\limits_0^1 P_{\mathrm{cz}(g)\setminus F}\psi(h)\,d\mu\right|$. Получаем $\left|\int\limits_0^1 P_F\psi(h)\,d\mu\right|=|\psi(q)|\mu F$, $\left|\int\limits_0^1 P_{\mathrm{cz}(g)\setminus F}\psi(h)\,d\mu\leqslant|\psi(q)\mu(\mathrm{cz}(g)\setminus F)|\right|$. Это дает результат $\left|\int\limits_0^1 \psi(h)\,dt\right|\geqslant|\psi(q)|(\mu F-\mu(\mathrm{cz}(g)\setminus F))\geqslant|\psi(q)|\frac{1}{2}\mu(\mathrm{cz}(g))\geqslant r\mu(\mathrm{cz}(g))$. Таким образом, $\left|\varphi\int\limits_0^1 \psi(h)\,dt\right|\geqslant|\varphi(r\mu(\mathrm{cz}(g)))|\geqslant\mu(\mathrm{cz}(g))|\varphi(r)|\geqslant d\mu(\mathrm{cz}(g))$. Это и требовалось получить. Доказано, что $\Phi\in S_2$.

Установим, что $\Phi\in S_3$. Пусть $g\in C([0,1])$, $g\neq 0$. Считаем, что $[a,b]\subset\mathrm{cz}(g)$, $a\leqslant c-\frac{1}{n}\leqslant c<d\leqslant d+\frac{1}{n}\leqslant b$. Найдем $r\in\mathbb{R}_+$, для которого $|\varphi(t)|\geqslant 1$ при $|t|\geqslant r$. Найдем $q\in\mathbb{R}_+$, такой что $|\psi(q)|\geqslant\frac{2r}{d-c}$. Зададим функцию h на [0,1], так что $h([c,d])\equiv q$ и $h[[0,1]\setminus[c,d]]\equiv 0$. Тогда $\left|\int\limits_0^1 \psi(h)\,d\mu\right|=|\psi(q)|(d-c)\geqslant 2r$ и $\varphi\left[\int\limits_0^1 \psi(h)\,d\mu\right]\geqslant 1$. Для больших $n\in N$ выполнено $\varphi\int\limits_0^1 \psi(h_n)\,d\mu\geqslant\frac{1}{2}$, где $h_n\in C_+([0,1])$, $0\leqslant h_n\leqslant qe$, $h_n([c,d])\equiv q$, $h_n\equiv 0$ на $\left[0,c-\frac{1}{n}\right]\cup\left[d+\frac{1}{n},1\right]$. $\rhd$

Замечание. Функционалы $\Phi_1=\int\limits_0^1 f\,dx$ и $\Phi_2=\left(\int\limits_0^1 f^2\,dx\right)^3$ удовлетворяют свойствам S_1, S_2, S_3. Рассмотрим функционал $\Phi_3=\sqrt[n]{\int\limits_0^1 |f|\,dx}$. Для него не выполнены условия предложения 2.3. Проверим, что, тем не менее, Φ_3 обладает свойствами S_1, S_2, S_3. Имеем $|\Phi_3(f+h)-\Phi_3(f)|\leqslant|\Phi_3(h)|$. Поэтому $\Phi_3\in S_1,S_2$. Очевидно, что $\Phi_3\in S_3$.

3. Величины $\mathrm{in}(G,m)$ и $\mathrm{ex}(F,m)$

В дальнейшем полагаем, что $T\in S_1,S_2,S_3$.

Пусть G открыто в K и $m\in\mathbb{N}$. Полагаем

$$\mathrm{in}(G,m)=\sup[|T(g)|:\,|g|\leqslant me_K,\mathrm{cz}(g)\subset G]\in C_\infty(Q).$$

Заметим, что если $\Phi_1(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$, то $\mathrm{in}(G,m) = m\mu G$ (где, как и раньше, μ есть мера Лебега). Если $\Phi_2(f) = \left[\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx\right]^3$, то $\mathrm{in}(G,m) = m^6\mu G$.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $G_1 \supset G_2$, то $\mathrm{in}(G_1,m) \geqslant \mathrm{in}(G_2,m)$;*

(2) $\mathrm{in}(G_1 \cup G_2, m) \leqslant \mathrm{in}(G_1,m) + \mathrm{in}(G_2,k(m))$.

$\lhd$ (1) Очевидно. (2) Пусть $|x| \leqslant me_\beta$ и $\mathrm{cz}(x) \subset G_1 \cup G_2$. Надо доказать, что $|T(x)| \leqslant \mathrm{in}(G,m) + \mathrm{in}(G_2,k(m))$. По лемме 2.1(2) можно считать, что $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(x) \subset G_1 \cup G_2$. По лемме 2.1(3) полагаем, что $x = y_1 + y_2$, где $|y_1| \leqslant |x|$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{cz}(y_1) \subset G_1$ $(i = 1,2)$. Остается применить лемму 2.2(1). $\rhd$

Замечание. Последовательно применяя лемму 3.1(2), получаем $\mathrm{in}(G_1 \cup G_2 \cup G_3, m) \leqslant \mathrm{in}(G_1,m) + \mathrm{in}(G_2,k(m)) + \mathrm{in}(G_3,k(k(m)))$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены следующие условия: $|x_1|$, $|x_2| \leqslant me_K$, $G \subset K$ и $|x_1 - x_2| \leqslant \delta(\alpha, m+1)e_K$ на $K\backslash G$, причем $\delta(\alpha,m+1) \leqslant 1$. Тогда $|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant U_\alpha^{m+1} +$ $\mathrm{in}(G,k(2m+1))$.*

$\lhd$ Полагаем $y = (x_1 + \delta(\alpha,m+1)e_K) \wedge ((x_1 - \delta(\alpha,m+1)e_K) \vee x_2)$. Заметим, что $|x_1 - y| \leqslant \delta(\alpha,m+1)$ и $|y| \leqslant (m+1)e_K$. Поскольку $T \in S_1$, то $|T(x_1) - T(y)| \leqslant U_\alpha^{m+1}$. Далее заметим, что $y \equiv x_2$ на $K\backslash G$. Это означает, что $y = x_2 + a$, где $\mathrm{cz}(a) \subset G$ и $|a| \leqslant |y| + |x_2| \leqslant (2m+1)e_K$. Поскольку $T \in S_2$, то $|T(x_2) - T(y)| \leqslant \sup[|T(b)| : \mathrm{cz}(b) \subset \mathrm{cz}(a)$ и $|b| \leqslant k(2m+1)] = \mathrm{in}(G,k(2m+1))$. Поэтому $|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant U_\alpha^{m+1} + \mathrm{in}(G,k(2m+1))$. $\rhd$

Пусть множество F замкнуто в K и пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\mathrm{ex}(F,m) = \inf[\mathrm{in}(G,m) : G \supset F].$$

Заметим, что в случае функционала Φ_1 имеем $\mathrm{ex}(F,m) = m\mu F$, а в случае функционала Φ_2 верно $\mathrm{ex}(F,m) = m^6\mu F$.

Обозначим через $J(T)$ семейство таких $F \subset K$, что $\mathrm{ex}(F,m) = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $J(\Phi_1)$ и $J(\Phi_2)$ состоят из всех замкнутых множеств меры Лебега нуль.

Лемма 3.3. (1) *Пусть F_1, $F_2 \subset K$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathrm{ex}(F_1 \cup F_2, m) \leqslant \mathrm{ex}(F_1,m) +$ $\mathrm{ex}(F_2,K(m))$.*

(2) *Семейство $J(G)$ является идеалом, состоящим из замкнутых нигде не плотных множеств.*

$\lhd$ (1) Пусть $G_1 \supset F_1$ $(i = 1,2)$. Тогда $F_1 \cup F_2 \subset G_1 \cup G_2$ и по лемме 3.1(2) выполнено $\mathrm{in}(G_1 \cup G_2, m) \leqslant \mathrm{in}(G_1,m) + \mathrm{in}(G_2,k(m))$. Из этого следует требуемое неравенство.

(2) По (1) $J(T)$ является идеалом замкнутых множеств. Пусть $F \in J(G)$ и $\mathrm{int}F \neq \varnothing$. Поскольку $T \in S_2$, найдем $x \in C(K)$, такую что $|x| \leqslant me_K$, $\mathrm{cz}(x) \subset F$ и $T(x) \neq 0$. Если $G \supset F$, то $\mathrm{in}(G,m) \geqslant |T(x)| \neq 0$. $\rhd$

Замечание. Условие $T \in S_3$ нужно только для того, чтобы элементы $J(T)$ были нигде не плотными.

Предложение 3.4. *Идеал $J(T)$ обладает следующим свойством: если $F \subset K$ и $F \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где $F_n \in J(T)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $F \in J(T)$.*

$\lhd$ Надо установить, что $\mathrm{ex}(F,m) = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Для этого фиксируем $m \in N$, $\varepsilon > 0$ и $W \in \Sigma(Q)$. По индукции строим $G_n \supset F_n$ и $W_n \in \Sigma(Q)$ со свойствами: $W_{n+1} \subset W_n \subset W$, $P_{W_n}[\mathrm{in}(G_n, k(k \ldots k(m)))] \leqslant \frac{\varepsilon}{3^n}$. Тогда $F \subset G_1 \cup \ldots \cup G_s$ и

$$P_{W_s}\,\mathrm{in}(G_1 \cup \ldots \cup G_s, m) \leqslant P_{W_s}\,\mathrm{in}(G_1,m) + P_{W_s}\,\mathrm{in}(G_2,k(m)) + P_{W_s}\,\mathrm{in}(G_3,k(k(m))) + \ldots \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, нашлось открытое множество $G = G_1 \cup \ldots \cup G_s \supset F$, для которого $\mathrm{in}(G, m) \leqslant \varepsilon$ на множестве $W_s \subset W$. Это означает, что $\inf[\mathrm{in}(G, m), G \supset F] = 0$. $\rhd$

Возьмем направление $(x_j) \subset C(K)$, где $j \in \Gamma((x_j))$, и обозначим

$$H(j, n) = \bigcap \left\{ |x_j - x_{j_1}|^{-1} \left[0, \frac{1}{n}\right] : j_1 \geqslant j \right\}.$$

Предложение 3.5. *Пусть $(x_j) \subset C(K)$, $|x_j| \leqslant me_K$. Имеют место следующие утверждения:*

(1) *Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathrm{in}(K \backslash H(j,n), k(2m+1)) \downarrow 0$ в $C_\infty(Q)$. Тогда направление $(T(x_j))$ является o-сходящимся в $C_\infty(Q)$.*

(2) *Пусть $y \in C(K)$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ и для множества $E(j, n) = \bigcap \left(|x_j - y|^{-1} \left[0, \frac{1}{n}\right] : j_1 \geqslant j \right)$ выполнено $\mathrm{in}(K \backslash E(j,n),\ k(2m+1)) \downarrow 0$ в $C_(Q)$. Тогда $T(x_j) \xrightarrow{o} T(y)$.*

$\lhd$ 1) Обозначим $a_j = \sup[|T(x_j) - T(x_{j_1})| : j_1 \geqslant j]$. Тогда $|T(x_j) - T(x_{j_1})| \leqslant a_j \downarrow$. Осталось проверить, что $a_j \downarrow 0$. Пусть $W \in \Sigma(Q)$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $T \in S_1$, то найдутся $W_1 \in \Sigma(Q)$ и индекс $\alpha_0 \in \Gamma((U_\alpha^{m+1})$, для которых $P_{W_1} U_{\alpha_0}^{m+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ и $W_1 \subset W$. Возьмем $p \in \mathbb{N}$ с условием: $\frac{1}{p} \leqslant \delta(\alpha_0, m+1)$. Полагаем, что $\delta(\alpha_0, m+1) \leqslant 1$.

Поскольку $\mathrm{in}(K \backslash H(j,p), k(2m+1)) \downarrow 0$, то существуют $W_2 \in \Sigma(Q)$ и $j_0 \in \Gamma((x_j))$, такие, что $W_2 \subset W_1$ и $P_{W_2} \mathrm{in}(K \backslash H(j_{0,p}), k(2m+1)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $j_1 \geqslant j_0$. Тогда $|x_{j_1} - x_{j0}| \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \delta(\alpha_0, m+1)$ на множестве $H(j_0, p)$ (по заданию $H(j_0, p)$). Применим лемму 3.2: $|T(x_{j_0}) - T(x_{j_1})| \leqslant U_{\alpha_0}^{m+1} + \mathrm{in}(K \backslash H(j_0, p), k(2m+1))$. По выбору $W_2 \in \Sigma(Q)$ имеем $P_{W_2}(|T(x_{j_1}) - T(x_{j_0})|) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Это означает, что $g_j \downarrow 0$ в $C_\infty(Q)$. Таким образом, $|T(x_j) - T(x_{j_1})| \leqslant g_j$ при $j_1 \geqslant j$, т. е. $(T(x_j))$ o-сходится.

Утверждение (2) доказывается по той же схеме, что и (1). Берется $h_j = \sup[|T(x_{j_0}) - T(y)| : j_1 \geqslant j]$ и проверяется, что $h_j \downarrow 0$ и тем самым $|T(x_j) - T(y)| \leqslant h_j \downarrow 0$. $\rhd$

Замечание. Предложение 3.5(2) показывает, что оператор $T \in S_1, S_2, S_3$ обладает некоторой порядковой непрерывностью. В случае, когда рассматривается функционал Φ_1, условие из (1) означает, что $\mu(H(j,n)) \uparrow 1$. Проверяется, что $(\Phi_1(x_j))$ является фундаментальным числовым направлением. Условие (2) означает, что $x_j \to y$ по мере. Поэтому $Tx_j \to Ty$. Аналогичная ситуация и для функционала Φ_2.

4. Порядковая непрерывность оператора T

Обозначим через $\Pi(T)$ семейство всевозможных направлений $(V_j) \subset C(K)$, таких что $V_j \downarrow$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $F_n((V_j)) = \bigcap V_j^{-1} \left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right] \right) \in J(T)$. По лемме 3.3(2) направление $V_j \downarrow 0$. А по лемме 3.3(1) семейство $\Pi(T)$ замкнуто относительно сложения.

Предложение 4.1. *Если в $C(K)$ направление (y_j) порядково сходится к элементу y с регулятором $(v_\beta) \in \Pi(T)$ (т. е. $|y - y_j| \leqslant v_\beta \downarrow 0$ при $j \geqslant j(\beta)$), то $T(y_j) \xrightarrow{o} T(y)$.*

$\lhd$ Применим предложение 3.5(2) для любого $n \in \mathbb{N}$. Если $G \supset F_n((v_j))$, то существует $j \in \Gamma((v_j))$, для которого $v_j \leqslant \frac{1}{n}$ на $K \backslash G$. Поэтому $E(j,n) \supset K \backslash G$ и выполнено условие из предложения 3.5(2). $\rhd$

Замечание. Пусть на $C(K)$ задан оператор $T : C(K) \to C_\infty(Q)$ со следующими свойствами: T порядково ограничен, T монотонен (т. е. из $|x_1| \geqslant |x_2|$ следует $|T(x_1)| \geqslant |T(x_2)|$), из $x_\alpha \downarrow 0$ следует $T(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ (выполнение $T \in S_1, S_2, S_3$ в этом замечании не предполагается). Тогда для T выполняется следующее условие $(*)$: если F замкнутое нигде не плотное множество в K, то $F \in J(T)$. Действительно, пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим всевозможные пары $\alpha = (G_1, G_2)$, такие, что $F \subset G_1 \subset \operatorname{cl} G_1 \subset G_2$. Пусть $h_\alpha \in C(K)$ обладает свойствами: $0 \leqslant h_\alpha \leqslant me_K$, $h_\alpha \equiv me_K$ на G_1 и $h_\alpha \equiv 0$ на $K \backslash G_2$. Тогда $h_\alpha \downarrow 0$, $Th_\alpha \xrightarrow{o} 0$ и $|Th_\alpha| \geqslant \operatorname{in}(G_1, m)$, где $\alpha = (G_1, G_2)$.

Теорема 4.2. *Пусть $T \in S_1, S_2, S_3$ и монотонен. Эквивалентны утверждения:*

(1) *T порядково непрерывен (т. е. из $x_\alpha \xrightarrow{o} y$ следует $T(x_\alpha) \xrightarrow{o} T(y)$);*

(2) *для K выполнено условие $(*)$.*

$\lhd$ Импликация (1)⇒(2) доказана в замечании к предложению 4.1. Если выполнено (2), то любое направление (v_j) с условием: $(v_j) \downarrow 0$, принадлежит $\Pi(T)$. Остается использовать предложение 4.1, чтобы получить (2)⇒(1). $\rhd$

Предложение 4.3. (1) *Пусть для K выполнено условие $(*)_\sigma$: если θ нигде не плотное нуль-множество, то $\theta \in J(T)$. Тогда оператор T секвенциально порядково непрерывен.*

(2) *Пусть оператор T монотонен. Эквивалентны следующие утверждения:* а) *T секвенциально порядково непрерывен;* б) *для K выполнено условие $(*)_\sigma$.*

$\lhd$ (1) Пусть $|x_n - y| \leqslant v_n \downarrow 0$. Из условия $(*)_\sigma$ следует, что $(V_n) \in J(T)$. Остается применить предложение 4.1.

(2) Импликация а)⇒б) установлена в замечании к приложению 4.1. Импликация б)⇒а) установлена в 1). $\rhd$

Замечание. Поскольку в $C([0,1])$ существуют замкнутые нигде не плотные множества ненулевой меры, то функционалы Φ_1 и Φ_2 не могут быть порядково непрерывными (то же верно и для секвенциальной порядковой непрерывности).

5. Продолжение оператора T на элементы дедекиндова пополнения $C(K)$

Для решения указанной задачи будет использоваться предложения 3.5(1) и 4.1.

Пусть h принадлежит дедекиндову пополнению $k(C(K))$ векторной решетки $C(K)$ ($\pi : C(K) \to kC(K)$ каноническое вложение). Пусть

$$U(h) = (x \in C(K) : \pi(x) \geqslant h), \quad L(h) = (y \in C(K) : \pi(y) \leqslant h).$$

Обозначим плотное $X = X(h) = \Big\{t \in K : \sup(y(t) : y \in L(h)) = \inf(x(t) : x \in U(h)) = \bar{h}(t)\Big\}$. Тогда функция $\bar{h} : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена.

Пусть $G \subset K$ и выполнено следующее условие: если $t_1, t_2 \in G \cap X$, то $|\bar{h}(t_1) - \bar{h}(t_2)| \leqslant \frac{1}{n}$. Возьмем $t \in G \cap X$ и найдем два числа: $r_1 = \bar{h}(t) + \frac{1}{n}$ и $r_2 = \bar{h}(t) - \frac{1}{n}$. Тогда $r_1 \leqslant h \leqslant r_2$ на прообразе G. Обозначим

$$H(h,n) = K \backslash \bigcup \left\{G : \text{если } t_1, t_2 \in G \cap X, \text{ то } \bar{h}(t_1) - \bar{h}(t_2) \leqslant 1/n\right\},$$

$$\operatorname{Rim}(T) = \left\{h \in k(C(K)) : |h - \pi x_j| \leqslant \pi V_\beta \ \ (\text{при } j \geqslant j(\beta)), \text{ где } (V_\beta) \in \Pi(T)\right\}.$$

Предложение 5.1. (1) *Пусть $h \in k(C(K))$. Эквивалентны следующие утверждения:* а) *$h \in \operatorname{Rim}(T)$;* б) *для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $H(h,n) \in J(T)$;* в) *направление $(x - y : x \in U(h), y \in L(h))$ принадлежит $\Pi(T)$.*

(2) *$\operatorname{Rim}(T)$ является r-полной векторной решетки.*

(3) *Для того, чтобы $\operatorname{Rim}(T)$ была дедекиндово полной векторной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы для любого регулярного замкнутого $F \subset K$ было выполнено $\operatorname{Fr}(F) \in J(T)$.*

$\lhd$ (1) Импликации в)$\Rightarrow$а)$\Rightarrow$b) очевидны. Чтобы доказать б)$\Rightarrow$в), рассмотрим $F_n = \bigcap\left((x-y)^{-1}\left[\frac{1}{n};+\infty\right]\right)$. Тогда по заданию $H(h,n)$ выполнено $F_n \subset H(h,n) \in J(T)$.

(2) Следует из предложения 3.4 и из того, что $\Pi(T)$ замкнуто относительно сложения.

(3) Если каждое $\mathrm{Fr}(F) \in J(T)$ для регулярного замкнутого F, то любая проекция $\pi(e_K) \in \mathrm{Rim}(T)$ и по 2) $\mathrm{Rim}(T) = k(C(K))$.

Пусть $\mathrm{Rim}(T) = k(C(K))$ и пусть F регулярное замкнутое в K. Тогда для соответствующей проекции h элемента $\pi(e_K)$ выполнено $|h - \pi x_j| \leqslant \pi y_\beta$ и $(y_\beta) \in \Pi(T)$. Тогда $\mathrm{Fr}\, F \subset \bigcap\left(y_\beta^{-1}\left[\frac{1}{2};+\infty\right]\right) \in J(T)$. $\rhd$

Замечание. В случае функционалов Φ_1 и Φ_2 векторная решетка $\mathrm{Rim}(\Phi_1) = \mathrm{Rim}(\Phi_2)$ совпадает с интегрируемыми по Риману элементами из $k(C([0,1]))$.

Лемма 5.2. *Пусть $|h - \pi x_j| \leqslant \pi y_\beta$, где $(y_\beta) \in \Pi(T)$. Тогда $Tx_j \xrightarrow{o} \overline{T}(h)$; причем $\overline{T}$ не зависит от выбора направлений (x_j) и (y_β). Это означает, что задается продолжение $\overline{T} : \mathrm{Rim}(T) \to C_\infty(Q)$.*

$\lhd$ Для произвольного $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $F_n = \bigcap\left(y_\beta^{-1}\left[\frac{1}{2n};+\infty\right]\right) \in J(T)$. Пусть $G \supset F_n$. Найдется $\gamma \in \Gamma((y_\beta))$, для которого $y_\beta \leqslant \frac{1}{2n}$ на $K\backslash G$. Поэтому

$$H(\gamma,n) = \bigcap\left[|x_\gamma - x_{\gamma_1}|^{-1}[0,1] : \gamma_1 \geqslant \gamma\right] \supset K\backslash G.$$

По предложению 3.5(1) выполнено $T(x_\gamma) \xrightarrow{o} \overline{T}(h)$. Пусть $|h - \pi a_\delta| \leqslant \pi b_\gamma$, где $(b_\gamma) \in \Pi(T)$. По предложению 3.5(1) $T(a_\delta) \xrightarrow{o} g_1 \in C_\infty(Q)$. Устраиваем новое направление (c_a), в котором попеременно появляются члены из (a_δ) и (x_γ) и $|h - \pi c_a| \leqslant \pi(y_\beta + b_\gamma)$. Опять по предложению 3.5(1) $Tc_\alpha \xrightarrow{o} g_2$. Но тогда $g_2 = \overline{T} = g_1$. $\rhd$

Теорема 5.3. (1) *Существует продолжение $\overline{T}$ оператора T на $\mathrm{Rim}(T)$, причем $\overline{T} \in S_1$, S_2, S_3.*

(2) *Оператор $\overline{T}$ является единственным продолжением T с условием: если $(y_\beta) \in \Pi(T)$, $h, h_\gamma \in \mathrm{Rim}(T)$ и $|h_\gamma - h| \leqslant \pi y_\beta$, то $\overline{T}(h_\gamma) \to \overline{T}(h)$.*

$\lhd$ Сначала проверим, что $\overline{T} \in S_1$. Пусть h_1, $h_2 \in \mathrm{Rim}(T)$, $|h_1|$, $|h_2| \leqslant m\pi(e_K)$ и $|h_1 - h_2| \leqslant \delta(m+1,\alpha)\pi e_K$. Докажем, что $|\overline{T}(h_1) - \overline{T}(h_2)| \leqslant U_\alpha^{m+1}$, где (U_α^{m+1}) из условия $T \in S_1$. Имеем $|h_1 - \pi x(j)| \leqslant \pi(a_\beta)$. И $|h_2 - \pi(y_\delta)| \leqslant \pi(a_\beta)$. Тогда $\pi(x_\lambda y_\delta) \xrightarrow{o} h_1 - h_2$. Обозначим $c_{\gamma\delta} = (x_\gamma - y_\delta) \vee (-\pi(\delta e_K)) \wedge (\pi(\delta e_K))$. По условию $\pi c_{\gamma\delta} \xrightarrow{o} h_1 - h_2$ и $|c_{\gamma\delta}| \leqslant \delta e_K$. Тогда $|c_{\gamma\delta} + y_\delta| \leqslant (m+1)e_K$ и $|T(c_{\gamma\delta} + y_\delta) - T(y_\delta)| \leqslant U_\alpha^{m+1}$. Остается перейти к пределу в неравенстве: $\left|\overline{T}(h_1) - \overline{T}(h_2)\right| \leqslant \left|\overline{T}(h_1) - T(c_{\gamma\delta} + y_\delta)\right| + |T(c_{j\delta} + y_\delta)| + \left|T(y_\delta) - \overline{T}(h_2)\right|$.

Теперь проверим, что $\overline{T} \in S_2$. Пусть $|h_1|$, $|h_2| \leqslant m\pi(e_K)$. Тогда $|h_1 - \pi(x_\gamma)| \leqslant \pi(a_\beta)$, $|h_2 - \pi(y_\delta)| \leqslant \pi(a_\beta)$. Всегда можно считать, что $|h_1| \geqslant |\pi(x_\gamma)|$, $|h_2| \geqslant |\pi(y_\delta)|$. Получаем $\left|\overline{T}(h_1 + h_2) - \overline{T}(h_2)\right| \leqslant \left|\overline{T}(h_1 + h_2) - T(x_\gamma + y_\delta)\right| + |T(x_\gamma + y_\delta) - T(x_\gamma)| + \left|T(x_\gamma) - \overline{T}(h_1)\right|$. Первое и третье выражения в правой части стремятся к нулю. Для второго выражения имеет место оценка: $[T(x_\gamma + y_\delta) - T(x_\gamma)] \leqslant \sup\left[|T(g)| : \mathrm{cz}(g) \subset \mathrm{cz}(y_\beta) m\, |g| \leqslant k(m)e_K\right] \leqslant \sup\left[\overline{T}(f) : \mathrm{cz}\, f \subset \mathrm{cz}(h_2),\, |f| \leqslant k(m)\pi(e_K)\right]$.

Выполнение $\overline{T} \in S_3$ непосредственно следует из $T \in S_3$.

(2) Достаточно установить, что если $|h_\gamma - h| \leqslant \pi y_\beta$ в $\mathrm{Rim}(T)$ и $(y_\beta) \in \Pi(T)$, то $\overline{T}(h_\gamma) \to \overline{T}(h)$. В (1) было установлено, что для $\overline{T}$ выполнены свойства S_1, S_2, S_3. Тогда для $\mathrm{Rim}(T)$ и оператора $\overline{T}$ можем применить предложение 4.1 и получить требуемый результат. $\rhd$

Литература

1. *Лозановский Г. Я.* О дискретных функционалах в пространствах Марцинкевича и Орлича // Исследования по теории функций нескольких переменных: Межвуз. темат. сб.—Ярославль: Яросл. ун-т, 1987.—Вып. 2.—С. 132–142.
2. *Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я.* Представление линейных функционалов и операторов на векторных решетках // Теория операторов в функциональных пространствах.—Новосибирск, 1977.—С. 71–98.
3. *Лозановский Г. Я.* О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 14, № 1.—С. 140–153.
4. *Koldunov A. V.* The extensions of operators with the Hammerstein property // Bull. Polish. Ac. Sc.—1996.—V. 44, № 4.—P. 499–508.
5. *Koldunov A. V., Veksler A. I.* On normed lattices and their Banach completions // Positivity.—2005.—V. 9.—P. 415–435.

Статья поступила 7 марта 2007 г.

Колдунов Андрей Витальевич, к. ф.-м. н.
РГПУ им. А. И, Герцена
Санкт Петербург, 191186, РОССИЯ